

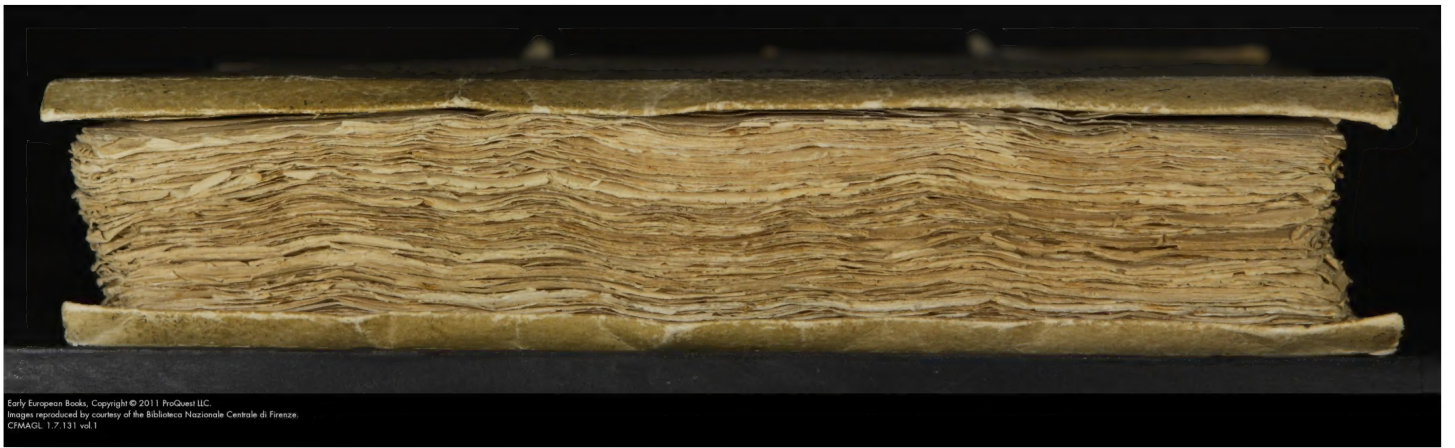


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.  
CFMAGL 1.7.131 vol.1





Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.  
CFMAGL 1.7.131 vol.1



Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.  
CFMAGL 1.7.131 vol.1



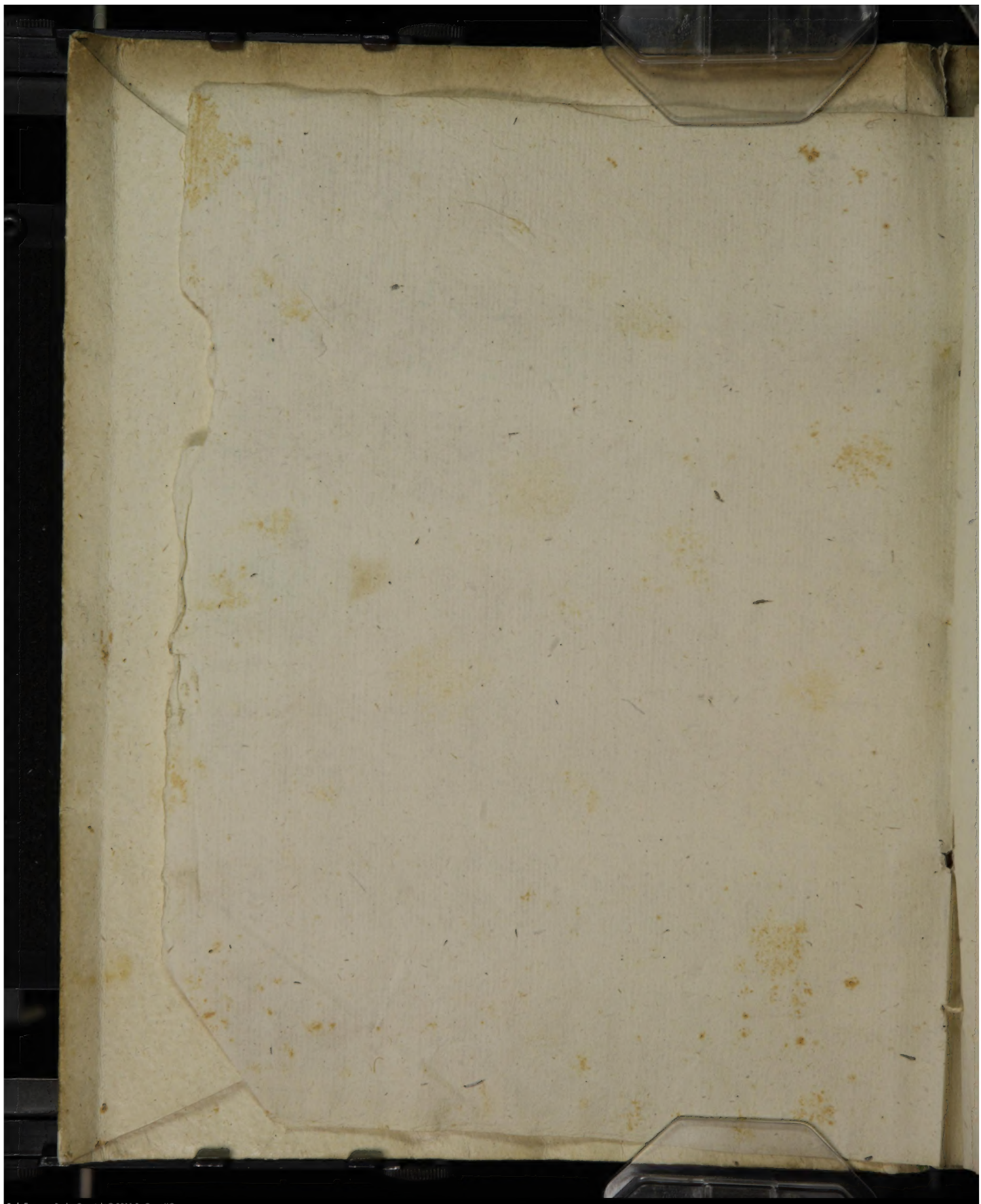
- 1. 7. 131

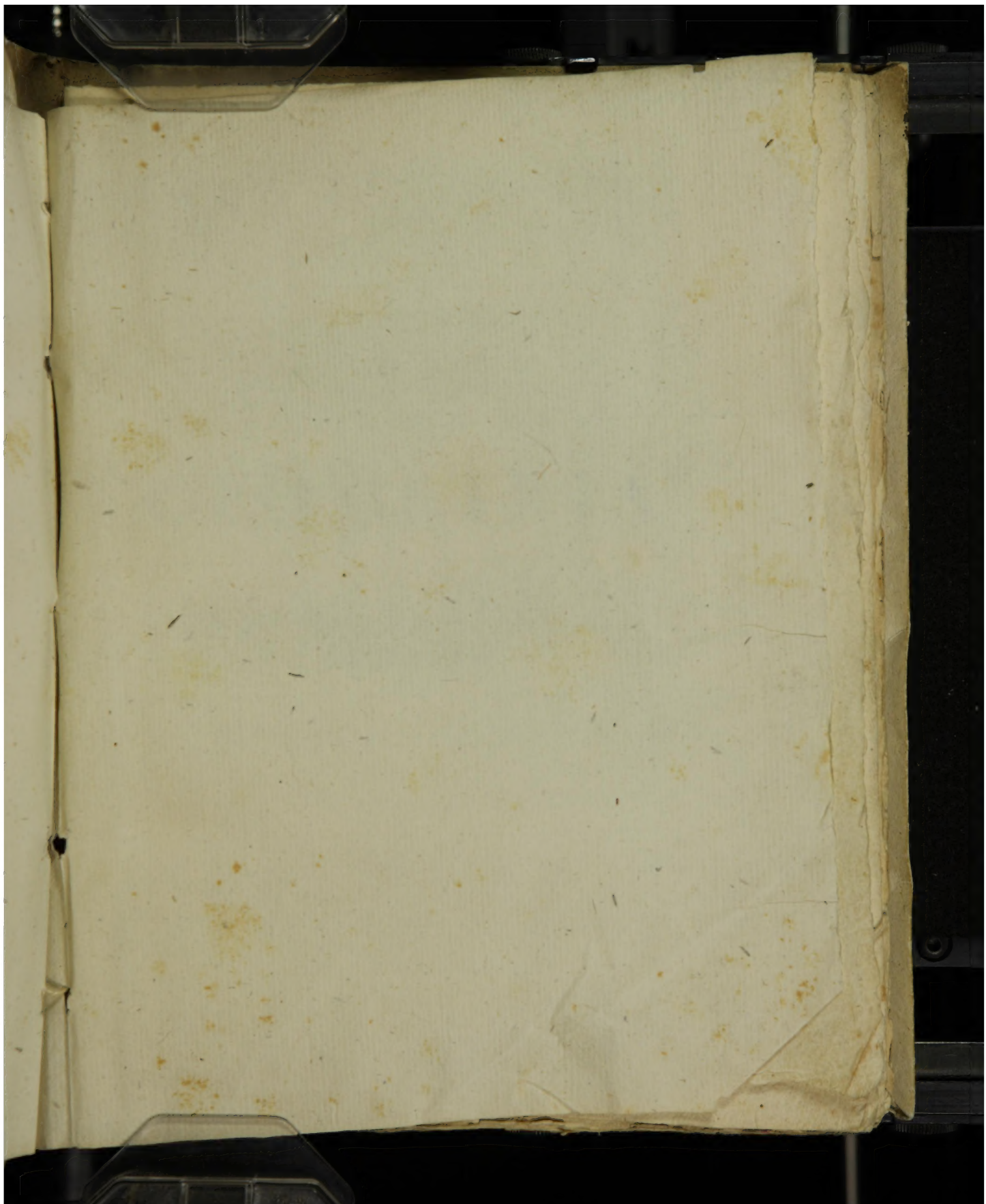
1 H. 7



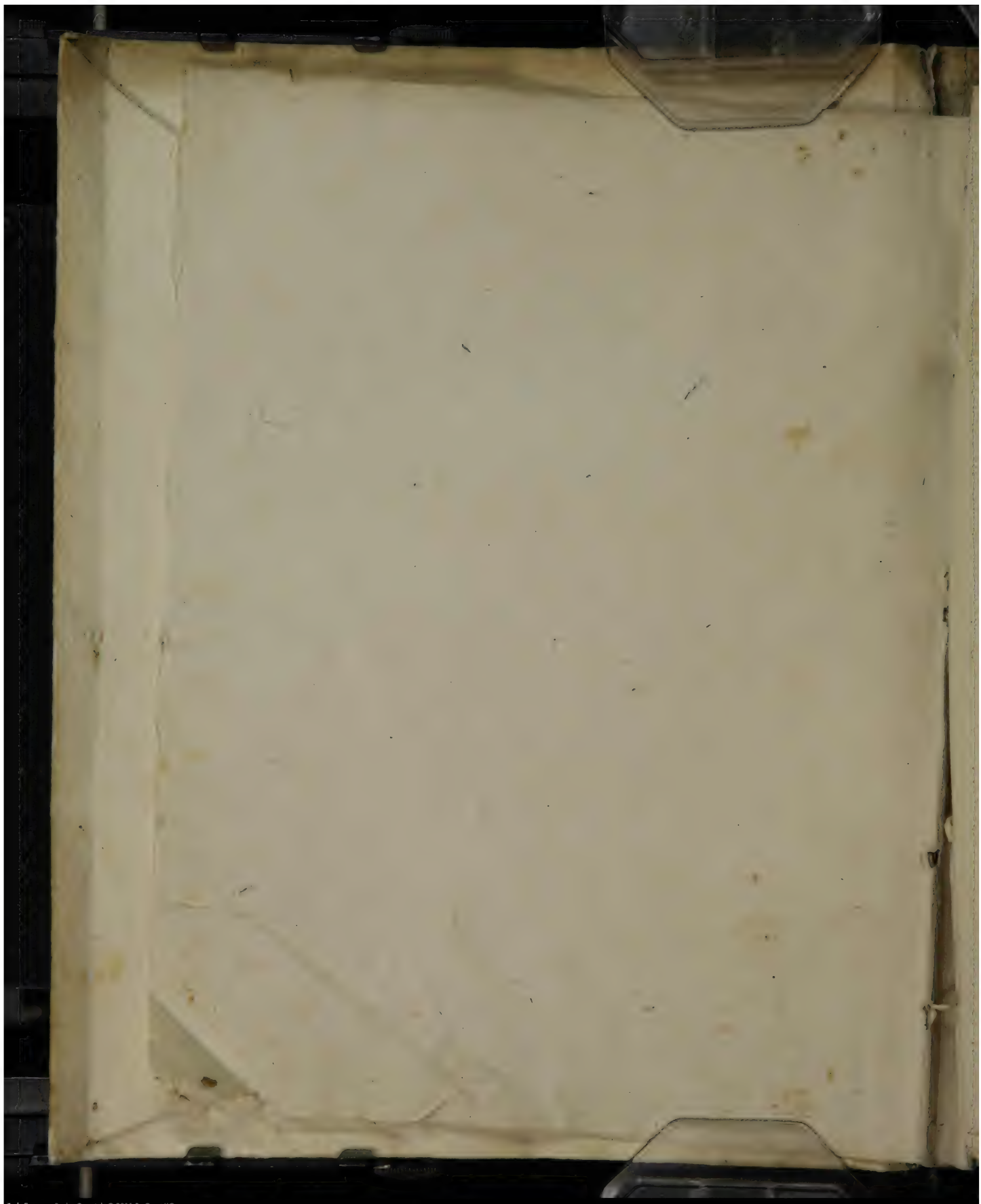
XI  
CART.  
Geom. 2











R E N A T I  
D E S - C A R T E S  
G E O M E T R I A .

EDITIO SECUNDA,

*Multis accessionibus exornata, & plus altera  
sui parte adaucta.*





Primus inaccessum qui per tot sæcula verum  
 Fruit è tetrìs longæ caliginis umbris,  
 Mysta sagax, Natura, tuus, sic cernitur Orbi  
 Cartesius. Voluit sacros in imagine vultus  
 Jungere victuræ artificis pia dextera famæ,  
 Omnia ut aspicerent quem sæcula nulla tacebunt.

CONSTANTINI HUGENII F. LY

GEOMETRIA,  
à  
RENATO DES CARTES

Anno 1637 Gallicè edita; postea autem  
Unà cum NOTIS

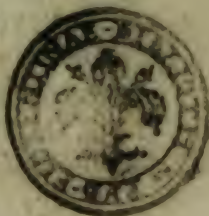
FLO RIMONDI DE BEAUNE,  
In Curia Blesensi Consilarii Regii, Gallicè conscriptis in  
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,

*Operâ atque studio*

FRANGISCI à SCHOOTEN,  
in Acad. Lugd. Batavâ Matheseos Professoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis  
instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiores expli-  
cationem, quam ad ampliandam hujus Geometria ex-  
cellentiam faciemibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.



AMSTELÆDAMI,  
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,  
c1639.



# C A T A L O G V S

corum,

Quæ hoc Opere continentur.

RENATI DES CARTES Geometria, tribus libris comprehensa.

FLORIMONDI DE BEAUNE in illam NOTÆ BREVES.

FRANCISCI à SCHOOTEN in eandem Commentarii, recogniti & aucti.

— ejusdem APPENDIX, de Cubicarum Æquationum Resolutione.

— item ADDITAMENTUM, in quo continetur solutio artificiosissima difficilis cujusdam Problematis; & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis.

JOHANNIS HUDDENII Epistolæ duæ, quarum altera de Æquationum Reductione, altera de Maximis & Minimis agit.

HENRICI VAN HEURAET Epistola, de Curvarum Linearum in Rectas transmutatione.

---

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad CARTESIANÆ GEOMETRIÆ Methodum.

FLORIMONDI DE BEAUNE duo tractatus posthumi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus Æquationum.

JOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum Linearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

SERENISSIMÆ PRINCIPI  
ELISABETHÆ,  
FRIDERICI BOHEMIÆ REGIS,  
Comitis Palatini, & Electoris Sacri Ro-  
mani Imperii, Filiæ natu maximæ.

*SERENISSIMA PRINCEPS,*



U M ea Celsitudinis tuæ  
fit claritas, ut maximo-  
rum hominum monu-  
menta, tanti nominis  
splendore illustrata, in  
lucem jam pridem prodierint; quid  
mirum, si & ego lucubrationes haf-  
ce Celsitudini tuæ consecrandas ef-  
se duxerim? Nam, ut reliquas vir-  
tutes, quæ in Te eximiæ sunt, ta-  
ceam, tantâ cum prudentiâ singu-  
laris ingenii tui perspicacia conjun-

\* 3

cta



## E P I S T O L A

eta est, ut, spretis illis artibus & scientiis, quæ inanis potius gloriæ, altercandique studio, quàm veri inquisitionis causâ addiscuntur, eas solas amplexa fueris, quæ placidè philosophantes, nihilque nisi evidens admittentes, continuâ simplicium rationum serie ad abstrusissimarum rerum cognitionem perducunt. Unde fieri non potuit, quin ad sublimem illam sapientiam, quam in Te suspicimus ac veneramur, felicissimè tempore brevissimo perveneris. Singularem tuum in Mathematicis profectum non est quòd hìc commemorem; cum majorum tuorum exemplo, laudatissimæque memoriæ Principum, qui sanguinis vinculo tibi fuere

# DEDICATORIA.

fuere juncti, atque ex harum artium cultura immortalem sibi gloriam reportarunt, eas non minus colas, quàm hæreditatis jure in iisdem excellas. Quippe quæ in earum adyta ita penetrasti, ut Artem Analyticam, ipsam in Mathematicis inveniendi viam, in qua ingenii præsertim acumen requiritur, optimè cognoveris, eaque ratione, quantum incomparabilis ingenii tui industria præstare valeat, satis superque ostenderis. Quæ cum ita sint, atque insuper in me ipso compertum habeam, quanto favore Matheseos cultores prosequaris; jure meritissimo effecere, ut publicum hoc tanti beneficii, tantorumque meritorum tuorum testimonio-



EPIST. DEDICATORIA.

stimonium extare vellem , atque  
hoc quaecunque , five grati animi  
monumentum, five observantiæ in  
Celsitudinem tuam meæ pignus, of-  
ferrem. Quod , ut solito favore ex-  
cipiat, submissè rogo ,

SERENISSIMÆ CELSITVDINIS TVÆ

Dabam Leydæ, xii Kal. Julii,  
Anni cldccxlix.

*Devotissimus cliens*

FR. à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCUS à SCHOOTEN  
LECTORI  
S.

**N**onnumquam est, & quod excurrit, Benevole Lector, cum Geometria hac Nobilissimi atque incomparabilis Viri RENATI DES CARTES, quam vernaculâ linguâ anno 1637 inter Philosophiæ suæ specimina in lucem edidit, è Gallica à me in Latinam linguam versa commentariisq; illustrata primum prodit. Interea autem temporis cum operam, quam hoc in negotio collocaram, Viris literatis & ingeniosis pluribus, quos stupenda Authoris nostri eruditio latere non potuit, haud ingratam fuisse compererim; non potui non, distractis exemplaribus, cum novæ editionem Typographus adornaret, quin honesta ipsius petitioni locum darem, eaq; flagitanti concederem, quæ ad Operis huius commendationem illustrare vel addere valebam. Quid hic autem nunc demum præstiterim, si candido Lectoris iudicio relinquam, facile ex utriusque editionis inter se collatione dignoscet. Cuius etiam laboris nunquam me pœnituit, tum quod regiam hic ad pœnitiora universæ Matheseos adyta viam, quam cuique ingredi licet, patere sciebam, tum quod hanc summi Viri Geometriam publici interesse, & eorum fore, qui Mathematicis operam dant, in me ipso cum aliis strenuis Methodi nostræ cultoribus, non sine voluptate indies experiebar. Verum enimvero cum illius utilitas tanta sit, ut, si eam vel paucis describerem, pagina, quæ præfationi hic inferrent, deficerent, indicasse suffecerit, vix quicquam in universa Mathesi ita difficile aut arduum occurrere posse, quò non inoffenso pede per hanc Methodum penetrare liceat, quodvè Geometria huius legibus non subijci solvique possit. Accedit, quod nullis Problematum finibus aut numero coerceatur, sed fructum, qui vel à Veterum Analysisi vel à Recentiorum Algebra expectandus erat, omnem in se contineat,

\*\*



# P R Æ F A T I O

ineat, nec quicquam hic desiderari posse videatur; atque adeò frustra sit, quòd de alià sibi quis exoptandà Methodo, ad Matheseos culturam perfectionemq̃, in posterum cogitet. Quippe hæc illa est, cujus exercitio Author mentem excolendo, non modò in Mathematicis Scientiis summas difficultates adolescens adhuc superavit, aliisq̃ in inveniendò palmam præripuit: sed tantam quoque ingenii promptitudinem facilitatemq̃ sibi deinceps conciliavit, ut primus clavem, quâ mysteria Vniversi referenda sunt, & cujus ope natura natura ac lux orbi magis magisq̃ redditur, invenerit: adeò ut eorum, quæ lumine naturali cognosci queunt, nihil tam abditum, densisq̃ immersum fuisse tenebris, putandum sit, quòd ingenii sui felicitate eruere ipse desperasset. Versionem quòd attinet, cum fidelissimus ubique verborum interpres, salvo rerum pondere, esse studuerim, vix est, quòd censuram aliquorum metuum; præsertim ubi illam ab Authore, cui pro jure integrum fuit suum ubique sensum vel interpretari vel clariorem reddere, postea recognitam fuisse sciverint. Verùm cum hæc Geometria à paucis, cum propter eruditam brevitatem, tum propter questionum, quæ inibi pertractantur, difficultatem, non sine abstrusa attentione ac indefesso studio per se intelligi potuerit, periculum erat, ne laborum impatientes Lectores, cum metam vel ipsi ignorarent, vel improbi negarent, arenam desererent. Consciis itaque ego illam non in eum finem ab Authore conscriptam esse, quasi ipsius Methodum ex ea unusquisque quàm facillimè haurire posset, sed tantum ut eximia aliquot ejus specimina ederet: opere pretium duxi in commune consulere, & difficiliora loca passim à me explicata uberioribus hinc inde exemplis altius illustrare. Scopum Authoris quòd spectat, eum hoc loco exponere haudquaquam duxi necessarium, cum cujusque libri argumentum commentariis meis præmiserim, veterumq̃ circa Geometria Problemata opiniones ac decreta, scitu non injucunda, ibidem explicaverim, quò operis summam atque adeò commentariorum nostrorum usum breviter complecterer. Porrò ne quid deesse videretur, unde hæc Geometria majorem adhuc lucem sortiretur, additæ etiam sunt Notæ à Clarissimo atque Amplissimo Viro D. FLORIMON-

A D L E C T O R E M.

MONDO DE BEAUNE, Consiliario Blesensi, in eandem olim Gallicè conscripta. Quæ eodem modo in Latinam linguam à me translata, postquam huic Geometria primò ejus permissu essent annexa, dein ab ipso recognita & emendata, nunc denuo vel hoc nomine, ni fallor, acceptiores sunt accessura. Præterea, quò unusquisque instructus iis, quibus ad adyta ejus Methodi perducatur, se ad ipsam Geometriam legendam accingere possit; haud omittendum duxi, quin simul Introductionem nostram, quam Vir Clarissimus, mihiq; amicissimus, D. ERASMIUS BARTHOLINUS, nunc Medicina & Matheseos in Academia Hafniensi Professor Regius, in eum finem olim conscripsit ac anno 1651 publici juris fecit, prout illam uterque jam demum recognovimus, editioni huic adjungerem. Quo quidem negotio futurum spero, ut, quod propriis condimus horreis, ex aliena non opus sit melle emendicare, licet Author antehac, tum ad suam Geometriam intelligendam Lectorem in aliis Geometria libris jam versatum præsupposuerit, ne quæ inibi dicta sunt & demonstrata repetere cogereetur; tum etiam ad suam Methodum addiscendam leviolem vulgaris Algebra cognitionem requisiverit. Nec enim video, quid impræsentiarum, post mediocrem in Arithmetica & Geometria elementis exercitationem, calculiq;, eadem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere possit, quo minus inoffenso pede ad hanc Geometriam accedat. Et quanquam optandum fuisset, hæc omnia ab Authore ipso fuisse præstata; quippe qui tantum regulas suæ Methodi maxime necessarias hic exposuit; attamen quia animadvertit laborem atque industriam, quam Lector in investigandis reliquis, demonstrandisq; iis, quæ tantum intento digito indicavit, impenderet, præcipuum esse in hac Scientia, quo cujusque ingenium excolatur: à semetipso impetrare non potuit, ut ea fusius pertraheret. Hinc cum successu temporis inter eos, quibus hanc Geometriam sedulo versare ejusq; arcana penitus rima-ri cordi fuit, non pauci reperti sint, qui, Authoris vestigiis acule insistentes, præclara multa, ad excellentiam illius Methodi plurimum facientia, invenerint, omnesq; inter, præ copia inventorum eo-



# P R Æ F A T I O

rumq; dignitate, subtilissimus ac præstantissimus D. JOHANNES HUDDENIUS, Amstelodamensis, amicus meus integerrimus, primas facile obtineat: visum fuit ea, quæ ab ipso de *Æquationum Reductione* ac de *Maximis & Minimis*, maximam partem Belgicè conscripta, inter alia per literas mihi sunt communicata, postquam à me Latine essent reddita, Geometria huic pariter subjungere. Quibus tanquam colophonem addere placuit Epistolam, quam acutissimus, mihiq; ut HUDDENIO nostro conjunctissimus, D. HENRICUS VAN HEUKAET, Harlemensis, Salmurio nuper ad me transmisit. In qua cum brevem exponat Methodum, inter peregrinandum à se novissimè excogitatam, transmutandi complures curvas lineas in rectas, quod ipsum à nemine (quantum novi) in hunc usque diem ostensum est, quin imò à multis ut insolubile habitum: id mihi agendum putavi, ne eximium adeò inventum occultaretur, ut, impetrato ad id ejus consensu, illud hic loci in lucem producerem. Eadem ratione ductus, ne sparta, quam Vir Amplissimus, nunc pie memorie, D. DE BEAUNE in excolenda propagandaq; hujus Geometriae Methodo susceperat, præcipiti ejus fato interiret; ex officio atque publica Matheſin amantium utilitate fore existimaui, si Clarissimum Virum D. ERASMIUM BARTHOLINUM nostro rogatu adigerem, ut, quæ de Natura, Constitutione, ac Limitibus *Æquationum* D. DE BEAUNE vernaculâ suâ linguâ in lucem dare constituerat, cum in manus ipsius incidissent, publico non invideret. Nec frustra in eo fui, nactus enim sum, ut, quæ ex ejus adversariis, non sine indefesso labore ac difficili fortuna, ad umbilicum perduxerat, Latine redderet, nobisq;, quò unâ cum his à me typis mandarentur, concederet. Caterùm ad Artis Analytica præstantiam uberius exhibendam, & ad meum rei literarie inserviendi studium comprobandum, non abs re fore judicavi, si Geometriam hanc non modò fatu illo posthumo ac advenâ, sed alio etiam primogenito eoq; indigenâ adaugere satagerem; nisi fortè hunc alium quoque posthumum ac advenam dixeris, eo nomine atque intuitu, quòd parens jam totus Republica vivat,

AD LECTOREM.

vivat, nobisq; & studiis nostris civiliter mortuus, & quasi peregrinus factus sit. Etenim cum aliquot abhinc mensibus occasio mihi data fuerit, ut in eum quem de Locorum Planorum & Solidorum per *Artem Analyticam* inventionem tractatum Nobilissimus atque Amplissimus Vir D. IOHANNES DE WITT, Consiliarius & Pensionarius, sive minister primarius Hollandiæ West-Frisiæq;, concinnaverat, opportunus inciderim: non potui non, cum Authoris permissu inspicendi potestas mihi facta esset, quin sententiam, quid de illo videretur, rogatus, coram lubens exponerem. Hunc itaque quia admodum sublimem, tantoq; Viro dignâ ingeniositate conscriptum, ac insuper ad penitiorem huius Geometriæ intellectum haud parum facere posse deprehenderam, (quippe qui subtilissimam illam de Locis materiam, in secundo Geometriæ libro paulo succinctius pertractatam, de integro resumit, aliq; pacto componit:) consultum duxi, ut in publicum emolumentum editionis adornanda auctor essem. At vero facile prævidebam, saltem suprema, quibus fungitur, Reipublica munera, gravesq; hominis curas, impedimento fore, quo minus tam splendida proles, quæ jam ante decennium formata in conceptu huc usque delituerat, absque obstetricis auxilio, in lucem unquam produceretur. Quocirca cum eam mei iuris facere non dedignatus fuerit, neque etiam copiam eorum, quæ de Elementis Curvarum Linearum jam pridem conscripsit, mihi facere recusaverit: rem ubique gratam me facturum credidi, si tam hunc quam illum tractatum ab ulteriori oblivione vindicandi operam darem; præsertim cum id iis, qui *Mathesin* seriò excolunt, acceptum fore perspexerim, quod curvarum primi generis ortum longè simplicius generaliusq; ab ipso quam à veteribus, absque ulla solidi consideratione, inspectum fuisse, reperturi sint. Quas itaque curvas eâ ratione pertractavit, ut non solum inde dimanet ortus secundi generis curvarum (quas quidem omnes simili methodo in plano delineavit ac per species distinxit,) verum etiam ulteriorum graduum curvæ sponte quasi ex eodem fonte fluant atque deriventur. Futurum sperans, ut, si primitiæ huius factus ad illas viam sternentes operâ erit in lucem



PRÆFATIO AD LECTOREM.

emitterentur, iisq; extrema imponeretur manus, quilibet iudicaturus sit, & Literatorum commodo, & hujus Viri otio in absolvendis, quæ de Super-solidis Locis adinvenit, omni nisu à me fuisse consultum ac prospectum. Denique ut Methodi hujus Geometria dignitas splendorq; omni ex parte in aperto esset, & cuique etiam pateret ejusdem calculo demonstrationes quoque Geometricas inniti aut ex eo elici posse, quales à Veteribus introducta adhuc apud Recentiores passim in usu sunt, atque longâ propositionum serie ac lemmatum permixtione afferri solent, continuæ schematum animadversioni obnoxia: placuit coronidis loco & in operis complementum subnectere tractatum, in quo artem, iisdem Veteribus in difficiliorum hujusmodi demonstrationum compositione usitatam, occasione diversarum questionum, exponerem. ut, scilicet, his similibusq; exemplis viam præcundo, non tantum ejusmodi demonstrationes alias ex calculo facile depromi ostenderem; verum etiam hoc pacto inventionis modum, quem in majorem admirationem suorum inventorum artificiosè suppresserant, indicarem, atque Matheseos studiosos ad hujus Methodi calculum ceu demonstrationum amussim, omni ambage ac ingenii defatigatione evitata, ablegarem. Quibus quidem omnibus, si singulis satisfacere non licet, habeo saltem de quo abundè mihi gratuler, quòd nostros in hoc studiorum genere labores rerum æstimatoribus haud displicuisse nec displicere sciam. Vale. Scripsi Leida, anno reparata salutis

CLCCLIX.

# INDEX MATERIARUM, IN HAC G E O M E T R I A C O N T E N T A R U M.

## LIBER I.

De Problematis, quæ construi possunt,  
adhibendo tantum rectas li-  
neas & circulos.

**Q**uomodo computatio Arithmetica re-  
feratur ad operationes Geome-  
tricas. Pag. 1  
Quomodo Geometricè fiat Multiplicatio, Di-  
visio, & radices Quadratæ Extractio. 2  
Quo pacto notis uti liceat in Geometria. ib.  
Quomodo ad Equationes perveniendum sit,  
quæ resolvendi Problematis inserviunt. 4  
Quenam sint Problemata Plana, & quo-  
modo ipsa resolvantur. 5 & 6  
Quæstio desumpta ex Pappo. 7  
Responsum ad Quæstionem Pappi. 11  
Quomodo ponendi sint termini in hac Quæ-  
stione, ut ad Equationem deveniatur. 13  
Quo pacto cognoscatur, Problema hoc esse  
planum, quando illud in quinquæ tantum  
lineis est propositum. 15.

## LIBER II.

De natura linearum curvarum.

**Q**uenam sint curva linea, quæ in Geo-  
metriam recipi possunt. 17  
Ratio distinguendi eas in certa genera: Et  
cognoscendi relationem, quam omnia il-  
larum puncta habent ad puncta linea-  
rum rectarum. 21  
Continuatio explanationis Quæstionis, quæ  
præcedenti libro ex Pappo fuit allata. 24  
Solutio huius Quæstionis, cum ipsa in 3 aut  
4 tantum lineis est proposita. 25  
Demonstratio ejusdem solutionis. 32  
Quid intelligendum sit per loca Plana, &  
Solida: Et ratio ipsa invenienti. 34

Quenam sit prima & simplicissima linea-  
rum curvarum, Veterum Quæstioni in-  
servientium, cum ipsa Quæstio in 5 lineis  
est proposita. 35

Quenam curva linea in Geometriam sint  
recipienda, quæ describantur, inveniendo  
plura earum puncta. 38

Quanam etiam illæ sint, quæ ope filii descri-  
buntur, & ibidem recipi possunt. 39

Quid, ad inveniendum omnes linearum  
curvarum proprietates, sufficiat scire re-  
lationem, quam omnia illarum puncta  
habent ad puncta linearum rectarum, &  
modum ducendi lineas rectas, quæ ipsas  
secant in omnibus illis punctis ad angulos  
rectos. 40

Modus generalis invenendi lineas rectas,  
quæ secant datas curvas, vel earum con-  
tingentes, ad angulos rectos. ibid.

Exemplum huius operationis in Ellipsi; Et  
in Parabola secundi generis. 41 & 42

Aliud exemplum in Ellipsi secundi generis. 42  
Exemplum constructionis huius Problema-  
tis in Conchoide. 49

Explicatio quatuor generum novarum O-  
valium, Optice inservientium. 50

Proprietates harum Ovalium, concernentes,  
reflexiones & refractiones. 55

Demonstratio harum proprietatum. 57

Quomodo vitrum fieri possit, cujus una su-  
perficies tam convexa aut concava sit,  
quam libuerit, quod radios omnes, qui  
ex uno dato puncto procedunt, colligat  
rursus in altero dato puncto. 61

Quomodo aliud fieri possit, quod idem præ-  
stet, cujus convexitas unius superficiei  
datam rationem habeat ad convexita-  
tem vel concavitatem alterius. 63

Quo-



# I N D E X.

Quomodo id omne, quod hic de lineis cur-  
vis, in plana superficie descriptis, dictum  
fuit, applicari possit ad illas, quae descri-  
buntur in spatio trium dimensionum sive  
superficie aliqua curva. 65.

## LIBER III.

De constructione Problematum Soli-  
dorum, & Solida excedentium.

Quanam curva linea adhiberi possint ad  
constructionem cujusque Problematis. 67

Exemplum concernens inventionem plurium  
mediarum proportionalium. ibid.

De natura Aequationum. 69

Quot haberi possint radices in qualibet A-  
equatione. ibid.

Quanam sint falsa radices. ibid.

Quomodo diminui possit dimensionum nu-  
merus alicujus Aequationis, quando co-  
gnoscitur aliqua ex ejus radicibus. ibid.

Quâ ratione indagari queat, num data  
quantitas sit valor alicujus radices. 70

Quot haberi possint vera radices in qualibet  
Aequatione. ibid.

Quomodo faciendum sit, ut falsa radices  
Aequationis evadant vera, & versa fal-  
sa. ibid.

Quomodo augeri vel diminui possint Aequa-  
tionis radices, ipsis non cognitis. 71

Quod, augendo veras radices, falsa dimi-  
nuantur, & contra. 72

Quâ ratione secundus terminus Aequatio-  
nis tolli possit. ibid.

Quo pacto fiat ut falsa radices Aequationis  
evadant vera, nec tamen vera fiant fal-  
sa. 74

Quomodo faciendum sit, ut loca omnia  
Aequationis sint completa. ibid.

Quomodo multiplicari vel dividi possint A-  
equationis radices, ipsis incognitis. 75

Quâ ratione fracti numeri alicujus Aequa-  
tionis reducantur ad integros. ibid.

Quo pacto quantitas cognita alicujus ter-  
mini Aequationis aequalis fiat cuicunque  
alteri data. 76

Quod radices tam vere quàm falsa possint  
esse reales, vel imaginaria. ibid.

Reductio Aequationum Cubicarum, cum  
Problema est Planum. ibid.

Modus dividendi Aequationem per bino-  
mium, quod illius continet radicem. 77

Quanam Problemata sint Solida, Aequa-  
tione existente Cubicâ. 79

Reductio Aequationum quatuor dimensio-  
num, cum Problema est Planum: Et  
quanam illa sint, quae Solida sunt dicen-  
da. ibid.

Reductio Aequationis Quadrato-quadrata  
ad Cubicam. ibid.

Exemplum ostendens usum harum reductio-  
num. 82

Regula generalis reducendi Aequationes  
omnes, quae Quadrato-quadratum ex-  
cedunt. 84

Modus generalis construendi omnia Proble-  
mata Solida, reducta ad Aequationem  
trium, quatuorve dimensionum. 85

Inventio duarum mediarum proportiona-  
lium. 91

Ratio dividendi angulum in tres partes a-  
quales. ibid.

Quod omnia Solida Problemata reduci pos-  
sint ad hasce duas constructiones. 92

Modus exprimendi valorem radicum om-  
nium, Aequationum Cubicarum, ac per  
consequens illarum omnium, quae Qua-  
drato-quadratum non excedunt. 94

Cur Problemata Solida construere non possint  
absque sectionibus Conicis, nec quae ma-  
gis composita sunt sine aliis lineis, magis  
compositis. 96

Modus generalis construendi Problemata  
omnia, reducta ad Aequationem, sex di-  
mensiones non excedentem. 97

Inventio quatuor mediarum proportiona-  
lium. 104.

RENA-

RENATI DES CARTES  
GEOMETRIÆ  
LIBER PRIMVS.

*De Problematis, quæ construi possunt,  
adhibendo tantum rectas li-  
neas & circulos.*

**O**MNIA Geometriæ Problemata facile  
ad huiusmodi terminos reduci possunt,  
ut deinde ad illorum constructionem,  
opus tantum sit rectarum quarundam li-  
nearum longitudinem cognoscere.

Et quemadmodum Arithmetica to-  
ta ex quatuor aut quinque solummodo operationibus  
constat, quæ sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio,  
Divisio, & Radicum Extractio, (quæ pro quadam Di-  
visionis specie haberi potest:) Ita similiter in Geome-  
tria, quod spectat ad lineas, quæ quaruntur, præpa-  
randas, ut cognitæ fiant, aliud faciendum non est, quam  
ut vel ipsis addantur, vel ab iisdem subtrahantur aliæ;  
vel etiam si una sit, (quæ vocetur unitas, ut eò commo-  
dius ad numeros referatur, quamque communiter pro  
libitu assumere licet) atque præter hanc adhuc aliæ duæ,  
ut ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram,  
ut est altera ad unitatem, quod idem est, atque Multi-  
plicatio; vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad  
unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod con-  
venit cum Divisione; vel denique, ut inter unitatem &  
aliam quandam rectam inveniatur una, aut duæ, plu-  
resve

*Quomodo  
computa-  
tio Ari-  
thmetica  
referatur  
ad opera-  
tiones Ge-  
ometricas.*

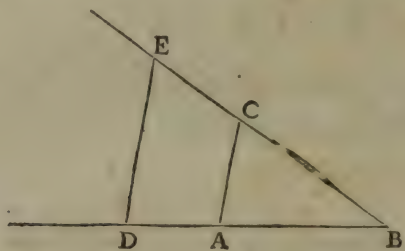
A

refve



*Quomodo  
Geometricè  
fiat.*

*Multipli-  
catio,*

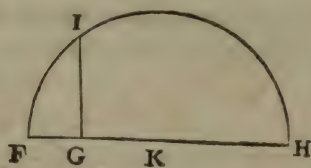


Sit, exempli gratiâ, AB unitas, oporteatque multiplicare BD per BC: jungo puncta A & C, ductâque DE parallelâ AC, erit BE productum hujus multiplicationis.

*Divisio,*

Vel si dividenda sit BE per BD, junctis punctis E & D, duco AC parallelam ipsi DE, eritque BC quotiens hujus Divisionis.

*Extractio  
radicis  
Quadrata.*



Vel denique si ex GH extrahere oporteat radicem Quadratam, adjungo ipsi in directum lineam rectam FG, quæ unitas est; divisâque FH bifariam in puncto K, cen-

tro K intervallo FK seu KH describo circulum. quo facto, erit GI, quæ ex puncto G perpendicularis ducitur super FH usque ad I, radix quæsitâ.

Nihil hîc de radice Cubicâ, nec de aliis dico, quod de iis in sequentibus commodius sim acturus.

*Quo pacto  
notis uti  
liceat in  
Geometria.*

At verò sæpe non est opus, hasce lineas ita in charta ducere, sed sufficit illas litteris quibusdam designare, singulas singulis. Vt ad addendam lineam BD lineæ GH, voco unam  $a$  & alteram  $b$ , scribôque  $a + b$ ; Et  $a - b$ , ad subtrahendam  $b$  ex  $a$ ; Et  $ab$ , ad multi-

triplicandam unam per alteram; Et  $\frac{a}{b}$ , ad dividendam  $a$  per  $b$ ; Et  $aa$ , seu  $a^2$ , ad multiplicandam  $a$  in se; Et  $a^3$ , ad eandem adhuc semel multiplicandam per  $a$ , atque ita in infinitum; Et  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , ad extrahendam radicem Quadratam ex  $a^2 + b^2$ ; Et  $\sqrt[3]{C.a^3 - b^3 + abb}$ , ad extrahendam radicem Cubicam ex  $a^3 - b^3 + abb$ , & sic de cæteris.

Vbi notandum est, quod per  $a^2$  vel  $b^3$ , similẽve, communiter, non nisi lineas omnino simplices concipiam, licet illas, ut nominibus in Algebra usitatis utar, Quadrata aut Cubos, &c. appellem.

Deinde etiam notandum, quod omnes ejusdem lineæ partes, quando unitas in quæstione non est determinata, æque multis semper dimensionibus exprimi debeant, ut hic  $a^3$  tot habet dimensiones, quot  $abb$ , aut  $b^3$ , ex quibus composita est linea, quam nominavi  $\sqrt[3]{C.a^3 - b^3 + abb}$ ; Sed hoc non est necesse, cum unitas determinata existit, quoniam illa ubique subintelligi potest, ubi vel nimis multæ, vel nimis paucæ dimensiones reperiuntur. Vt si radix Cubica sit extrahenda ex  $aaabb - b$ , cogitandum est, quantitatem  $aaabb$  semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem  $b$  bis per eandem esse multiplicatam.

Cæterum ut quis faciliẽ linearum nominum recorderetur, oportet semper illa in catalogum referre, prout supponuntur vel mutantur, scribendo exempli causâ

$AB \propto 1$ , hoc est,  $AB$  æqualis est 1, seu unitati.

$GH \propto a$

$BD \propto b$ , &c.

Resolutorus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte, ut jam factum, nominæque imponent lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessa-

*G*  
*Quomodo*  
*ad Aequa-*  
*tionis per-*  
*veniendum*



*fit, qua re-  
solvendis  
Problematis  
inserviunt.*

cessariæ videbuntur, tam iis, quæ incognitæ sunt, quàm quæ cognitæ. Deinde nullo inter lineas hæc cognitæ & incognitas factò discrimine, evolvenda est Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè pateat, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependant, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur; æquales enim sunt termini modi unius terminis modi alterius. Iam verò tot huiusmodi Æquationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ.

GG Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua Æquatio.

GGG Postea verò si plures adhuc supersint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis

H lineis; atque ita, reducendo illas, efficere oportet, ut tantum una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cuius quadratum, sive cubus, sive quadrato-quadratum, sive surde-solidum, sive quadrato-cubus, &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum, pluriùmve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitæ. Quod hoc pacto designo.

$x \propto b$ , aut

$x^2 \propto -a x + b^2$ , aut

$x^3 \propto +a x^2 + b^2 x - c^3$ , aut

$x^4 \propto +a x^3 + b^2 x^2 - c^3 x + d^4$ , &c.

Hoc

LIBER PRIMUS.

Hoc est,  $x$ , quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis ipsi  $b$ ; aut quadratum à  $x$  æquale est quadrato ex  $b$ , minus producto ex  $a$  in  $x$ ; aut cubus à  $x$  æqualis est producto ex  $a$  in quadratum ipsius  $x$ , plus quadrato ex  $b$  ducto in  $x$ , minus cubo ex  $c$ . & sic de cæteris.

Possunt autem semper quantitates incognitæ ita ad unam solam reduci, atque tum Problema construi per rectas lineas & circulos, aut per sectiones Conicas, aut denique per aliam quandam lineam, quæ nonnisi uno duobusve gradibus magis sit composita.

Sed nolo hic prolixus esse, ut hoc magis particulatim explicem, eo quod vobis voluptatem præiperem discendi id ipsum vestro Marte, & utilitatem ingenium vestrum excolendi, dum vos in eo exercetis, quæ, meo quidem iudicio, præcipua est, quam ex hac scientia percipere licet. Deinde etiam, quod nihil hic adeo difficile deprehendam, ut ab illis, qui utcunque in Geometria communi atque Algebra versati sunt, & observaturi porrò sunt, quæ tractatu hoc continentur, inveniri non possit.

Atque ideo sufficiet, Vos monere, si quis in reducendis hisce Æquationibus non omiserit uti divisionibus omnibus quæ fieri possunt, ipsum quoque infallibiliter habiturum simplicissimos terminos, ad quos quæstio reduci possit.

Iam verò si illa per Geometriam communem resolvi potest, hoc est, utendo tantum rectis lineis & circularibus, in plana aliqua superficie descriptis, postquam ultima Æquatio omnino fuerit reducta, relinquatur nil præter quadratum aliquod incognitum, æquale ei, quod provenit ex additione vel subtractione ejus radices, multiplicata per quantitatem ali-

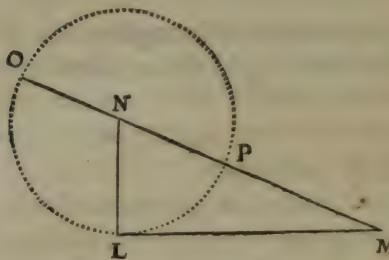
Quantum  
sint Pro-  
blemata  
Plana.



quam cognitam, & alterius cujusdam quantitatis cognitæ.

*Quomodo  
ipsa resol-  
vantur.*

Tuncque radix illa, sive incognita linea, facilè invenitur. Nam si, exempli gratiâ, habeatur



$z \propto a z + b b$ ,  
facio triangulum re-  
ctangulum N L M,  
cujus unum latus L M  
sit æquale  $b$ , radici  
videlicet quadratæ  
quantitatis cognitæ  
 $b b$ ; alterum autem  
latus L N æquale  $\frac{1}{2} a$ ,  
semissi nimirum reli-  
quæ quantitatis co-

gnitæ, quæ multiplicata est per  $z$ , quam suppono li-  
neam esse incognitam. Deinde productâ M N, base  
ejusdem trianguli, usque ad O, ita ut N O sit æqua-  
lis N L: erit tota O M æqualis  $z$ , lineæ quæsitæ. Quæ  
quidem sic exprimitur

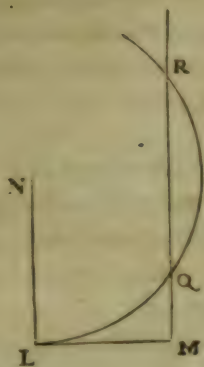
$$z \propto \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}.$$

Quòd si verò habeatur  $y y \propto - a y + b b$ , atque  $y$  sit  
quantitas, quam invenire oportet, facio rursus idem  
triangulum N L M, & à base ejus M N aufero N P, æ-  
qualem N L, eritque reliqua P M, æqualis  $y$ , radici quæ-  
sitæ. Ita ut fiat  $y \propto -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}$ . Nec aliter fit,  
si proponatur  $x^4 \propto - a x^2 + b^2$ . P M enim esset  $x^2$ , &  
haberetur  $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}}$ : atque ita de  
aliis.

Deni-

Denique si habeatur

$$xz \propto az - bb:$$



facio NL æqualem  $\frac{1}{2}a$ , & LM æqualem  $b$ , ut ante. Deinde non duco lineam per puncta M & N, ut in duobus aliis casibus, sed duco MQR parallelam ipsi LN; centroque N descripto per L circulo, secante MQR in punctis Q & R, erit MQ vel MR æqualis lineæ quæsitæ  $x$ . Hoc enim casu illa duobus mo-

dis exprimitur, nimirum  $x \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , vel etiam  $x \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ .

Quòd si circulus centrum suum habens in puncto N, N  
transiensque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat constructionem Problematis propositi esse impossibilem.

Cæterum possunt hæ ipsæ radices infinitis fermè aliis modis inveniri; sed prædictos tantum in medium asserere volui, velut admodum simplices, ut hæc ratione pateat: Problemata omnia Geometriæ communis construi posse, faciendo tantum ea pauca, quæ quatuor præcedentibus figuris exposui. Quod quidem non credo à Veteribus fuisse animadversum, cum aliàs laborem eâ de re tantos libros conscribendi non suscepissent, in quibus vel solus ordo propositionum satis nobis ostendit, quòd ipsis non constiterit vera ratio inveniendi omnes, sed quod solummodo collegerint illas, in quas fortè inciderunt.

Quod etiam ex iis, quæ Pappus initio sui septimi libri scribit, evidentissimè liquet. Vbi postquam aliquamdiu

*Quæstio  
de un pta  
ex Pappo.*



diu in recensendis illis omnibus ; quæ ab antecessoribus suis in Geometria scripta sunt, occupatus fuit, tandem de quæstione quadam loquitur, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quisquam alius penitus resolvere potuerat, his verbis :

*Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius: sed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides scripsit, per ea tantum Conica, quæ usque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, &c.*

Paulò autem post explicat, quæstionem illam esse hanc sequentem.

*At locus ad tres & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè se jactat, & ostentat, nullâ habitâ gratiâ ei, qui prius scripserat, est huiusmodi. Si positione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ: punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est, unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit: similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Si quidem igitur ad duas tantum, locus planus ostensus est. Quòd si ad plures quàm quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum unam, neque primam, & quæ manifestissima videtur, composuerunt, ostendentes utilem esse. Propositiones autem ipsarum hæc sunt.*

*Si ab aliquo puncto, ad positione datas rectas lineas, quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio solidi parallelepipedum rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur*

*tur*

tur reliquis duabus, & datâ quâpiam lineâ, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, & data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur; rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quàm sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cuiuspiam contenti quatuor lineis, ad id, quod reliquis continetur: quoniam non est aliquid contentum pluribus quàm tribus dimensionibus.

Vbi velim ut ex occasione notetis, Veteres Mathematicos, ex eo, quòd vocabulis in Arithmetica usitatis, ad operationes Geometricas significandas, liberè uti noluerint, sæpe in modos eas explicandi valde intricatos & obscuros incidisse, cujus rei non alia potuit causa esse, quàm quòd non satis accuratè perceperint, quænam sit inter illas duas scientias affinitas. Pergit enim Pappus hoc modo.

*Acquiescunt autem his, qui paulo ante talia interpretati sunt, neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes, quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportionibus hac, & dicere, & demonstrare universè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur recta linea in datis angulis, & data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, si sint septem; si verò octo, & reliqua ad reliquam: punctum continget positione datas lineas. Et similiter quotcunque sint impares vel pares multitudine; cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt, ita ut linea nota sit &c.*

Quæstio itaque quam Euclides resolvere inceperat atque Apollonius continuaverat, sed quæ à nemine fuit perfecta, erat hujusmodi.

Datis positione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis

B

lineis;



lineis; quæritur primò punctum, à quo totidem aliæ rectæ lineæ, singulæ ad singulas datarum duci possint, quæ cum ipsis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum, sub duabus contentum, datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, si sint tres; vel ad rectangulum reliquarum duarum, si sint quatuor; Aut si quinque sint, ut parallelepipedum, quod sub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod sub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data; Aut si sex sint, ut parallelepipedum sub tribus contentum datam habeat rationem ad parallelepipedum sub tribus reliquis comprehensum; Aut si sint septem, ut hoc, quod producit ex multiplicatione quatuor ductarum in se invicem, datam habeat rationem ad illud, quod ex mutua multiplicatione reliquarum trium & alia quadam data producit; Aut si sint octo, ut id, quod ex quatuor ductis inter se multiplicatis producit, datam habeat rationem ad productum ex reliquis quatuor. Atque ita porrò quæstionem hanc, ad omnem alium linearum numerum, extendere licet.

Deinde, quia semper infinita sunt puncta, quæ satisfacere possunt iis, quæ huc quærentur, requiritur insuper, ut cognoscatur atque describatur linea, in quâ illa omnia reperiantur.

Dicit autem Pappus, si tantum 3 aut 4 lineæ dentur, lineam illam tunc aliquam ex sectionibus Conicis existere. Verum non suscipit ipsam determinare neque describere, non magis quàm explicare lineas illas, in quibus quæsitæ puncta inveniri debent, quando quæstio proposita est in pluribus lineis. Tantum addit, quod Veteres unam ex illis sibi imaginati fuerint, quam ibidem utilem esse monstrarunt, sed quæ manifestissima videtur, nec tamen prima existeret. Quod occasionem mihi præ-

hi præbuit tentandi, num illâ, quâ utor, methodo, æquè longè, quàm illi pervenerunt, progredi liceret.

Primò autem inveni, quòd, dum hæc quæstio in tribus, quatuorve, aut quinque duntaxat lineis proponitur, puncta quæsitæ per simplicem semper Geometriam inveniri queant; hoc est, ut non nisi regulâ atque circino utamur; nec aliud quidquam, quàm quod jam traditum est, faciamus. Præterquam si quinque lineæ dantur, quæ omnes inter se parallelæ fuerint. Quo casu, ut & quum quæstio in 6, 7, 8, aut 9 lineis proponitur, quæsitæ puncta per Solidorum Geometriam inveniri possunt; hoc est, adhibendo, ad constructionem, aliquam ex tribus Conicis sectionibus. Excepto tantum, si novem lineæ datæ fuerint, quæ omnes inter se parallelæ existant. Quo casu, ut & quum quæstio in 10, 11, 12, aut 13 lineis proposita est, quæsitæ puncta per curvam lineam, quæ uno tantum gradu magis composita est, quàm sectiones Conicæ, inveniri possunt. Excepto in 13, quæ omnes inter se sint parallelæ. quo casu, ut & in 14, 15, 16, & 17 lineis, linea curva adhiberi debet, quæ uno gradu supra præcedentem composita est. Atque ita in infinitum.

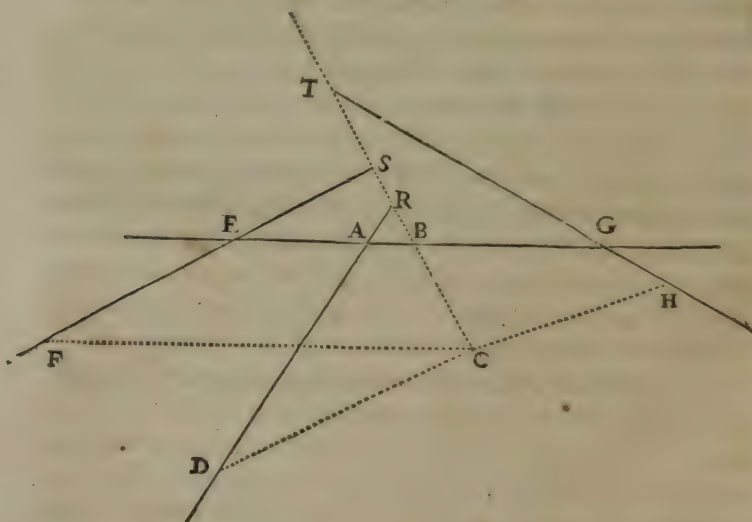
Deinde inveni quoque, si tantum tres aut quatuor lineæ datæ fuerint, quæsitæ puncta, non modo in aliquatrum Conicarum sectionum, sed interdum etiam in circuli circumferentia, aut in recta linea reperiri. Et si 5, 6, 7, aut 8 lineæ datæ fuerint, tum puncta illa incidere in aliquam ex lineis, uno gradu magis compositis, quàm sectiones Conicæ. Quarum quidem nullam, quæ ad hanc quæstionem non sit utilis, imaginari licet. Sed possunt rursus illa etiam in sectione Conica, aut in Circulo, aut linea recta reperiri. Similiter si 9, 10, 11, aut 12 lineæ datæ fuerint, reperientur hæc puncta in aliqua linea, quæ non nisi uno gradu supra præcedentes poterit esse

*Responsum  
ad Quæstio-  
nem Pappi.*



composita : quemadmodum etiam nullam earum ima-  
ginari licet, quæ ibidem utilis esse non possit. Atque  
ita porro in infinitum.

Denique prima & post Conicas sectiones simplicissima, ea est, quæ per Parabolæ & rectæ lineæ intersectionem describi potest, quemadmodum post explicabitur. Adeò ut existimem, me prorsus satisfecisse iis, quæ Pappus nobis commemorat hîc à Veteribus fuisse quæsitâ. quorum quidem demonstrationem paucis subjicere conabor. Quippe me tædet jam multa hac de re scripsisse.



Sint  $AB, AD, EF, GH, \&c.$  linear quotcunque  
positione datae, oporteatque invenire punctum, ut  $C$ ,  
a quo si ducantur totidem aliae ad positione datas, ut  
 $CB, CD, CF, \& CH$ , in datis angulis  $CBA, CDA,$   
 $CFE, CHG, \&c.$  ut hoc, quod producit ex multi-  
plicatione certarum quarundam harum linearum, sit  
aquale

æquale illi, quod producitur ex multiplicatione reliquarum; vel etiam ut unum ad alterum datam habeat rationem. id enim quæstionem difficiliorem non reddit.

Primò itaque rem ut jam factam suppono, atque ut ex harum omnium linearum confusione me expediam, considero unam ex datis, atque unam ex quæsitis, exempli gratiâ, A B & C B, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Ponendo nimirum segmentum lineæ A B, quod intra puncta A & B continetur, vocari  $x$ . B C autem vocari  $y$ . aliasque lineas datas omnes productas esse, donec secent hæc duas, etiam productas, si opus fuerit, & ipsis non sint parallelæ. quemadmodum hic apparet illas secare, lineam quidem A B in punctis A, E, & G; B C verò in punctis R, S, & T. Deinde quia omnes anguli trianguli A R B dati sunt, data quoque erit ratio, quæ est inter ejus latera A B & B R, quam pono ut  $\zeta$  ad  $b$ , ita ut, cum A B sit  $x$ , R B futura sit  $\frac{bx}{\zeta}$ , C R autem  $y + \frac{bx}{\zeta}$ : siquidem punctum B cadit inter puncta C & R; nam si R caderet inter C & B, C R esset  $y - \frac{bx}{\zeta}$ ; sin verò C caderet inter B & R, C R foret  $-y + \frac{bx}{\zeta}$ . Similiter, dantur quoque tres anguli trianguli D R C, unde & ratio, quæ est inter latera C R & C D, quam pono ut  $\zeta$  ad  $c$ : ita ut, cum C R sit  $y + \frac{bx}{\zeta}$ , C D futura sit  $\frac{cy}{\zeta} + \frac{bcx}{\zeta\zeta}$ . Postea, quia lineæ A B, A D, & E F positione datæ sunt, data quoque erit distantia puncti A à puncto E: quæ si nominetur  $k$ , habebitur E B æqualis  $k + x$ ; foret autem ipsa  $k - x$ , si punctum B caderet inter E & A; at verò  $-k + x$ , si E caderet inter A & B. Rursus, quoniam anguli trianguli E S B omnes dantur, dabitur quoque ratio lateris B E ad B S: quam si ponam esse ut  $\zeta$  ad  $d$ , B S

*Quomodo  
ponendi sint  
termini in  
hac Qua-  
stione, ut ad  
Equatio-  
nem deve-  
niatur.*

B 3.

fiat



fiet  $\frac{dk+dx}{zy-dk-dx}$ , CS verò  $\frac{zy+dk+dx}{zy-dk-dx}$ ; quæ quidem foret  $\frac{zy-dk-dx}{zy-dk-dx}$ , si punctum S caderet inter B & C; at verò  $\frac{-zy+dk+dx}{zy-dk-dx}$ , si C caderet inter B & S. Porro dantur tres anguli trianguli F S C; & consequenter ratio ipsius CS ad CF, quæ sit ut  $\chi$  ad  $e$ , unde tota CF erit  $\frac{ezy+dek+dex}{\chi\chi}$ . Eodem modo, data est AG, quam voco  $l$ , unde BG erit  $l-x$ , & quia in triangulo BGT ratio ipsius BG ad BT data est, quæ sit ut  $\chi$  ad  $f$ , erit BT  $\propto \frac{fl-fx}{\chi}$ , & CT  $\propto \frac{zy+fl-fx}{\chi}$ . Rursus, propter triangulum TCH, data est ratio ipsius CT ad CH: quæ si ponamus ut  $\chi$  ad  $g$ , habebitur CH  $\propto \frac{+gzy+fgl-fgx}{\chi\chi}$ .

Atque ita videre est, quòd, positione datis quocunque lineis, ex puncto C semper totidem aliæ ad illas duci possint in datis angulis, (juxta quæstionis tenorem;) quæ singulæ exprimantur ad summum per tres terminos; quorum quidem unus compositus sit ex quantitate incognitâ  $y$ , multiplicatâ aut divisâ per aliam quandam cognitâ; secundus verò ex incognitâ quantitate  $x$ , etiam multiplicatâ aut divisâ per aliam quandam cognitâ; ac tertius denique ex quantitate aliquâ omnino cognitâ. Excepto tantum, si datæ lineæ sint omnes parallelæ, vel lineæ AB, (quo casu terminus ex quantitate  $x$  compositus evanescet;) vel etiam lineæ CB, (quo casu terminus ex quantitate  $y$  compositus evanescet;) quemadmodum id plus satis per se manifestum est, nec prolixiori explicatione eget. Quod autem spectat ad signa + & -, quibus hi termini conjunguntur, ipsa quidem variari possunt modis omnibus, quos imaginari licet.

Deinde videre etiam licet, quòd multiplicando ita  
hasce

hasce lineas in se invicem, quantitates  $x$  &  $y$ , quæ in producto reperiuntur, singulæ non plures dimensiones habere possint, quàm extiterint lineæ, (quarum explicationi inserviunt,) quæ ita sunt multiplicatæ. Adeo ut nunquam plures duabus habituræ sint dimensiones, ubi productum illud ex duarum tantum linearum multiplicatione nascitur; nec plures tribus, cum productum illud ex trium tantum linearum multiplicatione genitum fuerit, & sic in infinitum.

Caterum quia ad determinandum punctum C una duntaxat conditio adimplenda est, nimirum ut hoc quod ex multiplicatione certi numeri harum linearum producitur sit æquale, vel (quod nihilo difficilius) datam habeat rationem ad illud quod provenit ex reliquarum multiplicatione: possumus ad libitum assumere alterutram quantitatem incognitam  $x$  vel  $y$ , atque alteram invenire per hanc Æquationem. Vbi liquet, si quæstio in quinque tantum lineis proposita fuerit, quantitatem  $x$ , quæ quidem expressioni primæ lineæ non inservit, posse semper non plures quàm duas dimensiones recipere. Ita ut, si pro  $y$  sumatur quantitas aliqua cognita, relinquatur tantum  $xx +$  vel  $-ax +$  vel  $-bb$ . Et tum quidem quantitatem  $x$  invenire poterimus regulæ atque circini beneficio, quemadmodum superius explicatum fuit. Adeoque si in infinitum alia atque alia magnitudo sumatur pro linea  $y$ , inveniatur quoque in infinitum alia atque alia pro linea  $x$ , atque ita obtinebitur infinitus numerus punctorum, cuiusmodi est punctum C, quorum ope quæsitæ curva linea describetur.

Fieri etiam potest, quum quæstio in sex aut pluribus lineis proponitur, si inter datas fuerint, quæ ipsæ A B vel B C parallelæ existant, ut una duarum quantitarum,  $x, y$ , duas tantum aut etiam unam in Æquatione dimensio-

nes

*Quo pacto  
cognoscatur,  
Problema  
hoc esse pla-  
num, quan-  
do illud in  
quinque  
tantum li-  
neis est pro-  
positum.*



nes habeat, adeò ut punctum C regulæ ac circini beneficio inveniri possit. Sed contra, si omnes sint parallelæ, etiamsi quæstio in quinque tantum lineis proposita fuerit; non poterit tamen punctum C dictâ ratione inveniri: quia, dum quantitas  $x$  nusquam in Æquatione reperitur, permissum non erit amplius pro illa, quæ  $y$  vocata fuit, quantitatem cognitam assumere, cum hæc ea ipsa futura sit, quam querere oportet. Et quandoquidem illa tres dimensiones habebit, non poterit ipsa nisi radicem ex Cubica Æquatione eliciendo inveniri. Quod quidem in genere, nisi ad id aliqua ad minimum Conica sectio adhibeatur, fieri nequit. Rursus, licet lineæ ad novem usque datae sint, dummodo non sint omnes parallelæ, semper fieri potest, ut Æquatio non altiùs quàm ad quadrato-quadratum ascendat. quare ipsa per Conicas sectiones resolvi quoque semper poterit, eo modo, quem postea sum explicaturus. Ac denique, licet habeantur usque ad 13 lineas, efficere semper possumus, ut Æquatio quadrato-cubum non excedat. Ita ut illam deinde resolvere queamus beneficio lineæ, quæ uno duntaxat gradu supra sectiones Conicas est composita, quemadmodum etiam post explicabitur. Atque hoc primum est, quod hîc eram demonstraturus; sed antequam ad secundum progrediar, opus est ut in genere aliquid de curvarum linearum natura dicam.

G E O.

## GEOMETRIÆ

## LIBER SECUNDUS.

*De natura linearum curvarum.*

**V**eteres optimè considerârunt, quòd Geometriæ *Quamvis  
sint curva  
linea, quæ in  
Geome-  
triâ recipi  
possunt.*  
Problematum alia sint Plana; alia Solida; alia  
denique Linearia; hoc est, quòd quædam eorum  
construi possint, ducendo tantùm rectas lineas & cir-  
culos; cum alia construi nequeant, nisi ad minimum  
adhibeatur Conica aliqua sectio; ac reliqua denique,  
quàm ad constructionem eorum assumatur alia quædam  
linea magis composita.

Verùm satis mirari non possum, quòd non ulteriùs  
progressi lineas hæc magis compositas in certos di-  
stinxerint gradus; neque etiam planè capio, cur illas  
potiùs Mechanicas, quàm Geometricas nominaverint.  
Etenim, si dicatur, ideo id fuisse factum, quòd instru-  
mento quodam, ad illas in plano describendas, uti opus  
sit, circuli quoque & rectæ lineæ ob eandem rationem  
rejiciendæ essent: cum absque circino & regula, quæ  
non minùs instrumenta dicenda sunt, in charta describi  
non possint. Neque etiam ideo, quòd instrumenta, quæ  
describendis illis inserviunt, utpote magis composita  
quàm regula & circinus, nequeant esse tam exacta:  
quandoquidem ob hanc rationem potiùs repudiandæ  
forent ex Mechanica, ubi tantùm accurata operis con-  
venientia, quæ à manu proficiscitur, desideratur, quàm  
ex Geometria, ubi solum spectatur exacta ratiocinatio.  
quippe quæ proculdubio, tam hæc lineas quàm illas  
concernens, æquè perfecta esse potest.

C

ea de



ea de causa, quod numerum postulatorum suorum augere noluerint; quodque contenti fuerint, modò liceret, data duo puncta rectâ conjungere lineâ, atque ex dato centro circulum describere, transeuntem per datum punctum: cum ulterius, ut de Conicis sectionibus tractarent, supponere veriti non fuerint, datum Conum dato plano secare. Vbi sanè ad describendum lineas omnes curvas, quas hîc introducere instituo, nihil aliud supponere est opus: quàm ut duarum pluriùve linearum una per alteram moveri possit, ita ut illarum intersectiones alias designent; siquidem id nihilo difficilius mihi videtur. Verum equidem est, quod sectiones Conicas non omnino in Geometriam suam receperint; neque etiam nomina, quæ usû approbata sunt, immutare volo; veruntamen evidens admodum est, ut mea fert opinio, quod, si Geometricum censeamus illud, (ut fieri solet) quod omnino perfectum atque exactum est, & Mechanicum quod ejusmodi non existit; atque Geometriam consideremus ut scientiam, quæ generaliter mensuras omnium corporum cognoscere docet, non magis ex ea excludendæ erunt lineæ maxime compositæ, quàm omnium simplicissimæ: siquidem illas, per motum aliquem continuum, aut per plures, qui se mutuò consequantur, quorumque posteriores à prioribus regantur, imaginari possumus. Hâc enim ratione exactam semper illarum mensuræ cognitionem habere licet. Verum enimverò fieri potest, ut scrupulus, quem sibi Veteres Geometræ in recipiendis lineis, magis quàm sectiones Conicæ compositis, injecerunt, fuerit, quod primæ, quas considerarunt, fortè extiterint Spiralis, Quadratrix, atque similes; quæ reverâ non nisi ad Mechanicas pertinent, nec ex illarum numero sunt, quas hîc recipiendas autumo: quandoquidem illas duobus

bus motibus describi imaginamur, qui à se invicem sunt diversi, nec ullam inter se relationem habent, quæ exactè mensurari possit. Nam licet postea examinaverint quoque Conchoïdem, Cissoïdem, & alias quasdam; tamen, quia fortè illarum proprietates non satis perspectas habuerunt, neque etiam majorem earum quam præcedentium rationem habuere. Vel etiam videntes, quòd nondum nisi pauca, quæ ad Conicas sectiones pertinerent, cognoscerent, & quòd multa illorum, quæ regulæ ac circini ope perfici possunt, quæ ignorarent, superessent, crediderunt, non oportere, ut materiam aliquam difficiliorem aggredierentur. Sed quoniam spero, quòd, qui in utendo calculo Geometrico, huc proposito, exercitati erunt, non facile quid in posterum reperiuntur sint, in quo hæreant, quòd ad Plana, & Solida Problemata attinet: confido, non è re fore, si illos ad alia investiganda, ubi ipsis nunquam materia se exercendi defutura sit, invitem.

Sunto lineæ  $AB$ ,  $AD$ ,  $AF$ , & similes, quas suppono descriptas esse ope instrumenti  $XYZ$ , quòd compositum est ex pluribus regulis, ita junctis, ut, cum illa, quæ designatur per  $YZ$ , super lineam  $AN$  immota manet, angulus  $XYZ$  aperiri claudique possit; & illo omnino clauso existente, puncta  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  omnia in punctum  $A$  cadant; Sed prout aperitur, ut regula  $BC$ , quæ ipsi  $XY$  in puncto  $B$  normaliter adfixa est, propellat versùs  $Z$  regulam  $CD$ , quæ super  $YZ$  incedit, faciens continuò cum illa angulos rectos; & rursus, ut  $CD$  propellat  $DE$ , quæ similiter super  $YX$  incedit, parallela manens ipsi  $BC$ ; deinde ut  $DE$  propellat  $EF$ ;  $EF$  verò ipsam  $FG$ ; hæcque denuo ipsam  $GH$ . Atque ita in infinitum, concipiendo semper alias atque alias, quarum successivè una





gradatim in infinitum essent compositæ; verum ut has omnes, quæ in rerum natura sunt, simul comprehendam, easque in certa genera ordine distinguam: aptius quidquam afferre nescio, quam ut dicam, quod puncta omnia illarum, quæ Geometricæ appellari possunt, hoc est, quæ sub mensuram aliquam certam & exactam cadunt, necessario ad puncta omnia linearum rectarum, certam quandam relationem habeant, quæ per æquationem aliquam, omnia puncta respicientem, exprimi possit. Et quod, cum æquatio hæc non ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut non ultra quadratum unius ex illis ascendit, linea curva tunc primi & simplicissimi sit generis; (sub quo tantum Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ:) sed quod, postquam æquatio ad tertiam aut quartam dimensionem duarum, aut unius è duabus quantitativis indeterminatis ascendit, (siquidem hic duæ ad relationem unius ad alterum punctum explicandam requiruntur) linea illa tunc secundi sit generis; & quod, prout æquatio ad quintam aut sextam dimensionem ascendit, illa tunc sit tertii generis; & sic in infinitum de aliis.

*genera; Et  
cognoscendi  
relationem,  
quam o-  
mnia illa-  
rum puncta  
habent ad  
puncta li-  
nearum re-  
ctarum.*

Vt si scire cupiam cujus generis sit linea E C, quam suppono descriptam esse per intersectionem regulæ G L & plani rectilinei C N K L; cujus latus K N indefinite productum est versus C; quodque, dum movetur supra planum deorsum in recta linea, (hoc est, ut diameter ejus K L perpetuò adplicata reperiatur alicubi linearum B A, utrinque indefinite continuatarum,) facit, ut regula G L rotetur circa punctum G, quoniam ipsi continuò sic admovetur, ut simul quoque semper transeat per punctum L: eligo rectam aliquam lineam, veluti A B, ut ad diversâ ejus puncta referam omnia puncta

C 3

hujus





NL parallelam ipsi GA, quam voco  $c$ . Tum dico, ut NL est ad LK, vel  $c$  ad  $b$ , ita CB, vel  $y$ , est ad BK, quæ ideo erit  $\frac{by}{c}$ : ac proinde  $BL \frac{by}{c} - b$ , &  $AL x + \frac{by}{c} - b$ . Denique ut CB est ad BL, vel  $y$  ad  $\frac{by}{c} - b$ , ita est GA, vel  $a$ , ad LA, vel  $x + \frac{by}{c} - b$ . adeò ut, si multiplicem secundam lineam per tertiam, producat  $\frac{aby}{c} - ab$ , quod æquale erit  $xy + \frac{by^2}{c} - by$ , ei scilicet, quod producitur multiplicando primam lineam per ultimam. Atque ita æquatio, quæ invenienda erat, est hujusmodi,  $y^2 \propto cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$ . Ex qua cognoscitur, lineam EC esse primi generis, quemadmodum A illa re ipsâ nulla alia est quam Hyperbola.

Quod si in instrumento, quod ipsi describendæ infervit, loco rectæ lineæ CNK sumatur inventa hæc Hyperbola, aut alia quæpiam primi generis curva lineæ, quæ planum terminet CNKL; intersectio hujus lineæ & regulæ GL, loco Hyperbolæ EC, aliam curvam describet, quæ secundi erit generis. Vt si CNK fuerit Circulus, cujus centrum L, describetur prima Conchoïdes Veterum; & si Parabola fuerit, cujus diameter KB, describetur curva lineæ, quam paulò ante dixi primam esse ac simplicissimam pro quæstione Pappi, cum quinque tantum lineæ positione datæ sunt. Sed si loco alicujus harum linearum primi generis sumatur quædam secundi, quæ terminet planum CNKL, describetur ejus ope alia tertii generis; aut si quædam tertii generis sumatur, describetur aliqua quarti, & sic in infinitum. Vt facillè ex calculo est cognoscere. Et sanè quocunque tandem modo curvæ alicujus lineæ descriptionem quis imaginatus fuerit, modò ipsâ ex illarum numero, quas Geometricas voco, extiterit, poterit sem-

*Vide Pappum ad prop. 22. lib. 4. & Eutocium in commentariis in secundo. librum Archimedis de sphaera & cylindro.*



rit semper inveniri æquatio, quâ omnia ejus puncta hâc ratione determinantur.

Cæterum lineas curvas, quæ faciunt ut æquatio hæc ad Quadrato-quadratum adscendat, ejusdem generis esse pono cum illis; quæ ipsam tantum ad Cubum perducunt. Atque illas, quarum æquatio ad Quadrato-cubum adscendit, ejusdem generis cum illis, quæ ipsam tantum ad Surdesolidum perducunt. Et sic de cæteris.

Cujus rei ratio est, quod generalis regula habeatur reducendi ad Cubum difficultates omnes, quæ ascendant ad Quadrato-quadratum; & ad Surdesolidum omnes illas, quæ ascendant ad Quadrato-cubum, ita ut magis compositæ censeretur non debeant.

Notandum autem est, quod inter lineas cujusque generis, licet major pars æqualiter sit composita, ita ut ad eorundem punctorum determinationem servire possint, atque ad eadem Problemata construenda; tamen quædam illarum sint, quæ simpliciores existant, quæque non tantam in sua potentia extensionem habeant. Ut, inter lineas primi generis, præter Ellipsin, Hyperbolam, & Parabolam, quæ æqualiter sunt compositæ, etiam Circulus est comprehensus, qui manifestò simplicior est. Et inter illas secundi generis, numeratur quoque Conchoïdes vulgaris, quæ suam originem ex Circulo ducit; quemadmodum & aliæ præterea reperiuntur, quæ, etiamsi non tantam extensionem habeant, quantam maxima illarum pars, quæ ejusdem generis sunt, tamen inter lineas primi generis poni non possunt.

*Continuatio  
explicatio-  
nis quæstio-  
nis, quæ  
præcedenti  
libro ex  
Pappo fuit  
allata.*

Reductis igitur curvis lineis ad certa genera, facile erit progredi in demonstratione responsi, quod paulò ante dedi ad quæstionem Pappi. Primum enim, cum supra ostenderim, quod, quando tantum 3 aut 4 lineæ rectæ dantur, æquatio, quæ ad quæsitâ puncta determi-  
nanda

nanda infervit, non ultra quadratum ascendat: evidens est, lineam curvam, in qua hæc puncta reperiuntur, necessariò aliquam esse primi generis: quandoquidem hæc æquatio relationem, quam omnia linearum primi generis puncta habent ad puncta lineæ rectæ, explicat. Et quòd, cum non plures quàm 8 lineæ rectæ datæ sunt, æquatio hæc tum ad summum non ultra Quadrato-quadratum ascendat, ac per consequens quæsitæ lineæ non nisi secundi aut inferioris generis esse possit. Et quòd, cum non plures quàm 12 lineæ rectæ datæ sunt, æquatio tum non ultra Quadrato-cubum ascendat, ac per consequens, quæsitæ lineæ solummodo tertii aut inferioris generis existat. Atque ita de reliquis. Quin etiam, quoniam datarum rectarum positio omnifariam variari potest, & per consequens mutare tam quantitates cognitæ, quàm signa  $+$  &  $-$  ipsius æquationis, modis omnibus, quos sibi quis imaginari queat: evidens est, nullam primi generis curvam lineam reperiri, quæ ad hanc quæstionem non sit utilis, quando illa in 4 lineis est proposita; neque ullam secundi, quæ ibidem non inferviat, quando illa in 8 lineis est proposita; neque etiam ullam tertii, quando illa in 12 lineis est proposita. Et sic de reliquis.

Adeò ut nulla curva lineæ; quæ sub calculum cadit, atque in Geometriam recipi potest, reperiatur, quæ ibidem ad aliquem linearum numerum non sit utilis.

Sed oportet ut de his specialiùs agam, atque rationem inveniendi lineam quæsitam, cuilibet casui insertentem, exhibeam, quando tantum 3 aut 4 lineæ datæ sunt; atque eadem operâ videbitur, quòd primum linearum curvarum genus alias nullas, præter tres Sectiones Conicas & Circulum, complectatur.

*Solutio huius quæstionis, cum ipsa in 3 aut 4 tantum lineis est proposita.*

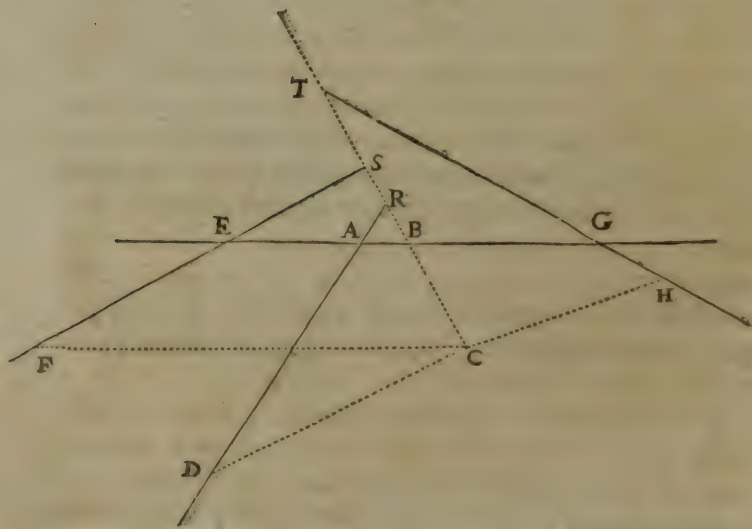
Repetamus itaque quatuor lineas AB, AD, EF, &  
D GH,



GH, superiùs datas, oporteatque aliam invenire lineam, in quâ infinita reperiantur puncta, quale est C, unde si ducantur quatuor lineæ CB, CD, CF, & CH, in datis angulis ad positione datas: ut CB multiplicata per CF tantundem producat ac CD multiplicata per CH. hoc est, positâ  $CB \propto y$ ,  $CD \propto \frac{czy + dex}{zz}$ ,  $CF \propto \frac{exy + dek + dex}{zz}$ , &  $CH \propto \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$ : æquatio erit

$$yy \propto \frac{-dekzz}{+cglzz} y \frac{-dexzz}{-cglzz} \left\{ y + \frac{bcfglx}{-bcfgxx} \right\}$$

$$\frac{ezy^3 - cglzz}{ezy^3 - cglzz}$$



- B Saltem si supponamus quantitatem  $e\zeta$  majorem quàm  $e g$ . nam si minor foret, mutanda essent omnia signa  $+$  &  $-$ . Vnde si in hac æquatione quantitas  $y$  nulla sit, aut minor quàm nihil, postquam punctum C supposuimus in angulo D A G, oporteret & illud supponere in angulo D A E.
- EB

DAE, aut EAR, aut etiam RAG, mutando signa + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quod si verò in quatuor hisce positionibus valor ipsius  $y$  nullus reperiretur, indicio esset, quæstionem casu proposito esse impossibilem. Sed supponamus illam hic possibilem esse, & ad abbreviandum ejus terminos, loco quantitatum  $\frac{efglz - dekz}{ez^2 - egz}$  scribamus  $^2m$ , & loco  $\frac{dez + efgz - begz}{ez^2 - egz}$  scribamus  $^2n$ ; sicque habebimus  $yy \propto 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^2 - egz}$ , cujus æquationis radix est

$$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^2 - egz}}$$

Rursus autem abbreviandi causâ, pro  $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^2 - egz}$  scribamus  $o$ , & pro  $\frac{nn}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^2 - egz}$  scribamus  $\frac{p}{m}$ . Cum enim quantitates hæ omnes datæ sint, illas, ut placuerit, nominare possumus. Atque ita habebimus

$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$ . quæ longitudo esse debet lineæ BC, relinquendo AB, seu  $x$ , indeterminatam.

Vbi patet, si quæstio in tribus aut quatuor tantum lineis est proposita, semper ejusmodi terminos inveniri posse; præterquam quod quidam ex illis interdum abesse possint, signaque + & — diversimodè mutari.

His peractis, duco KI parallelam & æqualem ipsi AB, ita ut ex BC segmentum auferat BK, æquale ipsi  $m$ : quandoquidem hic habetur +  $m$ ; quod quidem aliàs addidissem ipsi BC, ducendo hanc lineam IK ad alteram partem, si illic fuisset —  $m$ ; eamque nullo modo duxissem, si quantitas  $m$  prorsus defuisset. Deinde duco IL, ita ut linea IK sit ad KL, sicut  $z$  ad  $n$ . hoc

D 2

est,





figno  $+$  notatis,  $oo$  fuisset æqualis  $4pm$ , sive etiam termini  $mm$  &  $ox$ , aut  $ox$  &  $\frac{p}{m}xx$  nihilo fuissent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidisset, quæ quidem inventu difficilior non fuisset quàm IL. Sed si hoc non fiat, punctum C reperietur cc semper in aliqua trium Conicarum sectionum, aut in Circulo, cujus una ex diametris sit in linea IL, & linea LC una ex iis, quæ ad hanc diametrum ordinatim adplicantur; vel contra, LC erit parallela diametro, ad quam illa, quæ est in linea IL, ordinatim adplicatur. Nimirum, si terminus  $\frac{p}{m}xx$  non reperiat, erit Conica hæc sectio Parabola; at verò si denotetur signo  $+$ , erit Hyperbola; ac denique si signo  $-$ , erit Ellipsis. Excepto tantum, cum quantitas  $amm$  est æqualis quantitati  $pzz$ , & angulus ILC rectus: quo casu, loco Ellipsis Circulus obtinebitur.

Quòd si hæc sectio Parabola existit, latus rectum æquale erit  $\frac{oz}{a}$ , diametérque semper in linea IL. atque ad inveniendum punctum N, quod illius vertex est, oportebit IN æqualem sumere  $\frac{amm}{oz}$ ; ita ut punctum I cadat inter L & N, si termini fuerint  $+mm+ox$ ; aut etiam, ut punctum L cadat inter I & N, si illi fuerint  $+mm-ox$ ; aut denique ut N cadat inter I & L, si habeatur  $-mm+ox$ . Sed nunquam illic haberi potest  $-mm$ , eo modo, quo termini hîc sunt positi. Postremò verò punctum N erit idem quod punctum I, ccc si quantitas  $mm$  nulla sit. Quâ quidem ratione inde facile est invenire hanc Parabolam per Problema  $1^{um}$  primi libri Conicorum Apollonii.

Quòd si quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis, aut denique Hyperbola, oportet primò invenire punctum

D 3

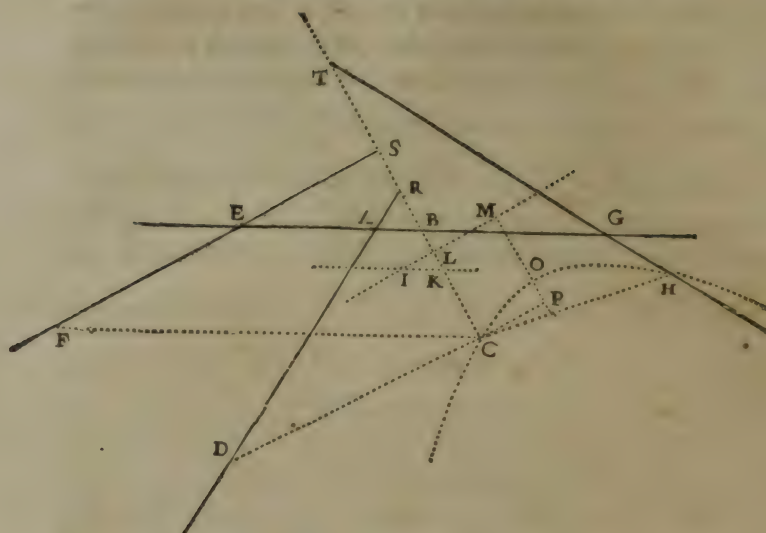




aut Ellipsis, & habetur  $-mm$ ; vel etiam quando Hyperbola, & quantitas  $oo$  major est quàm  $4mp$ , & cum habetur  $+mm$ . Quòd si verò quantitas  $mm$  non reperiatur, latus hocce rectum erit  $\frac{ox}{a}$ , & si  $ox$  nulla sit, id ipsum erit  $\sqrt{\frac{4mpz}{aa}}$ . Deinde ad inveniendum latus transversum, debet inveniri linea, quæ sit ad hoc latus rectum, ut  $aa$  ad  $pzz$ , nimirum si latus hocce rectum statuatur  $\sqrt{\frac{ooz}{aa} + \frac{4mpz}{aa}}$ , transversum erit  $\sqrt{\frac{3aaomm}{ppzz} + \frac{4aam}{pzz}}$ . Atque in omnibus hisce casibus sectionis diameter erit in linea  $IM$ , eritque  $LC$  una earum, quæ ad ipsam ordinatim adplicantur. Ita ut, si fecerimus  $MN$  æqualem dimidio lateris transversi, atque illam ex eadem parte puncti  $M$  sumptærimus quàm punctum  $L$ , habebitur punctum  $N$  pro vertice ipsius diametri. Vnde porro facilè est dictam sectionem invenire, per 1<sup>um</sup> & 3<sup>ium</sup> Problema 1<sup>mi</sup> Libri Conicorum Apollonii.

Sed si sectione Hyperbolæ existente, habeatur  $+mm$ ; & quidem quantitas  $oo$  nulla sit, aut minor quàm  $4mp$ ; oportebit ex centro  $M$  lineam ducere  $MOP$  parallelam ipsi  $LC$ , nec non  $CP$  ipsi  $LM$ , atque  $MO$  æqualem facere  $\sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$ ; aut etiam æqualem  $m$ , si non reperiatur quantitas  $ox$ . Deinde considerare oportebit punctum  $O$  tanquam verticem Hyperbolæ, cujus diameter sit  $OP$ , & linea  $CP$ , quæ ad illam sit ordinatim adplicata, cujusque latus rectum sit  $\sqrt{\frac{4a+mm}{ppz} - \frac{aaomm}{p^2z}}$ , transversum verò  $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$ . Excepto tantum cum  $ox$  nulla est: siquidem eo casu latus rectum  
sit





fit  $\frac{2asm}{pzz}$ , & transversum  $2m$ . Ita ut inde facile sit illam invenire per 3<sup>tium</sup> Problema 1<sup>mi</sup> libri Conicorum Apollonii.

*Demonstratio  
ejusdem  
solutionis.*

Quorum quidem demonstrationes perspicuæ sunt. Etenim, si componatur spatium aliquod ex quantitativibus, quas recto & transverso lateri assignavi, atque etiam segmento diametri NL, vel OP, juxta sensum 1<sup>1mi</sup>, 1<sup>2mi</sup>, & 1<sup>3<sup>ti</sup></sup> Theorematum primi libri Conicorum Apollonii, invenientur iidem omnes termini, ex quibus compositum est quadratum lineæ CP, vel CL, quæ huic diametro ordinatim est adplicata. Vt in hoc exemplo, auferendo IM, quæ est  $\frac{asm}{2pz}$ , ab NM, quæ est  $\frac{am}{2pz} \sqrt{oo + 4mp}$ , relinquitur IN; cui si addatur IL, quæ est  $\frac{a}{z}x$ , fit summa NL; quæ ideo erit

$$\frac{a}{z}x -$$

$\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{oo+4mp}$ . Hæc autem multipli-  
 cata per  $\frac{a}{z}\sqrt{oo+4mp}$ , quæ est figuræ latus rectum,  
 provenit  $x\sqrt{oo+4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + \frac{moo}{2p}$   
 +  $2mm$ , pro rectangulo. A quo auferendum est spa-  
 tium, quod sit ad quadratum ex NL, ut latus rectum  
 ad latus transversum. Hinc cum quadratum ex NL  
 sit  $\frac{aa}{zz}xx - \frac{aam}{pzz}x + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo+4mp} + \frac{aaoomm}{2ppzz} +$   
 $\frac{aam}{pzz} - \frac{aaoomm}{2ppzz}\sqrt{oo+4mp}$ , oportebit id ipsum divi-  
 dere per  $aam$ , & multiplicare per  $pzz$ , propterea quod  
 hi termini rationem, quæ est inter latus transversum &  
 rectum, explicent, fietque  $\frac{p}{m}xx - ox + \sqrt{oo+4mp} +$   
 $\frac{oom}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo+4mp} + mm$ . Hoc ergo si auferatur ex  
 rectangulo præcedenti, invenietur  $mm + ox - \frac{p}{m}xx$ ,  
 pro quadrato lineæ CL: quæ proinde una est ex ordi-  
 natim adplicatis in Ellipsi, aut Circulo, ad segmentum  
 diametri NL.

Iam verò si datas omnes quantitates numeris velimus  
 explicare, ponendo, exempli gratiâ, EA  $\propto 3$ , AG  $\propto 5$ ,  
 AP  $\propto$  BR, BS  $\propto \frac{1}{2}$  BE, GB  $\propto$  BT, CD  $\propto \frac{1}{2}$  CR,  
 CF  $\propto 2$  CS, CH  $\propto \frac{1}{2}$  CT; & quod angulus ABR  
 sit 60 graduum; ac denique quod rectangulum sub dua-  
 bus lineis CB & CF, sit æquale rectangulo sub duabus  
 reliquis CD & CH; (quandoquidem hæc omnia data  
 requiruntur, ut quæstio sit penitus determinata;) &  
 quod præterea AB sit  $\propto x$ , & CB  $\propto y$ : inveniemus per  
 modum, supra explicatum,  $yy \propto 2y - xy + 5x - xx$ ,  
 $\phi y \propto 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1+4x} - \frac{3}{4}xx$ : Ita ut BK fieri de-  
 beat

E

beat



beat  $I$ , &  $KL$  semissis ipsius  $KI$  vel  $AB$ . Cumque angulus  $IKL$  sit  $60$  graduum, angulus  $ILK$  erit rectus. Quoniam autem  $IK$  seu  $AB$  vocata est  $x$ ,  $KL$  erit  $\frac{1}{2}x$ ,  $IL$  verò  $x\sqrt{\frac{3}{4}}$ ; & quantitas, quæ paulò ante nominabatur  $\zeta$ , erit  $1$ ; quæ autem  $a$ , erit  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ; quæ  $m$ , erit  $1$ ; quæ  $o$ , erit  $4$ ; & quæ appellabatur  $p$ , erit  $\frac{3}{4}$ : ita ut habeatur  $\sqrt{\frac{16}{3}}$  pro  $IM$ , &  $\sqrt{\frac{19}{3}}$  pro  $NM$ . Et quia  $aam$ , quæ est  $\frac{3}{4}$ , hic æquatur  $p\zeta\zeta$ , atque angulus  $ILC$  est rectus, linea curva  $NC$  invenitur esse circulus. Eodem modo reliqui casus omnes faciliè examinari possunt.

*Quid intelligendum sit per loca Plana, & Solida; Et ratio ipsa inveniendi.*

Cæterum, quia æquationes, quæ ultra Quadratum non ascendunt, omnes in eo sunt comprehensæ, quod jam explicavi; non solum Veterum Problema in 3 & 4 lineis hic penitus ad finem perductum est; sed etiam illud, quod ad id, quod Solidorum Locorum Compositionem vocabant, pertinet; adeoque etiam locorum  
 F Planorum, cum illa in Solidis contineantur. Quippe hæc loca nihil aliud sunt, quam cum in quæstione aliqua est inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipsa prorsus sit determinata. Quemadmodum in hoc exemplo, ubi omnia ejusdem lineæ puncta pro eo accipi possunt, quod est quæsitum. Etenim lineâ illâ existente rectâ aut circulari, locus vocatur Planus. At si illa est Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis, tum locus ille nominatur Solidus. Quotiescunque autem id evenit, potest perveniri ad æquationem, quæ duas quantitates incognitas continet, quæque alicui ex illis, quas jam resolvi, similis existit. Quod si verò linea, quæ sic quæsitum punctum determinat, uno gradu magis quam sectiones Conicæ sit composita, ipsam eodem modo locum Surfolidum appellare licebit, atque ita  
 G de cæteris. At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud

Id reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut sphærica, aut magis composita esse potest. Verum summus scopus, quem sibi in hac materia Veteres præfixere, fuit, ut ad Solidorum Locorum compositionem pervenirent; Et verisimile est, omne illud, quod Apollonius de Conicis sectionibus scripsit, eò tantum, ut illam indagaret, respexisse.

Præterea apparet etiam, illud, quod pro primo linearum curvarum genere sumpsi, non posse alias ullas præter Circulum, Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsum complecti. Quod quidem id omne est, quod demonstrare susceperam.

Quod si Veterum quæstio in 5 lineis est proposita, quæ omnes sunt parallelæ; evidens est, quæsitum punctum semper in linea recta fore. Sed si in 5 lineis proposita fuerit, ita ut 4 illarum sint parallelæ, & quæ à quinta ad angulos rectos secantur; tum etiam, ut linearum omnes à quæsito puncto ad angulos rectos illis occurrant; ac demum ut parallelepipedum ex tribus lineis ita ductis ad tres ex iis, quæ parallelæ sunt, sit æquale parallelepipedo ex duabus ad reliquas ductis, & ex tertia quadam data linea: (qui, ut videtur, post præcedentem simplicissimus casus est, quem quis concipere potest:) punctum quæsitum cadet in lineam curvam, quæ motu Parabolæ describitur, quemadmodum superius est explicatum.

*Quæram sit  
prima &  
simplicissi-  
ma linea-  
rum curva-  
rum, Vete-  
rum qua-  
stioni infer-  
rentium,  
cum ipsa  
quæstio in 5  
lineis est  
proposita.*

Sint, exempli gratiâ, datæ linearum  $AB$ ,  $IH$ ,  $ED$ ,  $GF$ , &  $GA$ ; & oporteat invenire punctum  $C$ ; ita ut, ducendo  $CB$ ,  $CF$ ,  $CD$ ,  $CH$ , &  $CM$  ad angulos rectos ad positione datas, parallelepipedum ex tribus  $CF$ ,  $CD$ , &  $CH$  compositum, sit æquale parallelepipedo composito ex duabus reliquis  $CB$ ,  $CM$ , & tertia data linea, quæ sit  $AI$ .

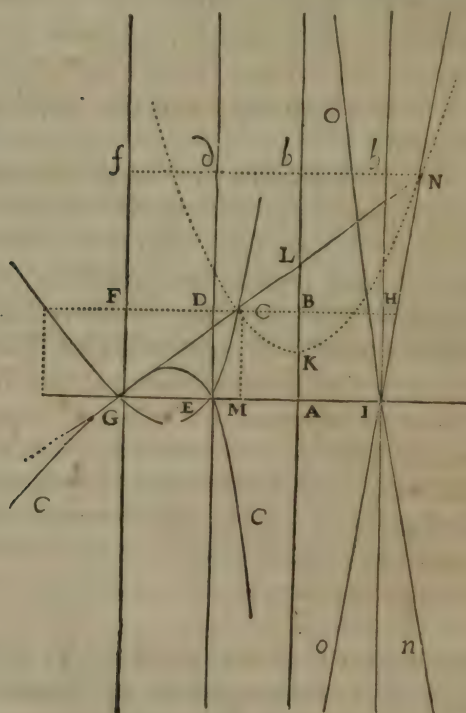
E 2

Pono



Pono  $CB \propto y$ ,  $CM \propto x$ ,  $AI$  vel  $AE$  vel  $GE \propto a$ ; ita ut, existente puncto  $C$  inter lineas  $AB$  &  $DE$ , habeam  $CF \propto 2a - y$ ,  $CD \propto a - y$ , &  $CH \propto y + a$ ; & multiplicando hæc tres in se invicem, habeam  $y^3 - 2a yy - aay + a^3$ , æquale producto trium reliquarum, quod est  $axy$ .

Post hæc considero lineam curvam  $CEG$ , quam



imaginor descriptam esse per intersectionem Parabolæ  $CKN$ , interea dum movebatur in linea recta  $AB$ , atque secabatur à regula  $GL$ , rotata circa punctum  $G$ , semperque transeunte per punctum  $L$ , in plano Parabolæ.

bolæ. Et facio  $KL \propto a$ , latusque principale, hoc est, quod ad axem Parabolæ pertinet, itidem æquale  $a$ ,  $GA$  verò  $\propto 2a$ ,  $CB$  seu  $MA \propto y$ , &  $CM$  seu  $AB \propto x$ . Deinde propter similitudinem triangulorum  $GMC$  &  $CB L$ ,  $GM$  seu  $2a - y$  est ad  $MC$  seu  $x$ , ut  $CB$  seu  $y$  ad  $BL$ , quæ ideo est  $\frac{xy}{2a - y}$ . Vnde cum  $LK$  sit  $a$ ,  $BK$  erit  $a - \frac{xy}{2a - y}$ , seu  $\frac{2aa - xy - xy}{2a - y}$ . Denique, quoniam eadem  $BK$ , quæ diametri Parabolæ est segmentum, se habet ad  $BC$ , quæ ipsi ordinatim est adplicata, ut  $BC$  se habet ad latus rectum, quod est  $a$ : calculus monstrat, quod  $y^3 - 2a y^2 - aay + 2a^3$  æquabitur  $axy$ , & per consequens, quod punctum  $C$  erit illud, quod quærebatur. Quod quidem, ubicunque libuerit, in linea  $CEG$  assumi potest; vel etiam in ejus adjuncta  $eEGe$ , quæ eodem modo describitur; præterquam quod Parabolæ vertex versùs alteram partem vergat; vel denique in earundem oppositis  $NI\theta$ ,  $nIO$ , quæ per intersectionem, quam linea  $GC$  facit in altero Parabolæ latere  $KN$ , describuntur.

Iam verò etiam si datæ parallelæ  $AB$ ,  $IH$ ,  $ED$ , &  $GF$  non æqualiter inter se distantes essent, nec  $GA$  ipsas ad rectos angulos secaret, neque etiam lineæ à puncto  $C$  ad easdem ductæ; tamen non minùs hocce punctum  $C$  reperiretur semper in linea curva, quæ ejusdem esset naturæ. Quemadmodum id etiam aliquando contingere potest, licet nullæ ex datis lineis sint parallelæ. Sed quando ita quatuor parallelæ sunt, & quinta easdem secans; & quidem parallelepipedum ex tribus, à quæsito puncto ductis, quarum una super quintam cadat, & aliæ duæ super duas ex parallelis, æquetur parallelepipedo sub duabus ad duas reliquas parallelas, & tertia quadam data linea: punctum quæsitum

E 3

repe-



reperietur in linea curva, quæ alterius erit naturæ. scilicet in una, cujus omnes ordinatim adplicate ad diametrum æquales sunt ordinatim adplicate ad diametrum sectionis Conicæ, cujusque segmenta diametri inter verticem & ordinatim adplicate interjecta, eandem rationem habent ad datam aliquam lineam, quam hæc ipsa ad similia diametri segmenta sectionis Conicæ, quibus illæ lineæ ordinatim sunt adplicate. Neque asseverare ausim, hanc lineam non simpliciorē esse præcedenti; quam tamen pro prima sumendam putavi: propterea quòd descriptio ejus ac calculus aliquo modo sint faciliores.

Quod ad lineas attinet, quæ reliquis casibus inferiunt, non immorabor iis per species distinguendis, neque enim omnia dicere suscepi: Sed quia modum inveniendi infinita puncta, per quæ transire debent, explicui, simul modum, quo describendæ sunt, me satis ostendisse puto.

*Quenam  
curva linea  
in Geometria  
sint  
recipienda,  
quæ descri-  
buntur in-  
veniendi  
plura ea-  
rum pun-  
ctat.*

Ac proinde non è re fuerit, huc considerare, magnum esse discrimen, inter hunc modum inveniendi plura puncta, ad describendam aliquam curvam lineam, atque illum, quo utimur in descriptione Spiralis & similibus. Quandoquidem hoc posteriore modo, non indifferenter omnia quæsitæ lineæ puncta inveniuntur, sed tantum ea, quæ per mensuram aliquam simpliciorē determinari possunt, quàm est ea, quæ ad illam componendam requiritur. Atque ita propriè loquendo nullum ex ejus punctis invenitur, hoc est, nullum eorum, quæ ipsi ita propria sunt, ut non nisi per illam inveniri possint. Sed è contra nullum habetur punctum in lineis, quæ quæstioni propositæ inserviunt, quod non inter illa, quæ modo supra explicato determinantur, inveniri queat. Cum autem modus describendi lineam curvam,

curvam, indifferenter plura ejus puncta inveniendò, ad illas tantum se extendat, quæ itidem per motum aliquem ordinatum & continuum describi possunt, non erit is omnino à Geometria rejiciendus.

Quemadmodum non magis etiam ex ea rejiciendus est modus, in quo filo seu chorda complicata utimur, ad determinandam summam vel differentiam duarum pluriusve linearum rectarum, quæ à quolibet quavisitæ curvæ puncto duci possunt ad certa quædam alia puncta, vel lineas in certis angulis, sicut in Dioptrica fecimus, ad explicandam Ellipsin & Hyperbolam. Nam licet in Geometria nullæ lineæ, quæ chordis similes videntur, hoc est, quæ modò rectæ, modò curvæ sunt, recipi possint; (cum ratio, quæ inter rectas & curvas existit, non cognita sit, nec etiam ab hominibus (ut arbitror) cognosci queat; nihilque inde, quod exactum atque certum est, concludere possimus;) Tamen, quia non aliter chordis illis in dictis constructionibus utimur, quàm ut earum beneficio lineas rectas determinemus, quarum longitudo exactè cognoscitur, efficere hoc non debet ut rejiciantur.

Iam verò ex hoc solo, quòd scitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem supra explicavi; facile quoque est invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoscere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit specialio rem vel simplicio rem quàm ad alia: atque ita imaginari diversos modos illas describendi, ex quibus facilio res eligi possunt. Immo verò, potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spaciū, quod comprehendunt, magnitudinem

*Qua etiam  
illa sunt, in  
que sibi in-  
feruntur,  
& ibidem  
recipi pos-  
sunt.*

*H  
Quid, ad  
invenien-  
dum omnes  
linearum  
curvarum  
proportiones,  
possit fieri  
relatio, quæ  
vni-  
us illarum  
puncta ha-  
bent ad pun-  
cta linea-  
rum recta-  
rum; &*

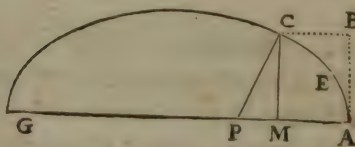


*modum ducendi lineas rectas, quas ipsas secant in omnibus illis punctis ad angulos rectos.*

I

nem spectat: ita ut non opus sit de his agere apertius. Et denique quantum ad omnes reliquas proprietates, quas lineis curvis attribuire possumus, ipsæ tantummodo ab angulorum, quos cum certis quibusdam aliis lineis efficiunt, amplitudine dependent. Sed si lineæ rectæ duci possint, quæ illas in punctis, ubi aliæ, cum quibus angulos faciunt, quos mensurare volumus, ipsis occurrunt, secant ad angulos rectos, vel, quod hic pro eodem haberi volo, quæ earum contingentes secant: magnitudo horum angulorum non erit inventu difficilior, quàm si à duabus rectis lineis comprehensi essent. Atque ideo confidam, me exposuisse hic omnia illa, quæ pro curvarum linearum elementis requiruntur, postquam generalem modum ducendi rectas lineas, quæ eas ad rectos angulos in quibusvis ipsarum punctis secant, ostendero. Nec verebor dicere, Problema hoc, non modò eorum, quæ scio, utilissimum & generalissimum esse; sed etiam eorum, quæ in Geometria scire unquam desideraverim.

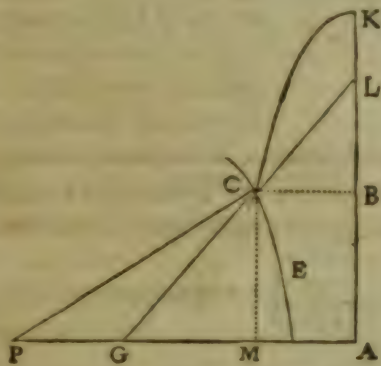
K  
*Modus generalis inveniendi lineas rectas, quæ secant datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos.*



Sit CE linea curva, oporteatque per punctum C rectam lineam ducere, facientem cum ipsa angulos rectos.

Suppono rem tanquam jam factam, lineamque quæ sitam esse CP, quam produco usque ad punctum P, ut occurrat rectæ GA, quam suppono illam esse, ad cuius puncta referenda sunt puncta omnia lineæ CE: ita ut faciendo MA seu CB  $\propto y$ , & CM seu BA  $\propto x$ , habeam æquationem aliquam, quæ mihi relationem, quæ est inter  $x$  &  $y$ , explicet. Deinde facio PC  $\propto s$ , & PA  $\propto v$ , seu PM  $\propto v - y$ . Vnde propter triangulum

lum rectangulum P M C invenio  $ss$ , quod est quadratum basis, æquale  $xx + vv - 2vy + yy$ , quadratis duorum laterum, hoc est, invenio  $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ , aut  $y \propto v - \sqrt{ss - xx}$ . Cujus æquationis ope aufero ex æquatione altera, (quæ mihi relationem explicat, quam puncta curvæ C E habent ad puncta rectæ G O) alterutram è duabus quantitatibus indeterminatis  $x$  vel  $y$ . Quod quidem facile est, si ubique pro  $x$  ponamus  $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ , & quadratum hujus summæ pro  $xx$ ,



& ejus cubum pro  $xx^3$ , & ita porro; si fuerit  $x$ , quam tollere velimus; aut si fuerit  $y$ , ponendo ejus loco  $v - \sqrt{ss - xx}$ , & quadratum, cubumve, &c. hujus summæ, loco  $yy$ , aut  $y^3$ , &c. Ita ut inde semper restet æquatio, in qua non nisi una habeatur quantitas

indeterminata  $x$ , vel  $y$ .

Quemadmodum si C E est Ellipsis, in qua M A sit segmentum diametri ad quam C M sit ordinatim adplicata, quodque pro latere recto habeat  $r$ ; pro transverso autem  $q$ : fiet per 13<sup>ium</sup> Theorema 1<sup>mi</sup> libri Conicorum Apollonii:  $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$ . Vnde tollendo  $xx$ , restabit  $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$ , vel  $yy \frac{+qry - qvy + qvv - qss}{q - r}$  æquale nihilo.

F

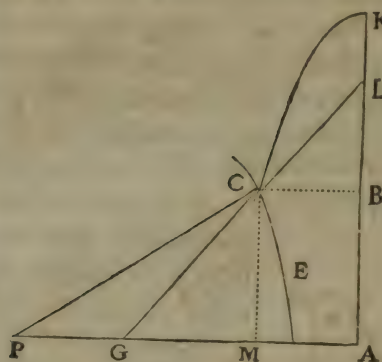
Præstat

Exemplum  
huius Operationis in  
Ellipsi.



Præstat enim hoc loco ita totam summam considerare, quàm unam ejus partem alteri parti adæquare.

M  
Aliud Ex-  
emplum in  
Parabola  
secundi ge-  
neris.



Eodem modo, si C E sit curva linea, per motum Parabolæ descripta, ut superius fuit explicatum, & pro G A ponatur  $b$ , pro K L,  $c$ ; &  $d$  pro latere recto, pertinente ad Parabolæ diametrum K L: æquatio explicans relationem, quæ est inter  $x$  &  $y$ , erit  $y^3 - byy - cdy +$

$bcd + dxy \propto 0$ . Equa auferendo  $x$ , habebitur  $y^3 - byy - cdy + bcd + dy \sqrt{ss - vv} +^2 vy - yy$ . Hoc est, ordinando æquationem ope multiplicationis, prodibit

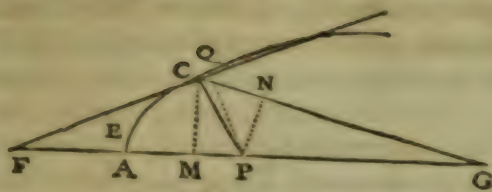
$$y^6 - 2by^4 + bb^2y^2 + bcdy^4 + bcd^2y^2 + dd^2y^2 + dd^3y^2 - 2b^2cdy^3 + 2bbcdy^3 + ccd^2y^3 + d^2ssy^3 + dd^2vy^3 - 2bccddy^4 + bbccddy^4 \propto 0.$$

Atque ita de aliis.

Quinetiam, licet puncta lineæ curvæ ad puncta lineæ rectæ sese eo, quo dixi, modo non haberent; sed alio quolibet, quem sibi quis imaginari possit: poterit tamen nihilominus semper æquatio ejusmodi inveniri.

Quemadmodum si C E est linea, habens ejusmodi relationem ad tria puncta F, G, & A, ut lineæ rectæ, à quolibet ejus puncto, ut C, ad punctum F ductæ, excedant lineam F A, quantitate aliqua, quæ datam habeat rationem ad quantitatem, quâ G A excedit lineam, quæ ab eodem puncto C ducitur ad punctum G: facio  $GA \propto b$ ,  $AF \propto c$ , sumendoque punctum C ad li-  
bitum

Tertium  
exemplum  
in Ovali, si-  
ve Ellipsi  
secundi ge-  
neris.



bitum in curva, suppono, quantitatem, quâ CF superat FA, esse ad illam, quâ GA superat

GC, sicut  $d$  ad  $e$ : ita ut si prior illa quantitas indeterminata vocetur  $\tilde{x}$ , FC sit  $c + \tilde{x}$ , GC verò  $b - \frac{ex}{d}$ . Deinde ponendo MA  $\propto y$ , GM erit  $b - y$ , & FM  $c + y$ : & quandoquidem triangulum CMG rectangulum est, si auferam quadratum ex GM à quadrato ex GC, relinquetur quadratum ex CM,  $\frac{ce}{da}\tilde{x}\tilde{x} - \frac{2be}{d}\tilde{x} + 2by - yy$ . Non secus, si à quadrato ex FC auferam quadratum ex FM, relinquetur itidem quadratum ex CM in aliis terminis, videlicet  $\tilde{x}\tilde{x} + c\tilde{x} - 2cy - yy$ . Vnde cum hi termini præcedentibus sint æquales, ostendunt  $y$  seu MA fore  $\frac{ddxz + cddz - cezz + bdez}{2bdd + cdd}$ . Ac proinde, substituendo hanc summam loco  $y$  in quadrato ex CM, invenietur, illud exprimendum esse hisce terminis  $\frac{bddz + cezz + bddz - bdez}{bdd + cdd} - yy$ .

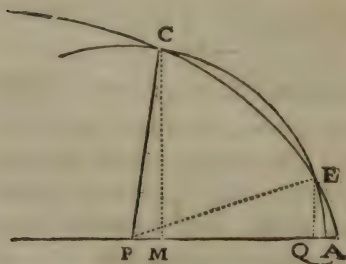
Porro suppono, lineam rectam PC occurrere curvæ CE ad angulos rectos in puncto C, faciendoque PC  $\propto s$ , & PA  $\propto v$ , ut ante, PM erit  $v - y$ ; habebiturque propter triangulum rectangulum PCM,  $ss - vv + 2vy - yy$  pro quadrato ex CM. Vbi si rursus pro  $y$  substituamus summam ipsi æqualem, exurget  $\tilde{x}\tilde{x} + \frac{bcedz - bdez - cddvz - bdevz - bdds + bddv - cdds + cddv}{bda + cce + cev - ddv} \propto 0$ , pro æquatione, quam quærebamus.

Postquam igitur invenimus talem æquationem, non eâ utemur ad cognoscendas quantitates  $x, y$ , vel  $\tilde{x}$ , quæ  
F 2 hîc



hic datae sunt, quia punctum  $C$  est datum, sed ad inveniendam quantitatem  $v$  vel  $s$ , quae quaesitum punctum  $P$  determinant. In quem finem considerari debet: si punctum  $P$  tale est, quale desideratur, quod circulus, cuius id ipsum est centrum, quiq; per punctum  $C$  transit, tangat ibidem curvam lineam  $CE$ , nec ipsam secet. Sed quod, si idem punctum  $P$  propius aut remotius sumatur à puncto  $A$ , quam oportet, circulus hic non solum in puncto  $C$ , sed etiam necessario in alio quodam puncto curvam  $CE$  sit secturus.

Deinde considerandum quoque est, quod, quando hic circulus lineam curvam  $CE$  secat, æquatio, per quam quantitas  $x$  vel  $y$ , vel quædam alia similis quaeritur, supponendo  $PA$  &  $PC$  esse cognitæ, necessario duas contineat radices, quæ sunt inæquales. Nam si, exempli gratiâ, circulus hic secet curvam  $CE$ , in punctis  $C$  &  $E$ , ac ducatur  $EQ$  parallela ipsi  $CM$ : nomina quantitatum indeterminatarum  $x$  &  $y$  æquè bene convenient lineis  $EQ$  &  $QA$ , atque ipsis  $CM$  &  $MA$ , existente  $PE$  æquali  $PC$ , propter circulum. Adeo ut, quaerendo



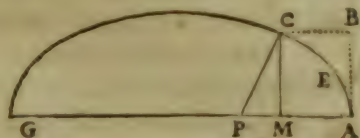
lineas  $EQ$  &  $QA$ , per  $PE$  &  $PA$ , (quæ tanquam cognitæ supponuntur) eandem habituri sumus æquationem, quam si quaererentur  $CM$  &  $MA$  per  $PC$  &  $PA$ . Vnde liquidò constat, ipsius  $x$ , vel  $y$ , vel

alterius ejusmodi quantitatis, quam supposuerimus, valorem, in hac æquatione fore duplicem, hoc est, æquationem duas admissuram radices, quæ sunt inæquales; quarum quidem una futura est  $CM$ , & altera  $EQ$ , si fuerit

fuerit  $x$ , quam quærimus; aut quarum una futura est  $MA$ , & altera  $QA$ , si fuerit  $y$ , quæ quæritur. Verum equidem est, quod, cum punctum  $E$  non ad eandem curvæ partem reperitur cum puncto  $C$ , una tantum duarum harum radicum sit vera, & altera inversa seu minor quàm nihil: sed quò hæc puncta  $C$  &  $E$  sibi invicem sunt propiora, eò quoque differentia inter radices hæc erit minor, quæ denique omnino inter se æquales futuræ sunt, si bina hæc puncta in unum punctum cadant; hoc est, si circulus, qui per  $C$  transit, curvam  $CE$  ibidem tangat, nec omnino secet.

Præterea considerandum est, quod æquatio, in qua duæ sunt radices æquales, necessario eandem formam habeat, ac si in se ipsam multiplicetur quantitas, quam velut incognitam supponimus, multata quantitate cognita sibi æquali: & deinde hæc ultima summa, si non tot dimensiones habet, quot præcedens, rursus per aliam summam multiplicetur, totidem, quot alteri desunt, dimensiones habentem, sic ut separatim æquatio inter singulos unius atque singulos alterius terminos haberi possit.

Vt, exempli causâ, dico, primam æquationem supra inventam, nimirum:  $yy \frac{+qxy - qxy + qxy - qxy}{q - r}$ , eandem formam habituram, quam illa, quæ producitur,



faciendo  $e$  æqualem  $y$ , atque multiplicando  $y - e$  in se, unde exiurgit  $yy - e y + ee$ ; ita ut separatim singulos earum terminos inter se

comparare possimus, ac dicere: quod, postquam primus terminus, qui est  $yy$ , in utraque æquatione planè idem

F 3

est,



est, secundus, qui in una est  $\frac{qy - qvy}{q - r}$ , sit æqualis secundo alterius, qui est  $-^2ey$ . Vnde quærendo quantitatem  $v$ , quæ quantitatem lineæ  $PA$  designat, inveniatur  $v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$ . vel quia  $e$  æqualem supposuimus ipsi  $y$ , habebitur  $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$ . Non secus inveniri quoque posset  $s$  per tertium terminum  $ee \propto \frac{qv - qss}{q - r}$ ; sed quia quantitas  $v$  satis determinat punctum  $P$ , quod solum quærebat, necesse non erit ulterius progredi.

Eâdem ratione secunda æquatio superius inventa: nempe,

$$y^6 - \frac{-2cd}{+dd}y^5 + \frac{+bb}{+dd}y^4 + \frac{+bcd}{-2ddv}y^3 + \frac{-2bbcd}{+ccdd}y^2 + \frac{+ccdd}{-ddss}y + \frac{-2bbcd}{+ddvv}yy - 2bccddy + bbccdd,$$

candem debet habere formam, quam summa, quæ producitur multiplicando  $yy - ^2ey + ee$  per  $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$ , quæ est

$$y^6 + \frac{+f}{-^2e}y^5 + \frac{+gg}{+ee}y^4 + \frac{+h^3}{+eef}y^3 + \frac{+k^4}{+eeg}y^2 + \frac{-^2ek^4}{+eeh^3}yy + \frac{-^2ek^4}{+eeh^3}y + eek^4.$$

ita ut ex binis hisce æquationibus alias sex eliciam, quæ ad inveniendas sex quantitates  $f, g, h, k, v$ , &  $s$  inferviunt.

Vnde facilè est intelligere, quòd, cujuscunque generis linea curva proposita esse possit, tot semper hoc procedendi modo æquationes resultent, quot quantitates incognitas supponere coacti fuerimus. Verùm ut ordine æquationes hæc disjungamus, tandemque quantitatem  $v$  (quæ quidem ea sola est, qua indigemus, & cujus occasione ceteræ quærentur) inveniamus: oportet primò per secundum terminum quærere  $f$ , primam quantitatum incognitarum ultimæ summæ, inveniaturque  $f \propto e - ^2b$ .

Dein-









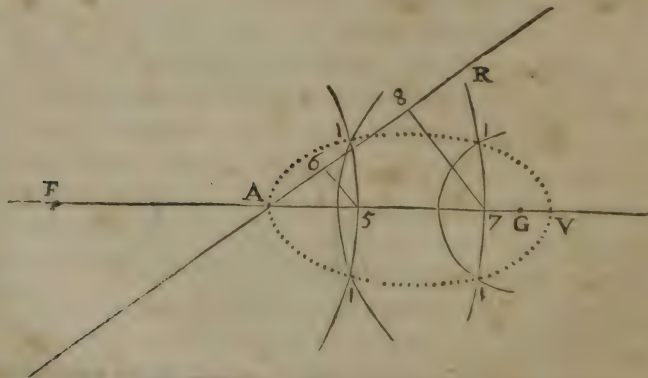


(ut  $E A$  &  $C L$ ) sibi invicem sint æquales: Velimusque rectam lineam ducere  $C F$ , quæ secet hanc Conchoïdem in dato puncto  $C$  ad angulos rectos: Quærendo juxta methodum, à nobis expositam, in linea  $A B$  punctum, per quod dicta linea  $C F$  transire debet, incidemus in calculum, nullo præcedentium breviorum; & nihilominus constructio inde elicienda valde brevis est.

- Oportet enim duntaxat in linea recta  $C G$  sumere  $C D$  æqualem  $C B$ , quæ perpendiculariter cadit in  $B A$ , & deinde ex puncto  $D$  ducere  $D F$ , parallelam  $G A$ , ac æqualem  $L G$ : quâ ratione habebitur punctum  $F$ , per quod quæsita linea  $C P$  est ducenda.

*Explicatio  
quatuor ge-  
nerum no-  
varum O-  
valium  
Optica in-  
servien-  
tium.*

Cæterum ut sciatis, considerationem curvarum linearum, hic propositarum, non carere usu, & quòd illæ diversas habeant proprietates, quæ nullâ ratione cedunt proprietatibus sectionum Conicarum, libet præterea hic subicere explicationem certarum quarundam Ovalium, quas ad Catoptricæ & Dioptricæ Theoriam utilissimas esse videbitis. Modus autem quo illas describo, talis est.



Primum ductis rectis lineis  $F A$  &  $A R$ , sese intersecan-

secantibus in puncto A, ad quoslibet angulos, sumo ad arbitrium in una ex ipsis punctum F, hoc est, propius aut remotius ab A puncto, prout Ouales hasce majores aut minores describere animus est; atque ex puncto F, seu centro, describo circulum, transeuntem aliquantulum ultra A, ut per punctum 5. Deinde ex hoc puncto 5 duco lineam rectam 5, 6, secantem alteram in puncto 6; ita ut A 6 minor sit quam A 5, juxta quamlibet rationem datam, nimirum eam, quæ refractiones mensurat, si eâ in Dioptrica uti velimus. Quo facto, ad libitum quoque sumo punctum G in linea FA, ex eadem parte, quâ punctum 5 est sumptum, hoc est, faciundo, ut lineæ AF & GA eam inter se rationem habeant, quam volumus. Postea positâ RA æquali GA in linea A 6, describo alium circulum ex centro G, cujus radius æqualis sit lineæ R 6, priorem ab utraque parte lineæ FG in puncto 1 secantem; quod quidem unum est ex illis, per quæ prima quæsitæ Ovalium transire debet. Similiter, describo rursus circulum ex centro F, qui transeat aliquantulum ultra citrâ punctum 5, ut per punctum 7; ductâque lineâ rectâ 7, 8, parallêlâ ipsi 5, 6, ex centro G describo alium circulum intervallo lineæ R 8, priorem, qui per punctum 7 transit, secantem in puncto 1, quod aliud præterea punctum est ejusdem Ovalis. Atque ita invenire licet tot alia puncta, quot voluerimus, ducendo semper alias atque alias lineas ipsi 7, 8 parallêlas, nec non alios aliôsque circulos ex centris F & G.

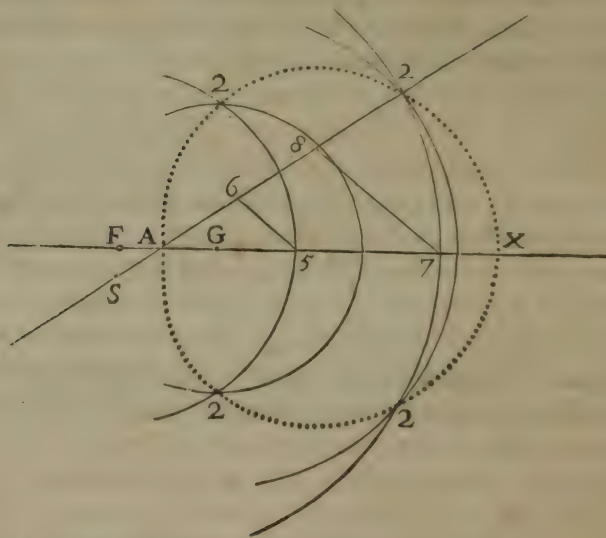
Quod ad secundæ Ovalis descriptionem attinet, ibi nulla quidem alia differentia advertenda occurrit, quàm quòd loco AR sumere oporteat A S ipsi AG æqualem, ex altera parte puncti A, & quòd radius circuli, ex centro G descripti, ad secandum eum, qui ex centro F per

G 2

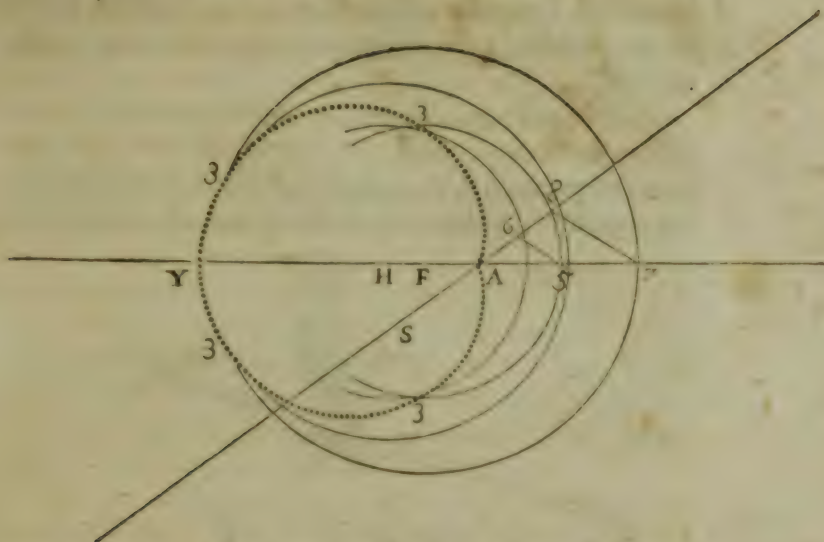
pun-



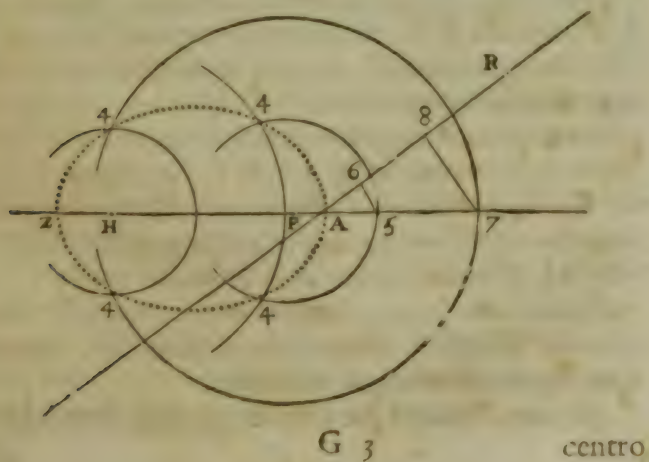
punctum 5 descriptus est, æqualis sumendus sit lineæ S 6; aut etiam æqualis lineæ S 8, si illum, qui per punctum 7 transit, secare debeat. Atque ita de aliis. Quâ  
 00 quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese interfec-  
 bunt, per quæ secunda hæc Ovalis erit ducenda.



Porro quod spectat ad tertiam & quartam, loco lineæ A G sumenda erit A H ex altera parte puncti A, nimirum ex eadem parte, qua punctum F est sumptum. Vbi amplius observandum venit, lineam hanc A H excedere debere ipsam A F. quæ quoque nulla esse potest, ita ut punctum F idem sit, quod punctum A, in descriptione omnium harum Ovalium. Deinde postquam lineæ A R & A S sic ipsi A H sunt æquales factæ, ad describendam tertiam Ovalem A 3 Y, describo circum-  
 lum ex centro H, cujus radius sit æqualis lineæ S 6, cir-  
 culum ex centro F, descriptum per punctum 5, secan-  
 tem



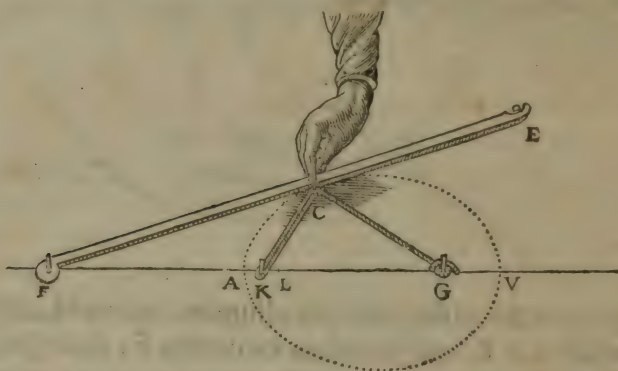
tem in puncto 3; similiterque alium ex centro H, intervallo lineæ S 8, qui circulum ex centro F, descriptum per punctum 7, secet in puncto itidem notato 3. atque ita de aliis. Denique pro ultima, describo circulos ex





centro H, quorum radii sint æquales lineis R 6; & R 8, atque similibus, qui reliquos circulos secant in punctis notatis 4.

Possent præterea infiniti alii modi excogitari ad describendas hæc Ouales. Vt, exempli causâ, ad describendam primam A V, quando lineæ F A & A G ponuntur æquales: divido totam F G in puncto L; ita ut F L sit



ad L G, sicut A 5 ad A 6. hoc est, ut ipsæ inter se rationem servant, quæ refractiones metitur. Deinde sectâ A L bifariam in K, faciô rotare regulam aliquam, ut F E, circa punctum F, interea dum juxta ipsam velut agglutinata tenetur chorda E C, quæ, uno extremo annexa extremitati regulæ versùs E, se flectit à C versùs K, atque deinde rursus à K versùs C, ac denuo à C versùs G, ubi alterum ejus extremum est alligatum; sic ut longitudo ipsius composita sit ex longitudine lineæ G A plus A L, plus F E, minus A F, & motus puncti C Ovalem hanc describat: ad imitationem ejus, quod in Dioptrica de Ellipsi & Hyperbola dictum fuit. Sed nolo huic argumento diutiùs immorari.

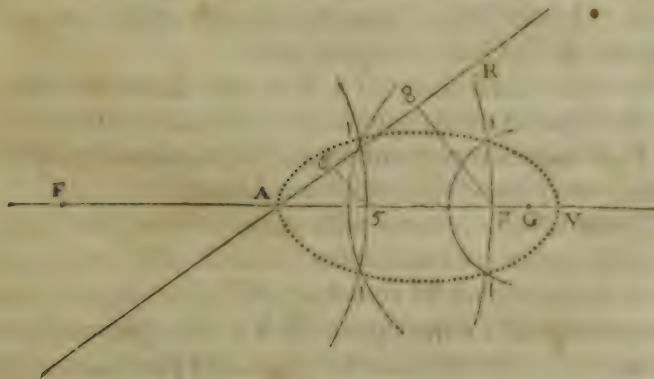
Ad hæc, etiamsi hæc Ouales ejusdem fermè naturæ viden-

LIBER SECUNDUS. 55

videntur, ipsæ nihilominus quatuor diverforum sunt generum, quorum unumquodque sub se infinita alia genera continet, & unumquodque rursus tot diversas species, quot facit Ellipsoidum aut Hyperbolarum genus. Etenim prout ratio, quæ inter lineas A 5 & A 6, similisve, consistit, diversa est, genus quoque subalternum harum Ovalium fit diversum. Deinde prout ratio inter lineas A F & A G vel A H mutatur, Ovals quoque cujusque subalterni generis mutantur specie. Prout autem A G vel A H major vel minor est, ipsæ magnitudine quoque differunt. Quod si verò lineæ A 5 & A 6 æquales sumantur, loco Ovalium primi aut tertii generis, describentur tantum lineæ rectæ; sed loco secundi, omnes Hyperbolæ; & loco ultimi, omnes Ellipses.

Uterius in qualibet harum Ovalium consideranda sunt etiam duæ partes, quæ diversas proprietates habent; quippe in prima pars illa, quæ est versus A, facit ut radii, qui in aëre existentes ex puncto F prodeunt, detorqueantur omnes versus G punctum, postquam in convexam vitri superficiem inciderunt, qualis hic est 1 A 1. Et in quo vitro refractiones sic fiunt, ut juxta ea,

*Proprietates  
harum O-  
valium  
concernen-  
tes reflexio-  
nes & re-  
fractiones.*



quæ



quæ in Dioptricis dicta sunt, illæ omnes per rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6, aut similes, quarum ope hæc Ovalis descripta est, obtinetur, mensurari possint.

Verùm pars illa, quæ est versùs V, facit ut radii, qui ex puncto G prodeunt, omnes versùs F reflectantur, si in superficiem concavam speculi inciderint, cujus figura sit 1 V 1; & quod ex tali materia constet, ut vim horum radiorum, secundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonstravimus, liquet, hoc posito, futurum, ut etiam reflexionum anguli non secus ac refractionum inæquales existant, atque eodem modo mensurari possint.

In secunda Ovali, pars 2 A 2 similiter reflexionibus inservit, quarum anguli inæquales supponuntur. Si enim illa superficiem speculi, ex eadem materia, qua præcedens, confecti, referret, faceret ut radii omnes, qui ex puncto G venirent, sic reflecterentur, perinde ac si post reflexionem illam viderentur procedere ex puncto F. Et notandum est, quòd, si linea A G multò major sit assumpta quàm A F, speculum hoc in medio versùs A concavum sit futurum, atque concavum in extremitatibus. Quippe hujus lineæ figura talis existit, ut potius cor quàm Ovalem repræsentet.

At verò altera ejus pars 2 X 2 refractionibus inservit, facitque ut radii, qui in aëre sunt, ac tendunt versùs F, se omnes incurvent versùs G, transeundo superficiem vitri, quod figuram illam habet.

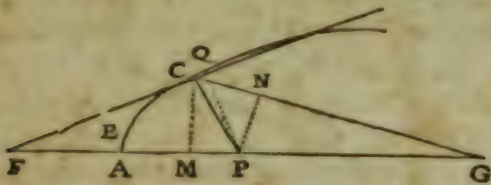
Tertia Ovalis tota refractionibus inservit, facitque ut radii, qui in aëre existentes versùs F tendunt, in vitro se omnes versùs H recipiant, postquam superficiem ejus transierunt, cujus figura est A 3 Y 3, quæ undique est convexa; præterquam versùs A, ubi paululùm concava

cava existit, ita ut ipsa pariter atque præcedens cordi haud sit absimilis. Differentia autem, quæ est inter duas ejus partes, in eo consistit, quòd punctum F uni ex illis propius sit, quàm punctum H; quòdque ab altera remotius quàm idem punctum H existat.

Eodem modo ultima Ovalis omnino reflexionibus inservit, facitque, ut radii, qui ex puncto H veniunt, atque in superficiem concavam alicujus speculi ejusdem cum præcedentibus materiæ incidunt, cujusque figura est A 4 Z 4, reflectantur omnes versùs F.

Ita ut puncta F, & G seu H Focos harum Ovalium appellare liceat, ad exemplum eorum, quæ in Ellipsis & Hyperbolis habentur, atque in Dioptrica ita nominata sunt.

Omitto multas alias refractiones & reflexiones, quæ harum Ovalium ope diriguntur: cum enim harum solummodo converis aut contrariis sint, ex his facile deduci poterunt.



Verùm non omittenda est demonstratio ejus, quod dixi. In quem finem sumamus, exempli causâ, punctum C pro libitu in priore parte primæ harum Ovalium; deinde ducamus lineam rectam CP, quæ secet hanc curvam in C, ad angulos rectos. Quod quidem facile est, per Problema præcedens. Etenim, sumendo  $b$  pro AG,  $e$  pro AF,  $e + z$  pro FC; supponendoque, quòd ratio, quæ est inter  $d$  &  $e$ , (quam hic

*Demonstratio harum proprietatum.*

H sem-





nem quæ inter ipsas est, non mutant: si FP multiplicata per CM, & divisa per CF, est ad GP, etiam multiplicatam per CM, & divisam per CG, sicut *d* ad *e*: dividendo utramque summam per CM, & deinde multiplicando utramque per CF, ac denuo per CG: relinquitur, FP multiplicatam per CG, in eadem ratione esse ad GP multiplicatam per CF, ut est *d* ad *e*. At verò per constructionem FP est  $c \frac{+bcdd-bcde+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$ , sive FP  $\propto \frac{bcdd+cdd+bddz+ceez}{bde+cdd+ddz-eez}$ , & CG est  $b - \frac{ez}{d}$ . Vnde si multiplicemus FP per CG, proveniet

$$\frac{bbdd+bcdd+bbdz+bcdd-bcde-bcde-bcde-bcde}{bde+cdd+ddz-eez}$$

Similiter GP est  $b \frac{-bcdd+bcde-bddz-eeez}{bde+cdd+ddz-eez}$ , sive GP  $\propto \frac{bbde+bcde-beez-eeez}{bde+cdd+ddz-eez}$ , & CF est  $c + \frac{z}{e}$ . Ideo si multiplicemus GP per CF, exurget

$$\frac{bbde+bcde-beez-eeez+bbdz+bbdz-bceez-eeez}{bde+cdd+ddz-eez}$$

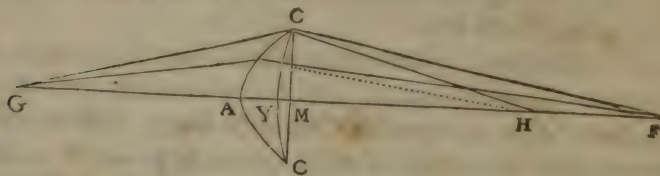
Et quia prima harum summarum divisa per *d*, eadem est quæ, secunda divisa per *e*: manifestum est, quòd FP multiplicata per CG sit ad GP, multiplicatam per CF, hoc est, quòd PQ sit ad PN, sicut *d* ad *e*. Quod demonstrandum erat.

Vbi sciendum, demonstrationem hanc se extendere ad omne illud, quod de aliis refractionibus aut reflexionibus, quæ in expositis Ovalibus sunt, dictum est. Præterquam quòd aliud nihil quàm signa + & - in calculo sit mutandum. Quæ ideo unusquisque proprio Marte examinare poterit, ita ut huic rei diutius immorari non sit opus.

Sed oportet, ut nunc id præstem, quod in Dioptrica omisi, cum ibi ostensum est, plurium diversarum figurarum vitra haberi posse, quæ singula faciunt, ut ra-



dii, ab eodem objecti puncto venientes, coëant rursus omnes in aliud punctum, postquam per illa transierunt; & quòd horum vitrorum illa, quæ ab una parte admodum convexa sunt, & concava ab altera, majorem efficaciam ad comburendum habeant, quàm illa, quæ ab utraque parte æqualiter sunt convexa; cum hæc posteriora contra pro perspicillis sint meliora: Contentus enim ibi fui explicare tantum illa, quæ ad praxin existimavi fore optima, habendo præcipuè rationem difficultatis, quæ artificibus in iis expoliendis occurrere possit. Adeoque nequid, quod ad ejus scientiæ Theoriam spectat, desiderari queat, explicanda hìc mihi superest vitrorum figura, quæ unam ex superficiebus suis tam convexam aut concavam habeant, quàm quis voluerit, & nihilominus efficiant, ut radii omnes, qui ab uno puncto effunduntur, aut paralleli sunt, colligantur rursus in alio puncto: Quemadmodum etiam figura vitrorum, quæ idem præstant, & æqualiter ab utraque parte sunt convexa; aut in quibus convexitas unius superficie datam habet rationem ad convexitatem alterius.



*Quomodo  
vitrum fieri  
possit, cujus  
una superfi-  
cies tam  
convexa  
aut concava*

Ponamus igitur pro primo casu, quòd, cùm dantur puncta G, Y, C, & F, radii omnes, qui ex puncto G veniunt, aut ipsi G A sunt paralleli, colligi debeant in puncto F, postquam vitrum transierint, ita concavum, ut, Y in medio ejus superficie interioris existente, extremitas





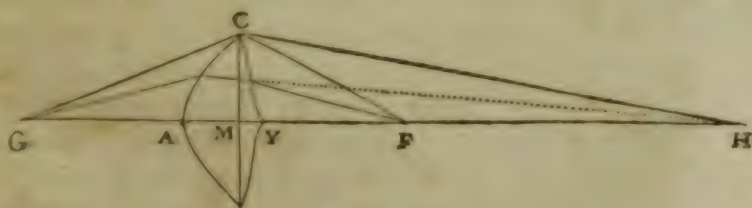


G venire, tum quidem superficies illa debet esse prima pars Ovalis primi generis, cujus bini foci sint G & H, quæque transeat per punctum C. unde porro invenitur punctum A, vertex ipsius Ovalis; considerando scilicet, quòd G C excedere debeat G A, quantitate aliqua, quæ sit ad illam, quâ H A superat H C, sicut  $d$  ad  $e$ . Etenim, sumptâ  $k$  pro differentia, quæ est inter CH & HM; si pro AM supponatur  $x$ , habebitur  $x - k$ , pro differentia, quæ est inter A H & C H. Deinde si sumatur  $g$  pro differentia, quæ est inter G C & G M, quæ data sunt, habebitur  $g + x$  pro illa, quæ est inter G C & G A. Et quandoquidem hæc ultima  $g + x$  est ad alteram  $x - k$ , sicut  $d$  ad  $e$ , habebitur  $g e + e x \propto d x - d k$ , hoc est,  $\frac{g e + d k}{d - e}$ , pro linea  $x$  vel A M, per quam determinatur punctum A, quod quærebatur.

Quomodo  
aliud fieri  
possit, quod  
idem præ-  
stet, cuiusq;  
convexitas  
unius super-  
ficiei datam  
rationem  
habeat ad  
convexitatem  
vel concavitatem  
alterius.

Ponamus jam pro casu altero, quòd tantum dentur puncta G, C, & F, ut & ratio, quæ est inter lineas A M & M Y, & quòd inveniendâ sit figura vitri A C Y, quæ faciat ut radii omnes, à puncto G venientes, coeant rursus in punctum F.

Hic autem rursus duabus Ovalibus uti possumus, quarum una A C pro focis habeat puncta G & H, altera

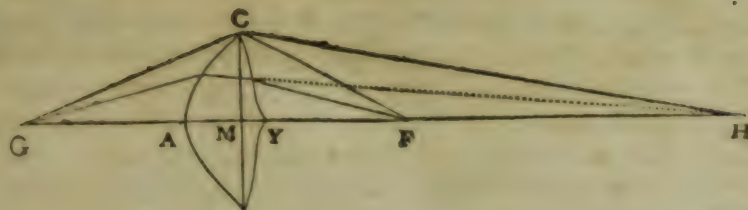


autem C Y puncta F & H. Qui igitur ut inveniantur, supponendo primum punctum H, quod utrique est com-



commune, esse cognitum, quæro AM per tria puncta G, C, & H, ratione modò explicatâ; nimirum sumendo  $k$  pro differentia, quæ est inter CH & HM, &  $g$  pro eâ, quæ est inter GC & GM. Vnde cum AC est prima pars Ovalis primi generis, invenio  $\frac{ge+dk}{d-e}$  pro AM. Deinde quæro etiam MY per tria puncta F, C, & H, ita ut CY sit prima pars Ovalis tertii generis; sumendoque  $y$  pro MY, &  $f$  pro differentia, quæ est inter CF & FM, habebó  $f+y$  pro ea, quæ est inter CF & FT: hinc cum habeam  $k$  pro illa, quæ est inter CH & HM, habebó  $k+y$  pro ea, quæ est inter CH & HY, quam scio esse debere ad  $f+y$ , sicut  $e$  ad  $d$ , propter Ovalem tertii generis. unde invenio  $y$  seu MY esse  $\frac{fe-dk}{d-e}$ ; ita ut addendo simul quantitates inventas pro AM & MY, habeam  $\frac{ge+fe}{d-e}$  pro tota AY. E quibus manifestum fit, quòd, ad quamcunque partem punctum H suppositum fuerit, dicta linea AY semper composita sit ex quantitate aliqua, quæ sit ad differentiam, quâ GC & CF simul sumptæ superant GF, ut est  $e$  minor duarum linearum, quæ dimetiendis refractionibus vitri propositi inserviunt, ad  $d-e$ , differentiam, quâ major minorem excedit. Quod quidem satis scitum est Theorema.

Postquam igitur sic inventa est tota linea AY, secanda est ipsa juxta rationem, quam inter se servare debent ejus partes AM & MY; quibus mediantibus, (quia jam habetur punctum M) invenientur quoque puncta A & Y; & per consequens punctum H, per Problema præcedens. Verùm considerandum est priùs, num linea AM sic inventa, sit major quàm  $\frac{ge}{d-e}$ , an minor, an verò ipsi æqualis. Nam si major fuerit, cognoscitur



scitur inde, quòd curva AC esse debeat prima pars Ovalis primi generis, & CY prima tertiæ, quemadmodum hìc suppositæ fuere: cum aliàs, si minor fuerit, id indicet, quòd CY debeat esse prima pars Ovalis primi generis, & AC prima pars tertiæ. Et denique si AM æqualis fuerit ipsi  $\frac{6^e}{4}$ , quòd duæ hæ curvæ AC & CY debeant esse duæ Hyperbolæ.

Possent extendi hæc duo Problemata ad infinitos alios casus, quibus quidem deducendis supersedeo, quòd nullum eorum usum in Dioptricis deprehenderim.

Possẽ quoque ulteriùs progredi, & dicere, cùm una ex vitri superficiebus data est, modò illa sit aut plana, aut à sectionibus Conicis, aut Circulo effecta, quomodo altera ejus superficies confici debeat, ut radios omnes ab uno dato puncto venientes transmittat ad aliud punctum etiam datum. Neque enim hoc ullo modo difficilius est, quàm quod modò explicavi; immo verò res multò facilior est, quoniam via illuc perveniendi jam aperta est. Verùm malo alios id quærere, ut, si inter investigandum negotii adhuc aliquid repererint, eò plurius inventionem rerum hìc demonstrarum æstiment.

Cæterùm in toto hoc libro locutus sum tantùm de *Quomodo*  
I lineis *ad omne,*



66 GEOMETRIÆ LIBER SECUNDUS.

*quoniam hic de  
lineis cur-  
vis, in plana  
superficie de-  
scripsit, di-  
ctum fuit,  
applicari  
posse ad il-  
las, quæ de-  
scribuntur  
in spatio  
trium di-  
mensionum  
sive superfi-  
cie aliqua  
curva.*

lineis curvis, quæ in superficie aliqua plana describi pos-  
sunt; verum facile est, quæ de iis dixi, etiam ad omnes  
alias referre, quas imaginari possumus formatas esse,  
motu aliquo ordinato punctorum alicujus corporis in  
spatio trium dimensionum. Nimirum demittendo duas  
perpendiculares à quolibet puncto lineæ curvæ, quam  
considerare volumus, ad duo plana, ad angulos rectos  
se invicem secantia, unam ad unum, & alteram ad alte-  
rum: quippe perpendicularem harum extremitates  
singulæ duas alias curvas lineas describunt, unam in  
uno, & alteram in altero plano, quarum puncta omnia  
modo superius explicato determinari ac referri pos-  
sunt ad puncta lineæ rectæ, quæ utrique plano est com-  
munis, ut hâc ratione puncta curvæ, tres dimensiones  
habentis, omnino sint determinata. Ita etiam si re-  
ctam lineam ducere velimus, quæ hanc curvam in dato  
puncto ad angulos rectos secet, opus tantum est duas  
alias rectas lineas ducere, unam in uno, & alteram in  
altero plano, quarum singulæ singulas curvas ibidem  
secent in punctis, ubi cadunt perpendiculares, quæ à  
dato puncto ad utrumque planum sunt deductæ. Ete-  
nim postquam duo alia plana, unum super unam, & al-  
terum super alteram, erecta sunt, quæ ad utrumque pla-  
num, in quibus lineæ illæ sunt, recta existant, erit ho-  
rum duorum planorum communis intersectio linea re-  
cta quæsitæ. Atque ita arbitror me omnia tradidisse  
Elementa, quæ ad curvarum linearum cognitionem  
sunt necessaria.

GEO-

## GEOMETRIÆ

## LIBER TERTIUS.

*De Construptione Problematum Solidorum, &  
Solida excedentium.*

**T**Ametsi omnes lineæ curvæ, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sunt recipiendæ, non ideo tamen permissum est uti indifferenter quâlibet, quæ primùm occurrat, ad Problematis cujusque constructionem; sed cura semper adhibenda est, ut simplicissimam, cujus ope id ipsum solvi queat, eligamus. Vbi quidem observandum est, per simplicissimas non solum intelligendas esse illas, quæ omnium facillimè describi possunt; neque quæ propositi Problematis constructionem vel demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim, quæ simplicissimi sunt generis, quod ad quantitatem quæsitam determinandam inservire queat.

Quemadmodum, exempli causâ, ad inveniendas tot medias proportionales, quot libuerit, non opinor modum ullum faciliorem dari, nec cujus demonstratio evidentior sit, quàm si curvæ lineæ adhibeantur, quæ per instrumentum XYZ (supra explicatum) describuntur. Etenim si inter YA & YZ duas medias proportionales invenire libeat, oportet tantum circulum describere, cujus diameter sit YE, qui curvam AD secet in puncto D, eritque YD una ex quæsitis mediis proportionalibus. Cujus rei demonstratio ex sola instrumenti hujus ad lineam YD adplicatione perspicua est.

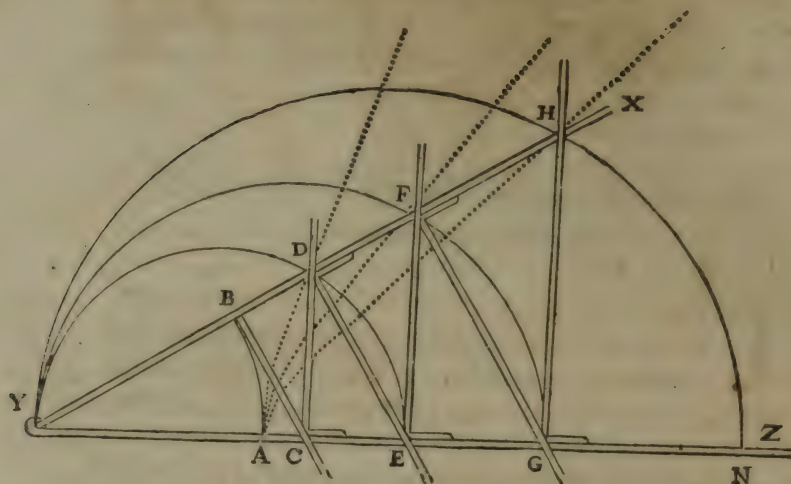
I 2

Nam

*Quoniam  
curva linea  
adhiberi  
possint ad  
construendo-  
nem cujus-  
que Proble-  
matis.*

*Exemplum  
concernens  
inventio-  
nem plu-  
rium me-  
diarum pro-  
portiona-  
lium.*





Nam sicut  $YA$  seu  $YB$ , quæ ipsi est æqualis, se habet ad  $YC$ ; sic  $YC$  se habet ad  $YD$ ; &  $YD$  ad  $YE$ .

Eodem modo ad inveniendas 4 medias proportionales inter  $YA$  &  $YG$ ; aut ad inveniendas 6 inter  $YA$  &  $YN$ , describendus est tantum circulus  $YFG$ , qui secans curvam  $AF$  in puncto  $F$  determinat lineam rectam  $YF$ , quæ una est ex quatuor quæsitis proportionalibus; aut circulus  $IHN$ , qui secans curvam  $AH$  in puncto  $H$  determinat ipsam  $YH$ , quæ una est ex sex quæsitis proportionalibus. Et sic de cæteris.

Verum quia linea curva  $AD$  secundi est generis, & duæ mediæ proportionales inveniri possunt per sectiones Conicas, quæ sunt primi generis; tum etiam, quoniam 4 & 6 mediæ proportionales inveniri queunt beneficio linearum, generum non adeò compositorum atque  $AF$  &  $AH$ : peccatum esset in Geometria, si illæ hîc adhiberentur. Quemadmodum etiam ex altera parte pro peccato reputandum esset, si quis inutiliter in  
con-

construendo Problemate aliquo per genus linearum simplicius, quàm natura ejus permittit, desudaret.

Quocirca ut hìc adducere possim regulas quasdam, quibus utrumque peccatum evitetur, opus est, ut in genere aliquid dicam de natura *Æquationum*; hoc est, de summis, quæ ex pluribus terminis sunt compositæ, partim cognitis, partim verò incognitis, quorum alii aliis sunt æquales, vel potius, qui omnes simul considerati nihilo sunt æquales. Quippe sæpe præstat illos hâc ratione considerare.

Sciendum itaque, quòd incognita quantitas in qualibet *Æquatione*, tot diversas radices seu diversos valores habere possit, quot ipsa habet dimensiones. Nam si, exempli gratiâ,  $x$  supponatur æqualis 2, seu  $x - 2$  æqualis nihilo; & rursus  $x \propto 3$ , seu  $x - 3 \propto 0$ ; & multiplicetur  $x - 2 \propto 0$  per  $x - 3 \propto 0$ : habebitur  $xx - 5x + 6 \propto 0$ , seu  $xx \propto 5x - 6$ . quæ *Æquatio* est, in qua quantitas  $x$  valet 2, & præterea etiam 3. Quòd si rursus fiat  $x \propto 4$ , atque  $x - 4 \propto 0$  multiplicetur per  $xx - 5x + 6 \propto 0$ , producet  $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ . quæ alia est *Æquatio*, in qua  $x$  habens tres dimensiones, tres quoque habet valores, qui sunt 2, 3, & 4.

Verùm sæpe accidit, quòd quædam harum radicum sint falsæ, seu minores quàm nihil: ut, si supponatur  $x$  designare quoque defectum alicujus quantitatis, ut puta 5, ita ut habeatur  $x + 5 \propto 0$ , quæ multiplicata per  $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ , faciat  $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$ , pro *Æquatione*, in qua quatuor sunt radices, nimirum tres veræ, quæ sunt 2, 3, & 4, atque una falsa, quæ est 5.

Vnde liquidò constat, quòd *Æquationis* summa, quæ plures radices continet, dividi semper possit per binomium, quod compositum est ex quantitate in-

I 3

gnita,

*De natura  
Æquationum.*

*Quot haberi possint radices in qualibet Æquatione.*

*Quanam sint falsæ radices.*

*Quomodo diminui possit dimensionum numerus ali-*



cujus *Æ-*  
*quationis,*  
*quando co-*  
*gnoscitur a-*  
*liqua ex e-*  
*jus radici-*  
*bus.*

gnita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem sit, aut plus valore alicujus ex falsis. cujus divisionis ope dimensiones ejus in tantum diminuuntur.

C  
*Quæ ratio-*  
*ne indagari*  
*queat, num*  
*data quan-*  
*titas sit va-*  
*lor alicujus*  
*radicis.*

Et vicissim si *Æ*quationis summa dividi non possit per binomium, constans ex quantitate incognita + vel — certa alia quadam quantitate; indicio est, quantitatem hanc non esse valorem alicujus ex ejus radicibus. Quemadmodum hæc ultima  $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 12000$ , dividi quidem potest per  $x - 2$ , per  $x - 3$ , per  $x - 4$ , & per  $x + 5$ ; sed nullo modo per  $x +$  vel — quacunque alia quantitate. Id quod ostendit, ipsam non posse admittere alias radices præter hæc quatuor 2, 3, 4, & 5.

D  
*Quot habe-*  
*ri possint*  
*vera radi-*  
*ces in qua-*  
*libet *Æ-**  
*quatione.*

Ex quibus etiam cognoscitur, quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque *Æ*quatione haberi possint. Nimirum, tot in ea veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum + & —; & tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa +, vel duo signa —, quæ se invicem sequuntur. Vt in ultima, quia post +  $x^4$  habetur —  $4x^3$ , quæ est una variatio signi + in —, & post —  $4x^3$  habetur —  $19xx$ , quæ sunt duo signa similia; & post —  $19xx$  habetur +  $106x$ ; & post +  $106x$  habetur —  $120$ , quæ sunt adhuc duæ aliæ variationes: cognoscitur quod illa tres admittat veras radices, & unam falsam, propter duo signa — terminorum  $4x^3$  &  $19xx$ , quæ se invicem sequuntur.

E  
*Quomodo*  
*faciendum*  
*sit, ut falsa*  
*radices *Æ-**  
*quationis e-*  
*vadant ve-*  
*ra, & vera*  
*falsa.*

Porrò facile est efficere, ut in una eademque *Æ*quatione radices omnes, quæ falsæ erant, evadant veræ; & ut eadem operâ omnes illæ, quæ veræ erant, falsæ fiant. Nimirum mutando signa omnia + & —, quæ in 2<sup>do</sup>, 4<sup>to</sup>, 6<sup>to</sup>, aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis 1<sup>mi</sup>, 3<sup>ti</sup>, 5<sup>ti</sup>, similiumque locorum,

rum, qui per impares numeros designantur, non mutatis.

Vt si loco

$$+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 12000,$$

scribatur

$+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 12000,$   
habebitur Aequatio, in qua una tantum est vera radix, quæ est 5; & tres falsæ, quæ sunt 2, 3, & 4.

Quod si verò non cognito radicem alicujus Aequationis valore, ipsas augere vel diminuere velimus quantitate aliquâ cognitâ, oportet tantum in locum incogniti termini substituere alium, qui eadem hanc quantitate major sit vel minor, eumque ubique primi loco subrogare.

*Quomodo  
augeri vel  
diminui  
possint A-  
quationis  
radices, ip-  
sis non cog-  
nitæ.*

Vt si augere velimus <sup>ternario</sup> radicem hujus Aequationis  $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 12000$ , sumenda est  $y$  loco  $x$ , & cogitandum, quantitatem hanc  $y$  majorem esse quam  $x$ , excessu 3, ita ut  $y - 3$  ipsi  $x$  sit æqualis; loco autem  $xx$  scribendum est quadratum ex  $y - 3$ , quod est  $yy - 6y + 9$ ; & loco  $x^3$  sumendus est ejus cubus, qui est  $y^3 - 9yy + 27y - 27$ ; & denique loco  $x^4$  ponendum est ejus quadrato-quadratum, quod est  $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$ . Vnde si scribamus <sup>F</sup> summam præcedentem, substituendo ubique  $y$  pro  $x$ , inuenietur

$$\begin{aligned} y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81 \\ + 4y^3 - 36yy + 108y - 108 \\ - 19yy + 114y - 171 \\ - 106y + 318 \\ - 120 \end{aligned}$$

$y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y^* 000$ , vel  $y^3 - 8yy - 1y + 800$ .  
ubi vera radix, quæ erat 5, jam est 8, propter ternarium ipsi additum.

Sin



Sin verò contra ternario radicem ejusdem *Æqua-*  
tionis diminuere velimus, facienda est  $y + 3 \propto x$ , &  
 $yy + 6y + 9 \propto xx$ . Atque ita porrò. Ita ut loco

$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$   
scribatur

$$\begin{array}{r} y^4 + 12y^3 + 54yy + 108y + 81 \\ + 4y^3 + 36yy + 108y + 108 \\ - 19yy - 114y - 171 \\ - 106y - 318 \\ - 120 \end{array}$$

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0.$$

Quòd, au-  
gendo veras  
radices, fal-  
sa dimi-  
nuantur, &  
contra.

Vbi notandum est, dum veræ radices alicujus *Æ-*  
quationis augmentur, falsas eadem quantitate diminui;  
& contra, dum veræ diminuuntur, falsas augeri: Et  
quidem tum has tum illas prorsus evanescere, si quan-  
titate ipsis æquali diminuantur; si verò quantitate  
ipsas superante, tum ex veris falsas evadere, & ex falsis  
veras. Vt hic, augendo ternario veram radicem, quæ  
erat 5, diminuitur ternario quælibet ex falsis; ita ut illa,  
quæ erat 4, non valeat plus quàm 1; & quæ erat 3, sit  
cyphra seu 0; & quæ erat 2, facta sit vera, sitque 1 (cum  
 $-2 + 3$  faciat  $+1$ .) Adeò ut in hac *Æquatione*  
 $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$ , non plures quàm tres sint ra-  
dices, inter quas duæ veræ existunt, utpote 1 & 8; &  
una falsa, quæ etiam est 1: Et in hac altera  $y^4 + 16y^3$   
 $+ 71yy - 4y - 420 \propto 0$ , una tantùm vera, quæ est 2,  
(quia  $+5 - 3$  facit  $+2$ ;) & tres falsæ, quæ sunt 5, 6,  
& 7.

Quæ ratio-  
ne secundus  
terminus  
*Æquationis*  
tollì possit.

G

Iam verò beneficio modi hujus mutandi valorem ra-  
dicum, ipsis non cognitis, duo fieri possunt, quæ in se-  
quentibus usum aliquem habebunt. Vnum est, quòd  
semper secundus terminus *Æquationis*, quam exami-  
namus, tolli possit: Nimirum, diminuendo veras ra-  
dices,

L I B E R T E R T I U S. 73

dices, quantitate cognita secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo +, & alter signo —; aut augendo illas eâdem quantitate, si uterque eodem signo fuerit adfectus.

Vt ad tollendum secundum terminum ultimæ *Æ*-quationis

$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 42000$ ,  
divisus 16 per 4, propter 4<sup>or</sup> dimensiones termini  $y^4$ ,  
proveniet rursus 4: hinc facio  $\tilde{z} = 40y$ , & scribo,

$$\begin{array}{r} \tilde{z}^4 - 16\tilde{z}^3 + 96\tilde{z}\tilde{z} - 256\tilde{z} + 256 \\ + 16\tilde{z}^3 - 192\tilde{z}\tilde{z} + 768\tilde{z} - 1024 \\ + 71\tilde{z}\tilde{z} - 568\tilde{z} + 1136 \\ - 4\tilde{z} + 16 \\ - 420 \end{array}$$

$\tilde{z}^4 - 25\tilde{z}\tilde{z} - 60\tilde{z} - 3600$ .  
ubi vera radix, quæ erat 2, est 6, cum ipsa quaternario sit  
aucta; & falsæ, quæ erant 5, 6, & 7, tantummodo sunt  
1, 2, & 3, cum illæ quaternario singulæ sint diminutæ.

Eodem modo si tollere velimus secundum terminum  
*Æ*quationis

$x^4 - 2ax^3 + \frac{2a^2}{cc}xx - a^3x + a^400$ :  
quoniam divisus 2a per 4, quotiens fit  $\frac{1}{2}a$ , faciendum est  
 $\tilde{z} + \frac{1}{2}a00x$ , ac scribendum

$$\begin{array}{r} \tilde{z}^4 + \frac{1}{2}a\tilde{z}^3 + \frac{1}{4}aa\tilde{z}\tilde{z} + \frac{1}{8}a^3\tilde{z} + \frac{1}{16}a^4 \\ - \frac{1}{2}a\tilde{z}^3 - 3aa\tilde{z}\tilde{z} - \frac{3}{8}a^3\tilde{z} - \frac{1}{4}a^4 \\ + 2aa\tilde{z}\tilde{z} + 2a^3\tilde{z} + \frac{1}{2}a^4 \\ - cc\tilde{z}\tilde{z} - acc\tilde{z} - \frac{1}{4}aacc \\ - \frac{1}{2}a^3\tilde{z} - a^4 \\ + a^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \tilde{z}^4 + \frac{1}{2}aa\tilde{z}\tilde{z} - a^3\tilde{z} + \frac{1}{16}a^400 \\ - cc - acc - \frac{1}{4}aacc \end{array}$$

K

ubi



ubi postquam innotuit valor ipsius  $z$ , addendo ipsi  $\frac{1}{2} 4$ , habebitur valor radicis  $x$ .

*Quo pacto  
fiat ut falsa  
radices æ-  
quationis  
evadant  
vera, nec  
tamen vera  
fiant falsa.*

Alterum, quod hîc postea usum aliquem habebit, est, quòd, dum augetur valor verarum radicum, quantitate majore aliquâ ex falsis, radices omnes veræ semper fieri possint, ita ut non habeantur duo signa  $+$ , aut duo signa  $-$ , quæ se invicem sequantur; & insuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato semissis secundi major sit. Nam licet id fiat, etiamsi falsæ radices incognitæ sint; tamen facile est de illarum magnitudine præterpropter judicare, atque quantitatem aliquam assumere, quæ ipsas in tantum vel plus superet, quantum ad effectum hunc requiritur.

H. Ut si habeatur

$$x^6 + n x^5 - 6 n n x^4 + 36 n^3 x^3 - 216 n^4 x^2 + 1296 n^5 x - 7776 n^6 \infty 0:$$

faciendo  $y = 6 n \infty x$ , invenietur

$$\begin{array}{r} y^6 - 36 n^2 y^5 + 540 n^3 y^4 - 4320 n^4 y^3 + 19440 n^5 y^2 - 46656 n^6 y + 46656 n^6 \\ + n^2 y^5 - 30 n^3 y^4 + 360 n^4 y^3 - 2160 n^5 y^2 + 6480 n^6 y - 7776 n^6 \\ - 6 n^2 y^5 + 144 n^3 y^4 + 36 n^3 y^3 - 1296 n^4 y^2 + 5184 n^5 y - 7776 n^6 \\ + 216 n^4 y^2 + 2592 n^5 y - 7776 n^6 \\ + 1296 n^5 y - 7776 n^6 \end{array}$$

$$y^6 - 35 n y^5 + 504 n n y^4 - 3780 n^3 y^3 + 15120 n^4 y^2 - 27216 n^5 y + 27216 n^6 \infty 0.$$

Vbi manifestum est, quòd  $504 n n$  (quantitas cognita tertii termini) major sit quadrato à  $\frac{35}{2} n$  (semisse quantitatis cognitæ secundi termini.) Neque ullus alius est casus, in quo quantitas, quâ veræ radices augentur, ad hoc efficiendum, ratione earum quæ datæ sunt, major requiritur.

Quoniam autem ultimus terminus hîc nullus reperitur, si id quidem non desideretur, augendus est adhuc aliquantillo valor radicum, quod sanè tam parum esse non potest, quin id ad effectum hunc sit satis.

*Quomodo  
faciendum  
sit, ut loca  
omnia*

Eodem modo si augere velimus dimensionum numerum alicujus Æquationis, & facere ut loca omnia termino-

minorum ejus sint repleta (ut si loco  $x^5$  \*\*\*\*  $-b \propto 0$ , *Æquationis  
sine comple-  
ta.*  
desideretur Æquatio, in quâ incognita quantitas sex di-  
mensiones habeat, & in qua nullus terminus desit): o-  
portet primum pro  $x^5$  \*\*\*\*  $-b \propto 0$ , scribere  $x^6$  \*\*\*\*  
 $-b x \propto 0$ ; deinde factâ  $y - a \propto x$ , habebitur  
 $y^6 - 6 a y^5 + 15 a^2 y^4 - 20 a^3 y^3 + 15 a^4 y^2 - 6 a^5 y + a^6 \propto 0$ .

Vbi liquet, quod, quantula etiam supposita fuerit quan-  
titas  $a$ , omnia tamen Æquationis loca non desinant ef-  
fe repleta.

Præterea possunt quoque radices alicujus Æquatio-  
nis, etiam si sint incognitæ, multiplicari aut dividi per  
quantitatem aliquam cognitam, quam libuerit.

Quod fit, supponendo, quantitatem incognitam,  
multiplicatam, aut divisam per quantitatem, quæ mul-  
tiplicare aut dividere debet radices, esse æqualem ali-  
cui alteri. Deinde multiplicando aut dividendo quan-  
titem cognitam secundi termini per hanc ipsam, quæ  
multiplicare aut dividere debet radices; & per ipsius  
quadratum, quantitatem tertii; & per ipsius cubum,  
quantitatem quarti, atque ita porrò usque ad ultimum.  
Id quod inservire potest, ut ad integros & rationales  
numeros reducantur fracti, aut sæpe etiam surdi, qui in  
Æquationum terminis reperiuntur.

Vt si habeatur

$$x^3 - x x \sqrt{3} + \frac{8}{27} x - \frac{8}{27 \sqrt{3}} \propto 0,$$

& ipsius loco alia desideretur, cujus omnes termini per  
numeros rationales exprimantur, oportet supponere  
 $y \propto x \sqrt{3}$ , & multiplicare per  $\sqrt{3}$  quantitatem cogni-  
tam secundi termini, quæ quoque est  $\sqrt{3}$ ; & per ipsius  
quadratum, quod est 3, quantitatem tertii, quæ est  $\frac{8}{27}$ ; &  
per ipsius cubum, qui est  $3 \sqrt{3}$ , quantitatem ultimi, vi-  
delicet  $\frac{8}{27 \sqrt{3}}$ , id quod facit  $y^3 - 3 y y + \frac{8}{9} y - \frac{8}{9} \propto 0$ .

K 2

Dein-

*Quomodo  
multiplicari  
vel dividi  
possint Æ-  
quationis  
radices, ipso  
incognitis.*

*Quâ ratio-  
ne fracti  
numeri ali-  
cujus Æ-  
quationis  
reducantur  
ad integros.*



Deinde si hujus loco adhuc alia requiratur, in qua quantitates omnes cognitæ solis integris numeris exprimantur; supponendo  $x \propto 3y$ , & multiplicando 3 per 3,  $\frac{26}{9}$  per 9, &  $\frac{8}{9}$  per 27, fiet Æquatio

$x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ . Vbi, cum radices sint 2, 3, & 4, sequitur alterius radices esse  $\frac{2}{3}$ , 1, &  $\frac{4}{3}$ ; & prioris Æquationis  $\frac{2}{9}\sqrt[3]{3}$ ,  $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$ , &  $\frac{4}{9}\sqrt[3]{3}$ .

Quo pacto  
quantitas  
cognita ali-  
cujus termi-  
ni Æqua-  
tionis aqua-  
lis fiat cui-  
cunque al-  
teri data.

Quæ operatio servire quoque potest ad faciendam quantitatem cognitam alicujus termini in Æquatione æqualem alicui alteri datæ. Vt si habeatur

$x^3 * - b b x + c^3 \propto 0$ , & ipsius loco alia sit invenien-  
da Æquatio, in qua quantitas cognita tertii termini,  
nimirum ea, quæ hic est  $b b$ , sit 3  $a a$ , non autem  $b b$ : su-  
ponendum est  $y \propto x \sqrt{\frac{3 a a}{b b}}$ , deinde verò scribendum,

$$y^3 * - 3 a a y + \frac{3 a^3 c^3}{b^3} \sqrt[3]{3} \propto 0.$$

Quod radi-  
ces, tam ve-  
ræ quam  
falsæ, possint  
esse reales,  
vel imagi-  
nariæ.

Ceterum radices tam veræ quàm falsæ non semper sunt reales, sed aliquando tantum imaginariæ: hoc est, semper quidem in qualibet Æquatione tot radices quot dixi, imaginari licet; verum nulla interdum est quantitas, quæ illis, quas imaginamur, respondet. Quemadmodum, tametsi tres imaginari possimus in hac,  $x^3 - 6 x x + 13 x - 10 \propto 0$ ; tamen una tantum est realis, nempe 2; & quod ad reliquas duas attinet, quamvis illæ augeantur, diminuantur, aut multiplicentur, sicut jam exposui; tamen non nisi imaginariæ fieri possunt.

Reductio  
Æquatio-  
num Cubi-  
carum, cum  
Problema  
est Planum.

Iam verò, postquam ad inveniendam constructionem alicujus Problematis pervenimus ad Æquationem, in quâ incognita quantitas tres habet dimensiones: Primum si quantitates cognitæ, quæ in ea reperiuntur, numeros fractos continent, ipsi ad integros, beneficio multiplicationis, modò explicatæ, reducendi sunt; At si surdos continent, tum quantum fieri potest, similiter  
ad

ad rationales sunt reducendi, tam per eandem hanc multiplicationem, quam per diversos alios modos, inventu satis faciles. Deinde examinando ordine quantitates omnes, quæ absque fractione ultimum terminum dividere possunt, videndum est, num aliqua ex ipsis, juncta cum quantitate incognita per signum + vel —, componere possit binomium, quod dividat totam summam; Id enim si contingat, Problema erit Planum, hoc est, construi poterit regulâ atque circino. Etenim aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsitâ; aut Æquatio, per ipsum divisa, ad duas dimensiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri queat.

Exempli gratiâ, si habeatur

$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ : ultimus terminus, qui est 64, dividi potest absque fractione per 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64. Quare ordine examinando hanc Æquationem, num dividi possit per aliquod ex binomiis  $yy - 1$  aut  $yy + 1$ ,  $yy - 2$  aut  $yy + 2$ ,  $yy - 4$  aut  $yy + 4$ , &c. invenitur dividi posse per  $yy - 16$ , hoc modo:

$$\begin{array}{r}
 + y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0 \\
 - 1y^6 - 8y^4 - 4yy - 16 \\
 \hline
 0 - 16y^4 - 128yy \\
 \phantom{0} 16 \phantom{yy} \phantom{- 128yy} \phantom{- 64 \infty 0} \\
 \phantom{0} 16 \phantom{yy} \phantom{- 128yy} \phantom{- 64 \infty 0} \\
 \hline
 + y^4 + 8yy + 4 \infty 0
 \end{array}$$

Incipio ab ultimo termino, & divido — 64 per — 16, quod facit + 4, quæ repono in quotiente; deinde multiplico + 4 per + yy, & fit + 4 yy, quare in summa dividenda repono — 4 yy. Quippe scribendum semper est signum + vel — planè contrarium illi, quod produ- *Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem.* citur per multiplicationem. Addendo autem — 124 yy ad — 4 yy, invenio — 128 yy, quod rursus divido per

K 3

— 16,



— 16, & provenit + 8yy, reponendum in quotiente. Multiplicando verò hoc ipsum per yy, exsurgit — 8y4, addendum termino dividendo, qui etiam est — 8y4. quæ quidem simul conficiunt — 16y4, quod per — 16 divido, & fit + 1y4 pro quotiente, & — 1y6 addendum ipsi + 1y6, id quod facit 0, monstratque divisionem esse ad finem perductam. Quòd si verò quantitas aliqua superfuisset, vel aliquis præcedentium terminorum absque fractione dividi non potuisset, manifestum fuisset, divisionem nullo modo fieri potuisse.

Similiter si habeatur  $y^6 + \frac{aa}{cc}y^4 - \frac{a^4}{c^4}yy - \frac{a^6}{acc^4} \propto 0$ . ultimus terminus absque fractione dividi potest per a, aa, aa + cc, a<sup>3</sup> + acc, & similes. Sed duas sufficit ex illis considerare, nempe aa, & aa + cc; aliæ enim, cum in quotiente plures paucioresve dimensiones exhibeant, quàm quidem in quantitate cognita penultimi termini reperiuntur, impedirent, ut divisio fieri posset. Vbi notandum, me ipsius y<sup>6</sup> dimensiones tantum pro tribus dimensionibus habere, cum non reperiatur y<sup>5</sup>, nec y<sup>3</sup>, nec y in tota summa. Examinando igitur binomium yy — aa — cc, invenitur, divisionem per illud fieri posse, hoc modo:

$$\begin{array}{r}
 + y^6 + \frac{aa}{cc}y^4 - \frac{a^4}{c^4}yy - \frac{a^6}{acc^4} \propto 0, \\
 \hline
 - y^6 - \frac{aa}{cc}y^4 - \frac{a^4}{c^4}yy - \frac{a^6}{acc^4} \\
 \hline
 0 - \frac{aa}{cc} - \frac{a^4}{c^4} - \frac{a^6}{acc^4} \\
 \hline
 + y^4 + \frac{aa}{cc}yy + \frac{a^4}{acc^4} \propto 0.
 \end{array}$$

Id quod monstrat radicem quæsitam esse aa + cc. Quemadmodum facile per multiplicationem probari potest.

At

LIBER TERTIUS. 79

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita N  
totam Æquationis propositæ summam dividere possit, *Quanam*  
certum est, Problema quod ab ea dependet, esse Soli- *Problemata*  
dum. Nec minus vitium est, constructionem ejus postea *sint Solida,*  
per rectas lineas & circulos tentare, quàm ad constru- *Æquationis*  
ctionem illorum, in quibus non nisi circulis est opus, *existente*  
sectiones Conicas adhibere: siquidem quicquid igno- *Cubicâ.*  
rantiam aliquam testatur, peccatum dici meretur.

Porrò si habeatur Æquatio, in quâ incognita quan- *Reductio*  
titas quatuor habeat dimensiones: eodem modo, sub- *Æquatio-*  
latis primùm surdis & fractis numeris; (si qui sunt) vi- *nem qua-*  
dendum est, num inveniri possit binomium, compo- *tuor dimen-*  
tum ex incognita quantitate + vel — quantitate aliqua, *sionum,*  
quæ absque fractione ultimum terminum dividit, quod *cum Proble-*  
dividat totam summam. Hoc enim si inveniatur; vel *ma est Pla-*  
quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsitæ; vel *num. Et*  
saltem post divisionem hanc relinquentur tantùm in *quanam il-*  
Æquatione tres dimensiones, ita ut illa deinde rursus *la sint, qua*  
eodem modo sit examinanda. Quòd si verò tale bino- *Solida sunt*  
mium non inveniatur, oportebit augendo aut dimi- *dicenda.*  
nuendo valorem radicis, secundum summæ terminum  
tollere, modo paulò ante explicato: & deinde ipsam  
ad aliam reducere, quæ tres duntaxat dimensiones con-  
tineat. Id quod hoc modo fit:

loco  $+x^4 \cdot p \cdot x \cdot q \cdot x \cdot r \infty 0,$

scribendum est

$$+y^6 \cdot 2py^4 + \frac{p^2}{4r}yy - qq \infty 0.$$

Et quod ad signa + & — attinet, quæ omisi, si ha-  
beatur + p in Æquatione præcedente, in hac ponend-  
um est + 2 p; aut si habeatur — p, ponendum est — 2 p.  
& contra, si habeatur ibi + r, ponendum hîc est + 4 r;  
aut si habeatur ibi — r, ponendum hîc est + 4 r. & sive  
illic

*Reductio*  
*Æquationis*  
*Quadrato-*  
*quadrata*  
*ad Cubi-*  
*cam.*



illic fuerit  $+q$ , sive  $-q$ , semper tamen hic ponendum est  $-qq$ , &  $+pp$ . saltem si  $x^4$  &  $y^6$  signis  $+$  notata supponantur. quippe contrarium fieri deberet, si supponeretur ibi signum  $-$ .

Exempli causâ, si habeatur  $+x^4 - 4xx - 8x + 35$   $\infty 0$ , scribendum ejus loco est  $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ . Cum enim quantitas, quam nominavi  $p$ , sit  $-4$ , ponendum est  $-8y^4$  pro  $2py^4$ . & cum illa, quam vocavi  $r$ , sit  $35$ , ponendum est  $+\frac{16}{140}yy$ , hoc est,  $-124yy$ , loco  $+\frac{pp}{4r}yy$ . Et denique cum  $q$  sit  $8$ , ponendum est  $-64$ , pro  $-qq$ .

Eodem modo pro  $+x^4 - 17xx - 20x - 6 \infty 0$ , scribendum est  $+y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \infty 0$ . Nam  $34$  est duplum ipsius  $17$ , &  $313$  est hujus quadratum junctum quadruplo ipsius  $6$ , &  $400$  est quadratum ipsius  $20$ .

Similiter quoque loco

$$+z^4 - \frac{1}{2}aa - cc - \frac{a^3}{acc}z - \frac{5}{16}a^4 \infty 0,$$

scribendum est

$$y^6 - \frac{aa}{2cc}y^4 - \frac{a^4}{c^2}yy - \frac{a^6}{aac^2} \infty 0.$$

quippe  $p$  est  $+\frac{1}{2}aa - cc$ , &  $pp$  est  $\frac{1}{4}a^4 - aacc + c^4$ , &  $4r$  est  $-\frac{5}{4}a^4 + aacc$ , ac tandem  $-qq$  est  $-a^6 - 2a^4cc - aac^4$ .

Postquam igitur Æquatio sic ad tres dimensiones est reducta, quærendus est valor ipsius  $yy$ , methodo jam explicatâ. Quod si verò ita inveniri nequeat, non opus erit ulterius progredi. Infallibiliter enim inde sequitur, Problema esse Solidum. Sin autem inveniat, poterit ejus beneficio Æquatio præcedens in duas alias dividi, in quarum utrâque incognita quantitas duas tantum dimensiones habeat, quarumque radices ab il-

lius

lius radicibus non differant. Nimirum loco *Æquationis*

$+x^4 * . pxx . qx . r \infty 0$ ,  
scribendæ sunt hæ duæ aliæ

$$+xx - yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \infty 0, \&$$

$$+xx + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \infty 0.$$

Et quod attinet ad signa  $+$  &  $-$ , quæ omisi, si in *Æquatione* præcedente habeatur  $+p$ , ponendum erit in utraque harum duarum  $+\frac{1}{2}p$ ; &  $-\frac{1}{2}p$ , si in priore habeatur  $-p$ . Ponendum verò est  $+\frac{q}{2y}$  in una, ubi habetur  $-yx$ ; &  $-\frac{q}{2y}$  in altera, ubi habetur  $+yx$ , prout habetur  $+q$  in prima. Et contra, si habetur ibi  $-q$ , ponendum est  $-\frac{q}{2y}$  in illa, ubi habetur  $-yx$ ; &  $+\frac{q}{2y}$  in altera, ubi habetur  $+yx$ . Vnde consequenter facile est omnes *Æquationis* propositæ radices cognoscere, atque hinc Problema, cujus solutionem continet, construere, adhibendo tantum circulos & lineas rectas.

Exempli gratiâ, quia pro  $x^4 * -17xx - 20x - 6 \infty 0$  ponendo  $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \infty 0$  invenitur  $yy$  esse 16: hinc loco *Æquationis*  $+x^4 * -17xx - 20x - 6 \infty 0$  scribendæ sunt hæ duæ  $+xx - 4x - 3 \infty 0$  &  $+xx + 4x + 2 \infty 0$ . Nam  $y$  est 4,  $\frac{1}{2}yy$  est 8,  $p$  est 17, &  $q$  est 20; ita ut  $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$  faciat  $-3$ , &  $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$  faciat  $+2$ . E quibus binis *Æquationibus* si extrahantur radices, invenientur eadem omnes, quæ eliciuntur ex ea, in qua habetur  $x^4$ . Nimirum una vera, quæ est  $\sqrt{7+2}$ , & tres falsæ, quæ sunt  $\sqrt{7-2}$ ,  $2+\sqrt{2}$ , &  $2-\sqrt{2}$ .

Similiter cum habetur  $x^4 * -4xx - 8x + 35 \infty 0$ :

L

quo-



quoniam radix ex  $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$  rursus est 16, hinc scribere oportet

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \& xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Hic enim  $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$  facit 5, &  $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$  facit 7. Et quandoquidem nulla in utraque harum  $\mathcal{A}$ -quationum invenitur radix, sive vera, sive falsa, liquidò constat, quatuor radices  $\mathcal{A}$ quationis, ex qua deductæ sunt, imaginarias esse, & Problema, cujus gratiâ  $\mathcal{A}$ -quatio inventa est, naturâ suâ esse Planum; sed nullâ ratione construi posse, cum datæ quantitates conjungi nequeant.

Sic etiam cum habetur

$$\mathcal{Z}^4 * + \frac{1}{2}aa - a^3 \mathcal{Z} - \frac{1}{16}a^4 \infty 0 =$$

quia pro  $yy$  invenitur  $aa + cc$ , scribendum est

$$\mathcal{Z}\mathcal{Z} - \mathcal{Z}\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} \infty 0, \&$$

$$\mathcal{Z}\mathcal{Z} + \mathcal{Z}\sqrt{aa + cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} \infty 0.$$

Nam  $y$  est  $\sqrt{aa + cc}$ , &  $+\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$  est  $\frac{3}{4}aa$ , &  $\frac{q}{2y}$  est

○  $\frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$ . Vnde cognoscitur, valorem ipsius  $\mathcal{Z}$  esse

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}, \text{ vel}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa + cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

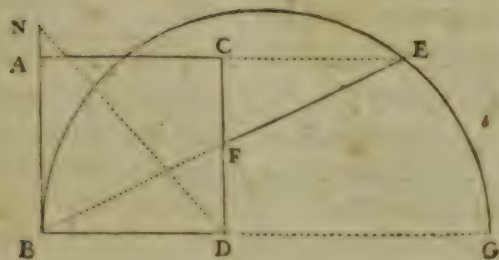
■ Et quandoquidem supra feceramus  $\mathcal{Z} + \frac{1}{2}a \infty x$ , innotescit, quantitatem  $x$ , ad quam cognoscendam omnes hæc operationes instituiamus, esse

$$+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Verum enimverò ut utilitas hujus regulæ melius cognosci possit, operæ pretium est, ut illam Problemati alicui resolvendo applicemus.

Exemplum  
ostendens  
usum hæ-

Datis quadrato  $AD$ , & rectâ lineâ  $BN$ ; oporteat producere latus  $AC$  usque ad  $E$ , ita ut  $EF$ , ducta ab  $E$  versùs



versus B, sit æqualis ipsi N B. Docet Pappus, quòd, *rum rebus  
thomum.*  
postquam primum latus B D productum est usque in G, ita ut D G æquetur DN, circulusque descriptus est, cujus diameter B G, producendum deinde tantum sit latus A C, donec circumferentiæ hujus circuli occurrat in puncto E, quod requirebatur. Quæ sanè constructio investigatu iis, quos lateret, difficilis satis foret: Etenim quærendo illam per methodum hîc propositam, nunquam certè cogitarent assumendam esse D G pro quantitate incognita, sed potius C F vel F D vel C E: cum hæ tales sint, quæ facillimè omnium nos ad Æquationem perducant; sed ad Æquationem quæ non ita facile absque regula, quam jam exposui, explicari posset. Quippe ponendo  $a$  pro B D vel C D,  $c$  pro E F, &  $x$  pro D F, sit C F  $\propto a - x$ ; Et ut C F seu  $a - x$  est ad F E seu  $c$ , sic F D seu  $x$  est ad B F, quæ proinde erit  $\frac{cx}{a-x}$ . Deinde propter triangulum rectangulum B D F, cujus unum latus est  $x$ , & alterum  $a$ , quadrata ipsorum, utpote  $xx + aa$ , æqualia sunt quadrato basis, quod est  $\frac{ccxx}{xx - ax + aa}$ . Vnde multiplicando totum per  $xx - 2ax + aa$ , invenietur Æquatio  $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto ccxx$ , vel  $x^4 - 2ax^3 + \frac{2aa}{cc}xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$ .

L. 2

Vbi



Q Vbi per præcedentes regulas cognoscitur, radicem ejus, quæ est longitudo lineæ DF, esse

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Quòd si verò BF vel BE poneretur pro quantitate incognita, perveniremus rursus ad Æquationem, in qua quatuor dimensiones essent, sed quæ facilius reduci posset; & ad quam etiam satis faciliè perveniretur. Cum aliàs, si pro ea supponeretur DG, multò difficilius ad Æquationem, sed quæ simplicissima foret, perveniremus. Quod quidem hìc refero, ut vobis indicem, quòd, cum Problema propositum non est Solidum, si quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compositam, tum communiter aliâ viâ ad simpliciorē Æquationem perveniri possit.

Possē præterea hìc diversas regulas adjungere, reducendi Æquationes, quæ ad Cubum vel Quadrato-quadratum adscendunt, verum superflue forent: quandoquidem constructionem eorum Problematum, quæ Plana sunt, semper per hæc invenire licet.

*Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadrato-quadratum excedunt.*

Possē quoque alias afferre pro Æquationibus, quæ ad Surdesolidum, vel Quadrato-cubum, aut altiùs asurgunt; sed malo omnes sub una comprehendere, dicendo in genere: quòd, postquam aliquis illas ad eandem formam, quam habent illæ, quæ æquè multis dimensionibus constant, & ex multiplicatione duarum aliarum, pauciorum dimensionum, producantur, reducere conatus fuerit, atque modos omnes, quibus hæc multiplicatio fieri possit, enumeraverit, nec juxta aliquem ex ipsis succedere compererit, asseverandum sit, illas ad simplices reduci non posse. Ita ut, si incognita quantitas 3 vel 4 dimensiones habeat, Problema, in cuius generem hæc aspertæ quantitates, Solidum existat: & sit

vel

vel 6 dimensiones habeat, uno gradu magis sit compositum. Et sic de cæteris.

Cæterum omisi hæc demonstrationes plurimorum, quæ dixi: quoniam ita faciles mihi viæ sunt, ut, si modò operam, methodicè examinandi, num erraverim, impenderitis, illæ suâ sponte vobis sint occurruræ. quin etiam utiliùs erit ipsas hæc ratione, quàm si legantur, addiscere.

Iam verò postquam compertum est Problema propositum esse Solidum; sive *Æquatio*, per quam illud queritur, ad Quadrato-quadratum adscendat; sive non altius quàm ad Cubum assurgat: potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum Sectionum, quæcunque illa tandem sit; aut etiam per ipsarum particulam aliquam, quantumlibet exiguam, nec utendo nisi rectis lineis & circulis. Verùm suffecerit regulam generalem hæc adducere, inveniendi radices omnes ope Parabolæ, quandoquidem hæc aliquo modo est simplicissima.

Primò igitur tollendus est secundus *Æquationis* propositæ terminus, modò jam non abfuerit, atque ita *Æquatio* reducenda ad hanc formam:  $x^3 \propto * apz. a a q,$  si incognita quantitas tres tantum dimensiones habeat; aut ad hanc:  $x^4 \propto *. apz. a a qz. a^3 r,$  si quatuor obtineat dimensiones; Seu sumendo  $a$  pro unitate, ad hanc:  $x^3 \propto *. pz. q;$  aut ad hanc  $x^4 \propto *. pz. qz. r:$

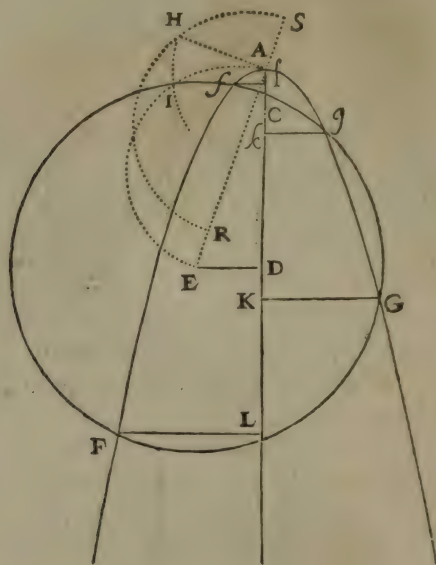
Deinde supponendo Parabolam  $EAG$  jam descriptam esse, & axem ejus esse  $ACDKL$ , latusque rectum  $a$  seu  $1$ , cujus  $AC$  sit dimidium, & denique punctum  $C$  esse intra hanc Parabolam, cujus vertex sit  $A$ : Oportet facere  $CD \propto \frac{1}{2}p$ , eamque sumere in linea  $AC$ , continuata versus  $C$ . Hæc *Æquatione* habetur  $x^3 \propto *. pz. q;$  si  $x^4 \propto *. pz. qz. r:$











omnes *Æ*quationis radices, tam veræ, quàm falsæ. Nimirum si quantitas *q* sit adfecta signo +, veræ radices erunt illæ harum perpendicularium, quæ ex eadem Parabolæ parte, qua est *E* circuli centrum, reperientur, ut *FL*; & reliquæ, ut *GK*, erunt falsæ. Sed contra, si hæc quantitas *q* notata fuerit signo —, veræ erunt illæ, quæ ex altera sunt parte; & falsæ, seu minores quàm nihil, quæ ex parte illa, ubi est centrum circuli *E*. Et denique si hic circulus non secat, nec tangit Parabolam in aliquo puncto, indicio est, *Æ*quationem nullam admittere radicem sive veram, sive falsam, sed tantum imaginarias. Adeò ut hæc regula omnium, quas quis exoptare queat, generalissima sit & perfectissima.

Quorum quidem demonstratio admodum facilis est.  
Etenim







Si itaque juxta hanc regulam inter lineas  $a$  &  $q$  duas libeat medias proportionales invenire, nemo ignorat, ponendo  $\tilde{x}$  pro una, esse ut  $a$  ad  $\tilde{x}$ , sic  $\tilde{x}$  ad  $\frac{z \cdot z}{a}$ , &  $\frac{z \cdot z}{a}$  ad  $\frac{z^3}{a \cdot a}$ ; *Invenio duarum medianum proportionalem.*

ita ut habeatur Aequatio inter  $q$  &  $\frac{z^3}{a \cdot a}$ , utpote,  $\tilde{x}^3 \propto ** a \cdot a \cdot q$ . Deinde descriptâ Parabolâ  $F A G$ , unâ cum segmento sui axis  $A C$ , quod est  $\frac{1}{2}$ , semissis nempe lateris recti, erigenda est ex puncto  $C$  perpendicularis  $C E$ , æqualis  $\frac{1}{2} q$ , atque ex centro  $E$  per  $A$  describendus circulus  $A F$ , ut obtineantur  $F L$  &  $F A$ , duæ mediæ quæsitæ.

Similiter si dividere velimus angulum  $N O P$ , sive arcum, portionemve circuli  $N Q T P$  in tres æquales partes; si sumatur  $N O \propto 1$  pro radio circuli, &  $N P \propto q$  pro subtensâ arcus dati, ac  $N Q \propto \tilde{x}$  pro subtensâ trientis hujus arcus, exsurgit Aequatio  $\tilde{x}^3 \propto * 3 \tilde{x} - q$ . Etenim ductis lineis  $N Q$ ,  $O Q$ , &  $O T$ ; si  $Q S$  parallela fiat ipsi  $T O$ , patet, quod, sicut  $N O$  est ad  $N Q$ , sic  $N Q$  sit ad  $Q R$ , &  $Q R$  ad  $R S$ ; adeo ut, cum  $N O$  sit  $1$ , &  $N Q \tilde{x}$ ,  $Q R$  futura sit  $\tilde{x} \tilde{x}$ , &  $R S \tilde{x}^3$ . Et quia tantum  $R S$  seu  $\tilde{x}^3$  impedit, quod minus linea  $N P$ , quæ est  $q$ , tripla sit lineæ  $N Q$ , quæ est  $\tilde{x}$ , habebitur

$$q \propto 3 \tilde{x} - \tilde{x}^3, \text{ vel } \tilde{x}^3 \propto * 3 \tilde{x} - q.$$

Deinde descriptâ Parabolâ  $F A G$ , in qua  $C A$  sit æqualis semissi lateris recti principalis, si sumatur  $C D \propto \frac{1}{2}$ , & perpendicularis  $D E \propto \frac{1}{2} q$ ; secabit circulus  $F A g G$ , centro  $E$  per  $A$  descriptus, hanc Parabolam in tribus punctis  $F, g$ , &  $G$ , non numerato puncto  $A$ , quod est ejus vertex. Id quod indicat in hac Aequatione tres haberi radices, nimirum duas  $G K$  &  $g k$ , quæ veræ sunt, & tertiam, nempe  $F L$ , quæ est falsâ; Atque ex hisce duabus veris minorem  $g k$  illam esse, quam pro quæsitâ linea  $N Q$  sumere oportet. Altera enim  $G K$ , æqualis

M 2

est





$$x^3 \propto^* - p x + q.$$

$$x^3 \propto^* + p x + q.$$

$$x^3 \propto^* + p x - q.$$

Si autem habeatur  $x^3 \propto^* - p x + q$ , regula, cujus inventionem Cardanus cuidam, Scipioni Ferro, tribuit, nos docet, radicem esse

$$x \propto \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Quemadmodum etiam, si habeatur  $x^3 \propto^* + p x + q$ , & Quadratum semissis ultimi termini majus sit Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi; similis ferè regula nos docet, radicem esse

$$x \propto \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}.$$

Vnde apparet, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad Aequationem unius ex hisce duabus formis reducuntur, construi semper possint, ut Conicas sectiones adhibere non sit opus, nisi ad extrahendas radices Cubicas ex quibusdam quantitibus datis, hoc est, ad inveniendas duas medias proportionales inter hasce quantitates & unitatem.

Deinde si habeatur  $x^3 \propto^* + p x + q$ , & Quadratum semissis ultimi termini non sit majus Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi termini; supponendo Circulum N Q P V, cujus semidiameter N O sit  $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ , hoc est, media proportionalis inter trientem quantitatis datæ  $p$  & unitatem; tum etiam supponendo lineam N P huic Circulo esse inscriptam, quæ sit  $\frac{2}{3}q$ , hoc est, quæ sit ad alteram quantitatem datam  $q$ , ut est unitas ad trientem ipsius  $p$ ; dividendus tantum est uterque arcus N Q P, N V P in tres æquales partes, eritque N Q, subtensa trientis unius arcus, unà cum N V, subtensa trientis alterius, æqualis radici quæsitæ.

M 3

Dent





simpliciore esse, quàm si exprimantur per relationem, quam habent ad subtenfas certorum arcuum, seu Circuli portionum, quarum triplum est datum. Ita ut Cubicarum *Æquationum* radices illæ omnes, quæ per Cardani regulas exprimi nequeunt, æquè clarè aut etiam clariùs per modum hùc propositum exprimi possint.

Si enim, exempli causâ, radicem cognoscere arbitremur hujus *Æquationis*  $x^3 \propto^* + p x + q$ : quia ipsam compositam esse scimus ex duabus lineis; quarum una est latus Cubi, cujus contentum est summa, quæ conflatur ex  $\frac{1}{2} q$ , & ex latere Quadrati, cujus contentum est  $\frac{1}{4} q q - \frac{1}{27} p^3$ ; & altera latus alterius Cubi, cujus contentum est differentia, quæ est inter  $\frac{1}{2} q$ , & latus Quadrati, cujus contentum est  $\frac{1}{4} q q - \frac{1}{27} p^3$ , (quod illud omne est, quod ex Cardani regula addiscimus); Dubitandum non est, quin æquè distinctè aut etiam distinctiùs radix hujus  $x^3 \propto^* + p x - q$  cognoscatur, si ea consideretur inscripta Circulo, cujus semidiameter sit  $\sqrt{\frac{1}{3} p}$ , in quo pro subtenfa arcus intelligatur, cujus tripli subtenfa sit  $\frac{27}{p}$ . Quin etiam hî termini prioribus illis multò minùs sunt intricati, & qui etiam multò breviores reddentur, si peculiari aliquâ notâ ad exprimendas hæc subtenfas, quemadmodum fit notâ  $\sqrt{C}$ . ad exprimendum latus Cubicum, uti velimus.

Possunt quoque per regulas hùc supra explicatas deinceps exprimi radices *Æquationum* omnium, quæ ad Quadrato-quadratum adscendunt; ita ut nesciam, quid in hac materia desiderari amplius possit. Neque enim natura harum radicum permittit, ut terminis exprimantur simplicioribus, nec ut per constructionem aliquam, quæ una & generalior & simplicior sit, determinentur.

Verum

*Æquationum Cubicarum: ad per consequens illarum omnium, quæ Quadrato-quadratum non excedunt.*



*Cur Proble-  
mata Solida  
construi non  
possint abs-  
que sectioni-  
bus Conicis,  
nec qua  
magis com-  
posita sunt  
sine aliis li-  
neis, magis  
compositis.*

Verum quidem est, me nondum dixisse, quibus rationibus nitar, quòd affirmare audeam, utrùm res aliqua fieri possit nec ne. At verò si consideretur, quomodo per methodum qua utor, id omne, quod sub Geometricam contemplationem cadit, ad unum idemque genus Problematum reducatur, quod est, ut quæ- ratur valor radicum alicujus *Æquationis*; satis judicabitur, non difficile esse ita enumerare vias omnes, quibus inveniri possunt: ut hoc sufficiat ad ostendendum, generalissimam & simplicissimam fuisse selectam. Et speciatim, quod spectat ad Solida Problemata, quòd videlicet, ut dixi, citra lineam aliquam magis compositam quàm circulearem construi non possint, vel inde evidens esse potest, quòd illa omnia ad duas constructiones reducantur; in quarum unâ duo simul puncta requiruntur, quæ inter duas datas lineas duas medias proportionales determinent; & in alterâ duo puncta, quæ datum arcum in tres æquales partes dividant. Etenim cum Circuli curvatura tantum dependeat à simplici relatione omnium partium ad punctum unum, quod est ipsius centrum; inde fit, ut eo quoque non nisi ad unum solummodo punctum inter duas extremas determinandum uti possimus, utputa ad inveniendam unam mediam proportionalem inter duas datas, aut ad datum arcum in duas *Æquales* partes dividendum. At verò curvatura Conicarum Sectionum, quæ semper à duabus diversis rebus dependet, ad duo diversa puncta determinanda inservire potest.

Ob eandem rationem fieri nequit, ut aliquod eorum Problematum, quæ uno gradu magis quàm Solida sunt composita, & inventionem 4 mediarum proportionalium, aut anguli in 5 æquales partes divisionem, præsupponunt, ope alicujus Conicæ sectionis construi

strui possit. Quare nihil melius hîc à me fieri posse confido, quàm si regulam generalem tradam construendi illa ope lineæ curvæ, quæ describitur per intersecctionem Parabolæ & lineæ rectæ, quemadmodum supra fuit explicatum. Affirmare enim audeo, nullam, quæ huic effectui inservire queat, simpliciorẽ in rerum natura inveniri. Atque etiam vidistis, quomodo hæc linea immediatè sectiones Conicas sequatur in quæstione tantopere à Veteribus quæsitâ, cujus solutio ordine omnes curvas lineas, in Geometriam recipiendas, exhibet.

Iam nostis, cùm investigantur quantitates, quæ ad constructionem horum Problematum requiruntur, quâ ratione semper ad Æquationem aliquam reduci possint, quæ non nisi ad Quadrato-cubum, aut Surdesolidum adscendat. Deinde etiam nostis, quomodo, augendo valorem radicum hujus Æquationis, fieri semper possit, ut radices hæc omnes veræ evadant, ac simul ut quantitas cognita tertii termini excedat quadratum à semisse quantitatis cognitæ secundi termini. Et denique, quo pacto, si tantum ad Surdesolidum adscendat, ipsa ad Quadrato-cubum attolli possit, fierique ut nullus terminorum desit.

*Modus generalis construendi Problemata omnia, reducenda ad Æquationem, sex dimensiones non excedentem.*

Quocirca ut difficultates omnes, quæ quidem hîc occurrunt, per eandem regulam resolvi queant, desidero ut hæc omnia fiant, & hæc ratione reducantur semper ad Æquationem hujus formæ

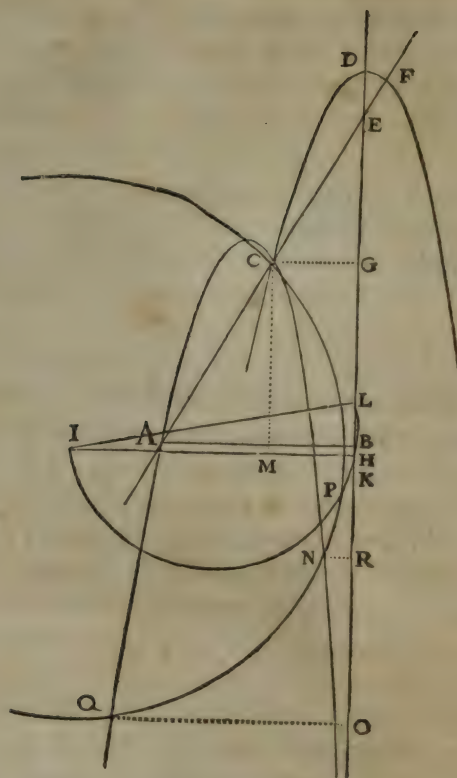
$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + sy^2 - ty + v = 0,$$

in qua quantitas vocata  $q$ , major sit quadrato à semisse ejus, quæ nominatur  $p$ .

N

Post





Post hæc ductâ lineâ rectâ BK, utrinque indefinitâ, erectâque ad eandem ex puncto B perpendiculari AB, cujus longitudo sit  $\frac{1}{2}p$ ; describenda est in plano aliquo separato Parabola, ut CDF, cujus latus rectum principale sit  $\sqrt{\frac{r}{v} + q - \frac{1}{4}pp}$ . quod brevitatis causâ vocabo  $n$ . Tum ponendo planum, in quo Parabola existit, supra planum in quo sunt lineæ AB & BK, ita ut axis ejus DE omnino congruat cum linea rectâ BK; sum-

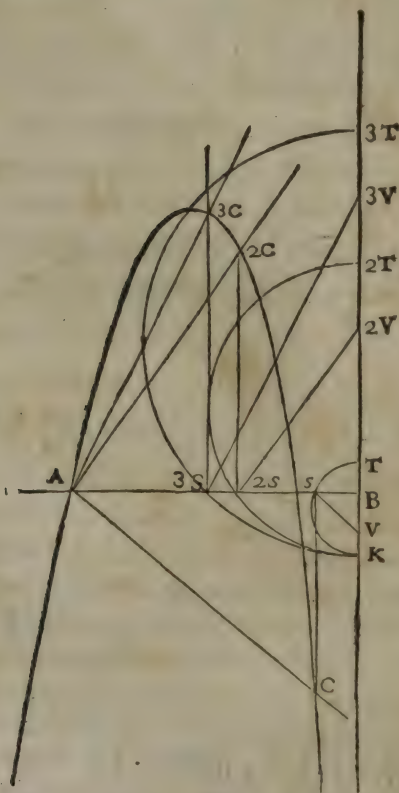
sumptoque segmento hujus axis, quod inter puncta E & D intercipitur, æquali  $\frac{2\sqrt{v}}{p n}$ , adplicanda est longa regula ad punctum E, ita ut, postquam ad punctum A plani inferioris quoque est adplicata, semper maneat adjuncta hisce duobus punctis, interea dum Parabola secundum lineam B K, ad quam ejus axis est adplicatus, vel elevatur vel deprimitur. quâ quidem ratione Parabolæ atque regulæ intersectio, quæ fit in puncto C, lineam curvam A C N designabit, illam quippe quâ ad propositi Problematis constructionem indigebimus. Etenim eâ sic descriptâ, si fiat B L æqualis D E, hoc est,  $\frac{2\sqrt{v}}{p n}$ , ita ut punctum L cadat in lineam B K, versùs partem, quam respicit Parabolæ vertex, Tum verò in eadem linea à puncto L versùs B sumatur L H æqualis  $\frac{r}{2 n \sqrt{v}}$ , Et ex puncto H, sic invento, ad partem curvæ A C N ducatur ad angulos rectos ipsi B K, linea H I, æqualis  $\frac{r}{2 n n} + \frac{\sqrt{v}}{n n} + \frac{p r}{4 n n \sqrt{v}}$ , quam abbreviandi causâ nominabo  $\frac{m}{n n}$ , Ac, postquam conjuncta sunt puncta L & I, circulo L P I, cujus diameter I L, inscribatur linea L P, æqualis  $\sqrt{\frac{r^2 + p \sqrt{v}}{n n}}$ , Tandemque ex centro I per punctum P, sic inventum, circulus describatur P C N: secabit hic circulus vel tanget lineam curvam A C N, in tot punctis, quot Æquatio admittet radices. Ita ut perpendiculares, quæ ex hisce punctis ad lineam B K deducuntur, Æquationis hujus futuræ sint radices, & nullam hæc regula patiatur exceptionem neque defectum. Etenim si quantitas  $r$  adeò magna esset respectu aliarum,  $p, q, r, t$ , &  $v$ , ut linea L P major inveniretur diametro circuli I L, sic ut eidem inscribi non posset, nulla itidem foret radix in Æquatione proposita, quæ

N 2

non



non esset imaginaria; nec etiam ulla foret radix, si circulus IP adeo parvus esset, ut curvam ACN in nullo  
 z. prorsus puncto secaret. Hanc autem curvam in 6 diversis punctis secare potest, ita ut hic sex diversæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cum illam in paucioribus secat, hoc indicio est, quasdam ex hisce radicibus inter se æquales esse, aut ipsarum aliquas esse tantum imaginarias.



Quod si verò ratio hæc describendi lineam ACN  
 per

per motum Parabolæ vobis videatur incommoda, facile est plures alios modos in eundem finem excogitare. Vt, manentibus eisdem quantitatibus pro AB & BL, nec non eadem pro BK, quæ pro latere recto principali Parabolæ supponebatur; describendus est tantum semicirculus KST, centro ejus ad libitum in linea BK assumpto, ita tamen ut lineam AB alicubi secet, ut in puncto S. Nam postquam à puncto T, ubi terminatur, versùs K assumpta fuerit linea TV, æqualis BL, jungaturque SV, atque à puncto A junctæ SV parallela ducatur AC, quæ rectæ SC, ductæ per punctum S, ipsi BK parallelæ, occurrat in puncto C: Erit punctum C, ubi hæ duæ parallelæ sibi mutuò occurrunt, unum ex punctis per quod quæsitæ curva transire debet. Eodem modo inveniri possunt tot alia puncta, quot quis voluerit.

Quorum omnium demonstratio satis facilis est.

Si enim regula AE unâ cum Parabola FD adplicetur ad punctum C, (eodem modo, quo constat eas ad punctum C in curva ACN mutuâ intersectione designandum esse adplicandas) & quidem CG vocetur: erit  $GD \frac{yy}{n}$ , cum latus rectum, quod est  $n$ , sit ad CG sicut CG ad GD. Auferendo autem DE, quæ est  $\frac{2y}{p}v$  à GD, relinquetur  $\frac{yy}{n} - \frac{2y}{p}v$ , pro GE. Deinde quia AB est ad BE, ut CG ad GE: hunc cum AB sit  $\frac{1}{2}p$ , BE erit  $\frac{py}{2n} - \frac{v^2}{ny}$ .

Eâdem ratione si punctum curvæ C supponatur inventum esse per intersectionem linearum rectarum, SC, parallelæ ipsi BK, & AC, parallelæ ipsi SV; SB, quæ æquatur ipsi CG, est  $y$ : & cum BK æquetur lateri recto Parabolæ, quod nominavi  $n$ , BT erit  $\frac{yy}{n}$ . est enim ut KB ad BS, ita BS ad BT. Cumque TV eadem sit

N 3

quæ



quæ BL, hoc est,  $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$ , BV erit  $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$ . Sicut autem SB est ad BV, sic AB est ad BE, quæ ideo est  $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$ , ut antè. Vnde apparet, unam eandemque lineam esse, quæ utroque hoc modo describitur.

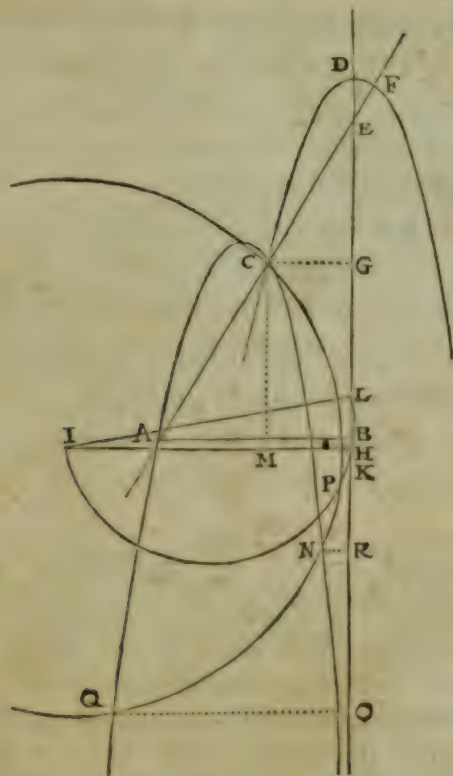
Porrò, quoniam BL & DE sibi invicem æquales sunt, æquales quoque inter se erunt DL & BE; ita ut, addendo LH, quæ est  $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$ , ad DL, quæ est  $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$ , habeatur tota DH, nempe  $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$ , è qua auferendo GD, quæ est  $\frac{yy}{n}$ , relinquetur GH, videlicet  $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$ . Id quod ordine scribo, hoc pacto,  $GH \propto \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$ .

Et fit quadratum ex GH,

$$\frac{y^6 - py^5 - \frac{t}{\sqrt{v}}y^4 + \frac{2\sqrt{v}}{n}y^3 - \frac{p\sqrt{v}}{4v}y^2 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y - \frac{t^2}{4v}}{nnyy}.$$

Quocunque autem alio loco hujus curvæ imaginari libeat punctum C, utputa versùs N, vel versùs Q, semper tamen inveniatur, quadratum lineæ rectæ, quæ inter punctum H, & punctum ubi perpendicularis deducta ex puncto C cadit super BH, intercipitur, iisdem hisce terminis iisdemque signis + & - exprimi posse.

Postea



Postea cum  $IH$  sit  $\frac{m}{nn}$ , &  $LH$   $\frac{s}{2n\sqrt{v}}$ ,  $IL$  erit  
 $\sqrt{\frac{mm}{nn} + \frac{ss}{2n\sqrt{v}}}$  (propter angulum rectum  $IHL$ ); &  
 cum  $LP$  sit  $\sqrt{\frac{s}{nn} + \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$ ,  $IP$  vel  $IC$  erit  
 $\sqrt{\frac{mm}{nn} + \frac{ss}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}}$ , (propter angulum rectum  
 $IPL$ ). Dein ductâ  $CM$  perpendiculari ad  $IH$ , erit  
 $IM$  differentia, quæ est inter  $IH$  &  $HM$  vel  $CG$ , hoc  
 est



est, inter  $\frac{m}{nn}$  &  $y$ ; ita ut quadratum ejus semper sit  $\frac{mm}{n^4}$

$-\frac{2my}{nn} + yy$ , quod à quadrato ex IC ablatum relinquit

$\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$ , pro quadrato ex CM, quod est æquale quadrato ex GH, jam invento. Aut etiam faciendo ut hæc summa quemadmodum altera divisa sit per  $nn yy$ , obtinebitur

$$-\frac{nn y^4 + 2my^3 - p\sqrt{v}yy - syy + \frac{tt}{4v}yy}{nn yy}. \text{ Cæterum}$$

restituendo  $\frac{t}{v}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}pp y^4$  pro  $nn y^4$ , &  $ry^3 + 2\sqrt{v}y^3 + \frac{p}{2\sqrt{v}}y^3$  pro  $2my^3$ , & multiplicando utramque summam per  $nn yy$ : exsurget

$$y^6 - py^5 - \frac{t}{v}y^4 + \frac{2\sqrt{v}}{v}y^4 - \frac{p}{4}y^4 + \frac{p}{2\sqrt{v}}y^3 - p\sqrt{v}y^3 + \frac{t}{4v}yy - ty + v,$$

æquale

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{t}{v}y^4 \\ -qy^4 \\ +\frac{1}{4}pp \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} +r \\ +\frac{2\sqrt{v}}{v} \\ +\frac{p}{2\sqrt{v}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} -p\sqrt{v}y^3 \\ -s \\ +\frac{t}{4v} \end{array} \right\} yy.$$

Hoc est, habebitur

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \propto 0.$$

Vnde apparet, lineas CG, NR, QO, & similes esse hujus Æquationis radices. Quod erat demonstrandum.

*Invenio quatuor mediarum proportionalium.* Hinc si invenire velimus 4<sup>or</sup> medias proportionales inter lineas  $a$  &  $b$ ; posita  $x$  pro prima, prodibit Æquatio  $x^5 **** - a^4 b \propto 0$ , vel  $x^6 **** - a^4 b x \propto 0$ . Factâque  $y - a \propto x$ , invenietur

$$y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 - 6a^5y + a^6 \propto 0$$

Vnde pro linea AB sumendum est  $3a$ , &

$$\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa + ab}}} + 6aa \text{ pro BK, vel latere recto Parabola,}$$

læ, quod supra nominavi  $n$ , &  $\frac{2a}{3n} \sqrt{aa+ab}$  pro DE, vel BL. Porro descriptâ lineâ curvâ ACN secundum mensuram harum trium linearum, facienda est LH  $\propto \frac{6a^2+aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$ , & IH  $\propto \frac{10a^2}{nn} + \frac{aa}{nn} \sqrt{aa+ab}$  +  $\frac{18a^2+1a^2b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$ , & LP  $\propto \sqrt{\frac{15a^2+6a^2\sqrt{aa+ab}}{nn}}$ . Etenim circulus, qui centrum suum habet in puncto I, transiturus per punctum sic inventum P, secabit curvam in duobus punctis C & N, à quibus si ad rectam BK demittantur perpendiculares NR & CG, & minor NR à majore CG auferatur; erit reliqua  $x$ , prima ex quatuor mediis proportionalibus quæsitis.

Eodem modo facile est datum angulum in quinque æquales partes dividere, & Circulo figuram inscribere 11 aut 13 æqualium laterum, atque infinita alia hujus regulæ exempla reperire.

Verum notandum est in plurimis horum exemplorum, quod Circulus hic ita obliquè hanc Parabolam secundi generis secare possit, ut intersectionis punctum cognitu sit difficile, atque adeò hæc constructio ad Praxin non sit idonea. Cui quidem rei facilè remedium afferri posset, componendo alias regulas ad imitationem hujus.

Sed institutum meum non est prolixum librum conscribere, sed potius multa paucis comprehendere: quod fortè judicabunt me fecisse, qui consideraturi sunt, quod, reductis ad eandem constructionem Problematis omnibus ejusdem generis, modum simul, quo ad infinitas alias diversas reduci, atque ita omnia infinitis modis resolvi possint, ostenderim. Præterea etiam, quod constructis iis omnibus, quæ Plana sunt, intersectione Circuli & lineæ rectæ, Et iis omnibus, quæ Solida sunt,

O

inter-



## 106 GEOMETRIÆ LIBER TERTIUS.

interfectione Circuli & Parabolæ, Ac tandem iis omnibus, quæ uno gradu magis sunt composita, interfectione similiter Circuli & lineæ, uno gradu magis quàm Parabolæ compositæ, eandem tantum viam in construendis reliquis omnibus, quæ magis magisque in infinitum sunt composita, sequi oporteat. Etenim cognitis, in materia Mathematicarum progressionum, duobus aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non est difficile. Adeò ut sperem à posteris mihi gratias habitum iri, non solum pro iis, quæ hic explicui; sed etiam pro iis, quæ consultò omisi, quò ipsis voluptatem illa inveniendi relinquerem.

F I N I S.



FLO-

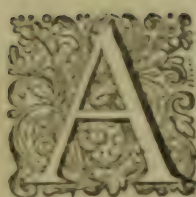
FLORIMONDI DE BEAUNE

I N

## GEOMETRIAM

RENATI DES CARTES

NOTÆ BREVES.



ALGEBRA speciosa, hoc est, quæ exercetur per species rerum, quæ literis Alphabeti, aliisve similibus designantur, est Scientia, investigandis inveniendisque Theorematis & Problematis inserviens, ac res homogeneas, quarum rationes vel proportionem considerantur, concernens. Dicimus autem rationem inter se habere duas res, cum homogeneæ seu ejusdem naturæ existentes, aut æquales sunt, aut inæquales, & minor per sui ipsius continuam additionem, tandem major evadit, majoremque superans. Adde ut hæc Scientia non solum Algebram numerosam atque Veterum Analysin Geometricam comprehendat; sed etiam omne id, quod relationem quandam habet aut proportionem, ut refert D. des Cartes, in sua de Methodo dissertatione.

Optimum verò est, ad stabilienda hujus Scientiæ præcepta & ad cognitionem ejus assequendam, ut generaliter rationes hæc in lineis consideremus: cum simplicissimæ sint, & hoc sibi vendicent, quod rationes omnes, quæ inter quascunque alias res considerari possunt, exprimant. Id quod numeri non efficiunt, qui relationes, quæ inter incommensurabiles quantitates reperiuntur, exprimere nequeunt. Accedit, quod his ad omnes alias res, rationem vel proportionem quandam inter se habentes, uti possimus. Etenim licet linea nullam cum superficie, aut cum alicujus motus velocitate rationem habeat (atque ita de aliis alterius naturæ rebus;) possumus tamen rationem, quæ inter duas superficies, aut inter duas differentes velocitates, & id genus alia, quæ inter se relationem aliquam habere statuimus,

O 2

mus,



mus, reperitur, exprimere per duas lineas. Id tantum cavendum est, ne permutata ratione utamur.

Operationes omnes, quæ in hac Scientia occurrunt, ad quinque reducuntur, quæ eadem sunt, quæ Arithmeticæ vulgaris: nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, atque Radicum Extractio; hoc præterea commodi habentes, quod illæ (sicut notavimus) circa incommensurabiles quantitates, non minus quàm circa alias, versentur. Vt, cum proponuntur duæ lineæ incommensurabiles, sive longitudine, sive longitudine & potentia, possunt ipsæ simul addi, una ab altera auferri, per se invicem multiplicari, una per alteram dividi, & ex utraque radix extrahi, perinde ac si longitudine essent commensurabiles.

Neque verò docebimus, quo pacto hæ operationes per litteras Alphabeticas, vel alias linearum aliarumve rerum, species, quas designant, sint faciendæ: cum hoc ab aliis jam sit pertractatum. Tum etiam quoniam hæc Geometria, quâ ratione Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, atque Radicum Extractio, tam in numeris, quàm in lineis instituendæ sint, breviter exponit. Verum observari volumus, quod per hæc species, quas nominamus  $b, b^2, b^3, b^4, b d, b^2 d, b^3 d$ ; primam videlicet  $b$ , numerum aut lineam simplicem; secundam  $b^2$ , quadratum ipsius  $b$ , seu  $b$  quadratum; tertiam  $b^3$  seu  $b$  cubum; quartam  $b^4$  seu  $b$  quadrato-quadratum, &c. non ullæ aliæ res, quàm lineæ omnino simplices concipiantur; nisi quæstio fuerit de veris Quadratis, Cubis, Planis, & Solidis, aut, per hæc species alias res significemus, similem inter se relationem, quam lineæ ipsis designatæ, habentes. Attamen consentaneum est, nomina usitata retinere, quandoquidem lineæ, speciebus hisce designatæ, eandem inter se rationem, quam veræ superficies, & vera solida, quæ per ipsas denotantur, servant. Et hoc quidem ad imitationem Arithmeticæ communis, ubi alios numeros appellamus Quadratos, alios Cubos, alios Planos, alios Solidos &c. quippe qui talem inter se relationem observant, quatenus sunt numeri simplices, qualem inter se obtinent Quadrati, Cubi, &c. quos repræsentant.

Oportet itaque ostendere, spatia & corpora, speciebus hisce designata, eandem inter se rationem habere, quam lineæ simplices, quas per ipsas concipimus. Exempli gratiâ,  $b^2$  eandem  
ratio-

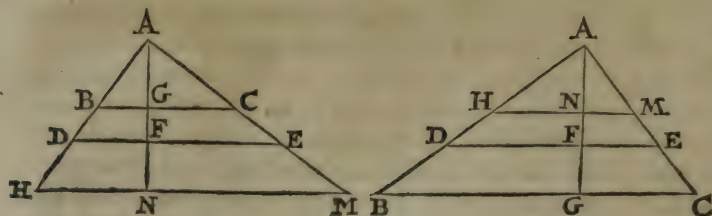
rationem habere ad  $bd$ , & ad  $d^2$ , quatenus spatia significant, quàm quatenus lineas referunt. Sic etiam relationem ipsius  $b^2$  ad  $b^2 d$  & ad  $d^2$ , aliasque similes, eandem inter hæc Solida existere, quam ea, quæ est inter lineas, per has species designatas. Quod ipsum facile erit, si pro arbitrio lineam aliquam accipiamus, quam appellemus unitatem, & ad eam reliquas omnes referamus. Illa vocetur  $a$ , sic ut hæc tres lineæ  $a$ ,  $b$ , &  $b^2$  proportionales existant, juxta id quod de multiplicatione in hæc Geometria dictum est. Idem de lineis  $a$ ,  $d$ , &  $d^2$  est intelligendum. Sic etiam linea  $a$  est ad lineam  $b$ , sicut linea  $d$  est ad lineam  $bd$ ; aut, ut linea  $a$  est ad lineam  $d$ , ita linea  $b$  est ad eandem lineam  $bd$ . Quod cum ita sit, linea  $b$  erit ad lineam  $b^2$ , sicut linea  $d$  ad lineam  $bd$ ; cum eadem utrobique sit ratio, nimirum eadem: quæ lineæ  $a$  ad lineam  $b$ . Vnde permutando erit, ut linea  $b$  ad lineam  $d$ , ita linea  $b^2$  ad lineam  $bd$ . Eodem modo linea  $b$  erit ad lineam  $bd$ , ut linea  $d$  ad lineam  $d^2$ : cum utraque ratio eadem sit, quæ lineæ  $a$  ad lineam  $d$ . quemadmodum est ostensum. Vnde permutando erit, ut linea  $b$  ad lineam  $d$ , ita linea  $bd$  ad lineam  $d^2$ . Patet itaque,  $b$  esse ad  $d$ , sicut  $b^2$  ad  $bd$ ; itemque  $b$  esse ad  $d$ , sicut  $bd$  ad  $d^2$ , & consequenter, rationem lineæ  $b^2$  ad lineam  $d^2$  esse duplicatam lineæ  $b$  ad lineam  $d$ ; lineamque  $bd$  esse mediam proportionalem inter lineas  $b^2$  &  $d^2$ . Id quod unusquisque novit ab Euclide esse ostensum, nimirum: rationem, quam habet  $b^2$  ad  $d^2$ , quatenus designant superficies seu quadrata, duplicatam esse rationis, quam habet latus  $b$  ad latus  $d$ : itemque  $bd$  rectangulum esse medium proportionale inter hæc ipsa quadrata. ac per consequens, hæc spatia eandem inter se relationem habere, quam lineæ iisdem speciebus designatæ. Idem ostendi potest de Cubis vel Solidis, ad imitationem præcedentis demonstrationis. Vnde haud parvum emolumentum colligere licet, cum complures rationes, quas Euclides aliique Geometræ, inter duas superficies, atque inter duo corpora, reperiri, demonstrarunt, nos pro lineis, aliisve rebus, iisdem speciebus designatis, usurpare possimus, prout eandem quam dicta spatia seu corpora inter se relationem habent.

Exhibeamus aliquod exemplum: Detur triangulum rectangulum  $ADE$ , cujus angulus  $DAE$  sit rectus. Manifestum est ex elementis, quod laterum quadrata simul sumpta quadrato basis

O 3

sint





sint æqualia: hoc est, si ponamus  $AD \propto b$ ,  $AE \propto c$ , &  $DE \propto d$ , quòd  $b^2 + c^2$  æquetur  $d^2$ , quatenus designant vera quadrata. Quod quoque verum est, quatenus designant lineas, modò eandem inter se relationem obtineant, quàm hæc ipsa quadrata; ut demonstratum est à nobis, atque etiamnum in hoc exemplo palàm facere conabimur.

Assumatur pro lubitu linea aliqua major vel minor (perinde enim est) quàm  $DE$ , quæ quidem sit unitas, & ad quam reliquæ omnes referantur: ipsa autem esto  $BC$ , parallela existens ipsi  $DE$ , ducaturque perpendicularis  $AF$ , ipsam, si opus est, producendo. Deinde fiat, ut  $BC$  ad  $DE$ , ita  $DE$  ad  $HM$ , fietque  $HM \propto d^2$ .

Iam verò, sicut hæc lineæ  $BC$ ,  $DE$ ,  $HM$  sunt continuè proportionales, ita quoque lineæ  $BC$ ,  $AE$ ,  $NM$ ; nec non lineæ  $BC$ ,  $DA$ ,  $HN$ . Composita enim est ratio  $BC$  ad  $AE$ , ex ratione  $BC$  ad  $AC$ , & ex ratione  $AC$  ad  $AE$ . Est autem ratio  $AE$  ad  $NM$  composita ex iisdem rationibus, nimirum ex ratione  $AE$  ad  $FE$ , quæ eadem est rationi  $BC$  ad  $AC$  (propter similitudinem triangulorum rectangulorum  $AEF$  &  $BCA$ ), & ex ratione  $FE$  ad  $NM$ , hoc est,  $AE$  ad  $AM$ , quæ eadem est rationi  $AC$  ad  $AE$  (per constructionem.) Id quod eodem modo patet de  $BC$ ,  $AD$ ,  $HN$ . Erit igitur  $NM \propto c^2$ , &  $HN \propto b^2$ , quæ quidem simul sumptæ æquantur ipsi  $HM$ , hoc est,  $d^2$ . Quod erat demonstrandum.

Cernitur præterea illa in hac Methodo facilitas, quòd etiam lineam aliquam hoc modo  $\frac{b}{d}$ , aliisve similibus, exprimere possimus; aut quòd eo item modo fractionem aliquam Arithmeticæ communis, ut  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ , &c. denotare valeamus; hoc sanè compendio, quòd literis fractio exprimi possit, cuius numerator ad denominatori-

nominatorem non habeat rationem commensurabilem; sed quæ similis sit lineæ ad lineam, quarum una vicem gerat numeratoris, & altera vicem denominatoris ejusdem fractionis. Id quod non exiguum est utilitatis, quemadmodum postea videbitur.

Iam autem explicandum est, cur æquæ multæ dimensiones singulis Aequationis terminis sint tribuendæ. Quod sanè per se liquet, quando sub hisce terminis superficies aut corpora intelliguntur: cum nulla ratio inter duas quantitates heterogeneas consistat, spatiaque illa aut corpora eodem semper linearum atque dimensionum numero designentur.

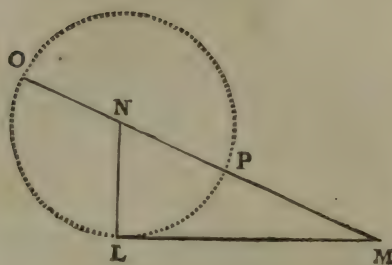
Verùm expedit ut idem faciamus, quando per hosce terminos non nisi lineæ designantur, ut Methodus eò universalior atque etiam commodior reddatur: Quandoquidem id præstare tenemur, cum lineæ, quæ pro unitate sumenda est, indeterminata existit, seu, cum requiritur, ut liberum sit assumere pro unitate lineam qualem volumus. Id quod faciliè concipi potest, quoniam sumendo lineam aliquam, ut  $a$ , pro unitate, lineæ, verbi gratiâ,  $b^2$  &  $d^2$ , denominationes hæc accipiunt, prout referuntur ad lineam  $a$ . At verò statuendo aliam quandam lineam pro unitate quam  $a$ , licet  $b$  &  $d$  eadem maneant, nihilominus tamen  $b^2$  &  $d^2$  à præcedentibus erunt diversæ. Ac proinde, si comparare velimus lineam  $b$  cum lineam  $d^2$ : quoniam  $d^2$  diversa est, prout ad diversas lineas refertur, quas pro unitate accipere possumus, ipsâ lineâ  $b$  eadem semper manente; patet lineam  $b$  ad lineam  $d^2$  non semper eandem rationem servare: sed contra, diversas ad illam fortiri relationes, pro diversis lineis, quæ pro unitate assumuntur. Et sic de aliis. At quæcunque tandem lineæ pro unitate sumatur, lineæ tamen indeterminata, & quæ per  $b^2$  concipitur, eandem semper habet rationem ad  $d^2$ , quam quadratum lineæ  $b$  ad quadratum lineæ  $d$ . Atque ita de aliis omnibus, ut supra est ostensum. Et quidem generalius est atque etiam commodius, relinquere ita unitatem indeterminatam & ad cujusque arbitrium, ut deinde pro ipsa talis lineæ assumi possit, qualis videbitur, quam eandem ab initio operationis determinare, sumendo pro ipsa certam aliquam lineam. Præterquam quod id plurimum conducit ad confusionem evitandam; ad dirigendum calculum; atque ad præcavenda vitia, quæ ibidem committi possent. Verùm cum unitas determinata existit, tum quidem non ampliùs singulis

Aqua-



Æquationis terminis æquè multas literas tribuere tenemur : cum unitas illas ubique supplere possit, ubi numero pauciores habentur, & ipsa has species multiplicans aut dividens easdem non mutet. Si verò ibidem non sit expressa, poterit tum quidem subintelligi. Quæ de re plura exempla in hac Geometria reperiuntur.

AD PAGINAS 6 & 7, DE RADICUM  
EXTRACTIONE.



Quandoquidem linea LM primæ figuræ tangit circulum LOP, rectangulum OMP æquatur quadrato ex LM. Sunt autem bina rectangula MOP & OMP æqualia quadrato ex OM. Æquale igitur erit rectangulum MOP, unà cum quadrato ex LM, qua-

drato ex OM; hoc est, erit  $x^2 \propto ax + b^2$ , ac per consequens  $x \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ : cum ON æquetur  $\frac{1}{2}a$ , & quadratum ex NM tantundem valeat atque duo quadrata ex NL & LM, hoc est,  $\frac{1}{4}a^2$  &  $b^2$ . Id quod primò erat demonstrandum.

Deinde rectangulum OPM & quadratum ex PM æqualia simul sunt rectangulo OMP. Est autem rectangulum OMP æquale quadrato ex LM. Quadratum itaque ex PM æquale est quadrato ex LM, minus rectangulo OPM: hoc est, erit  $y^2 \propto -ay + bb$ , ac proinde  $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ . quia, cum NM æquatur  $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ , ut supra, ac ex ipsa aufertur NP seu  $\frac{1}{2}a$ , relinquitur MP seu  $y$ .

IN SECUNDAM FIGURAM DE RADICUM  
EXTRACTIONE. PAG. 7.

R Educemus hanc figuram ad sequentem, in qua ND & HO sunt parallelæ & æquales ipsi LM. Quibus positis, quoniam LM tan-





utrinque  $\frac{1}{4}a^2$ , atque transferendo  $-a\chi$  in alteram æquationis partem:  $\chi^2 \propto a\chi + b^2$ .

In secundo exemplo, cum  $y$  æquatur  $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ , ac proinde  $y + \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ , erunt & horum quadrata æqualia, hoc est,  $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 \propto \frac{1}{4}a^2 + b^2$ , & per consequens  $y^2 \propto -ay + bb$ .

In tertio exemplo, cum primo loco habeatur  $\chi \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ , ideoque  $\chi - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ , erunt & horum quadrata æqualia, hoc est,  $\chi^2 - a\chi + \frac{1}{4}a^2 \propto \frac{1}{4}a^2 - bb$ , unde &  $\chi^2 \propto a\chi - bb$ .

In ultimo exemplo, cum secundo loco habeatur  $\chi \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , ac idcirco  $\frac{1}{2}a - \chi \propto \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ , erunt & horum quadrata æqualia, hoc est,  $\frac{1}{4}aa - a\chi + \chi^2 \propto \frac{1}{4}aa - bb$ , & propterea  $\chi^2 \propto a\chi - bb$ . Quæ quidem demonstrare oportebat.

IN COMPOSITIONEM LOCORUM PLANORUM  
ET SOLIDORUM. PAG. 26, & sequent.

Quicquid in primo libro restat, nec non in secundo usque ad Locorum Planorum & Solidorum compositionem reperitur, intellectu satis facile est; quare ad paginam 26 & sequentes progrediemur. Vbi primò notandum, quòd, habentes in æquatione duas quantitates indeterminatas, quarum una licet pro arbitrio sumatur, altera tamen per eandem æquationem inveniri possit, ita ipsam ordinare oporteat: ut, si una, puta  $x$ , ad libitum sumatur, altera, quæ est  $y$ , denominationi terminorum ejus inserviat, sic, ut  $y^2$  unam constituat æquationis partem, & altera ejus pars ordiatur à termino, in quo  $y$  sola sine  $x$  reperitur, quem sequatur  $y$  cum  $x$ , & postea  $x$  sine  $y$ , & tandem terminus, in quo neque  $x$  neque  $y$  reperitur. Atque impossibile quidem est alios casus invenire, quando quantitates indeterminatæ  $y$  &  $x$  duas tantum dimensiones habent: quanquam sæpius contingat ex his terminis aliquos reperiri nihilo æquales.

Deinde observandum quoque est, si termini illi plures literas vel dimensiones contineant, modò quantitates indeterminatæ  $y$  &  $x$  duas dimensiones non excedant, facile esse, dividendo totam æqua-

æquationem per literas ipsi  $yy$  adhærentes, efficere, ut  $yy$  sola unam partem æquationis constituat & reliquæ alteram partem, ad instar fractionis, pro denominatore habentem literas, quæ antea cum  $yy$  jungebantur. Vbi nemo existimare debet, fractionem pluribus dimensionibus constare, quàm numero relinquuntur literæ in numeratore, postquam ex ipso numerus literarum denominatoris est subductus, quemadmodum in exemplo, eadem hujus Geometriæ paginâ proposito, apparet.

Quod verò de dimensionibus jam diximus, eodem sensu intelligendum est, quo antea advertimus, utile esse, ut singulis æquationis terminis æquæ multæ tribuantur literæ. Nam sicut  $b^2$  significare potest lineam aliquam, sic etiam  $\frac{b}{a}$ , &  $\frac{b}{a^2}$ ; quæ tamen sic usurpari non debent, nisi cum linea quædam pro unitate est determinata: ob rationem supra allatam, ubi utilitatem atque commoditatem ostendimus, quæ sequitur, cum singulis æquationis terminis æquæ multæ literæ vel dimensiones tribuuntur, etiam si illis nil nisi lineæ aliæve res similes designentur.

Porro notandum est, quòd in hac Geometria generaliter pro uno eodemque loco vel termino habeantur illi omnes, qui eandem quantitatis, quam invenire volumus, & radicem æquationis appellamus, denominationem sortiuntur. Nimirum, quòd omnes illi pro uno termino habeantur, in quibus reperitur  $y^2$ ; & pro alio, in quibus reperitur  $y$ ; & rursus pro alio omnes, in quibus  $y$  non reperitur. Atque ita ulterius, si radix plures dimensiones habuerit. Est autem hoc (ut diximus) generale; speciatim verò hæc methodus requirit, ut ex termino, in quo  $y$  reperitur, duos casus faciamus; in quorum uno  $y$  reperiatur sine  $x$ ; & in altero, ubi cum  $x$  sit conjuncta: cum  $y$  &  $x$  duæ indeterminatæ quantitates sint & utraque æquationis radix esse possit. Neque difficile est ad unum terminum reducere omnes illos, qui eodem modo ab æquationis radice denominantur. Etenim reliquis literis cognitis existentibus, facile est, tales assumere, quæ supponantur æquales iis omnibus, quæ eandem habent radicis denominationem; vel etiam ei, quod designatur per fractionem, quam termini efficere ponantur. Atque hinc fit, quòd loco terminorum, ubi  $y$  reperitur sine  $x$ , solummodo ponatur  $2my$ , quippe quod supponitur æquale omnibus simul terminis ejusdem denominationis. Loco autem eorum



omnium, ubi  $y$  &  $x$  simul reperiuntur, (siquidem hæc Geometriæ Methodus postulat, ut  $x$  retineatur, ac nihilominus terminus quilibet plures quàm duas dimensiones habere non debeat,) ponitur tantum  $\frac{2n}{z}xy$ , ut sic designentur fractiones omnes, quæ similes habent radices denominationem. Quod verò loco  $my$  &  $\frac{n}{z}xy$  sumatur  $2my$  &  $\frac{2n}{z}xy$ , id tantum in eum finem fit, ut facilius ad æquationis radicem perveniatur: ad quam obtinendam requiritur, ut literarum  $m$  &  $n$  semissiles accipiantur. Sicut superius vidimus pag. 6 & 7, ubi de radicum extractione, quando æquatio duas solum dimensiones habet, sumus loquuti.

Postquam igitur termini, in quibus  $y$  absque  $x$ , atque etiam in quibus  $y$  &  $x$  simul reperiuntur, hoc modo ad simpliciores reducti sunt, extrahitur radix ex Equatione eaque exprimitur juxta id, quod pag. 6 & 7 fuit dictum. Quemadmodum videre licet in exemplo pag. 27, ubi radix est

$$y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + \frac{2mn}{z}x + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcsgx^2}{ez^3 - egz^2}}$$

Deinde sumenda est  $m^2$  pro omnibus terminis in vinculo, in quibus  $x$  non reperitur, cujus quantitas  $m$  eadem est in æquatione proposita cum ea, quæ est extra vinculum; sed aliàs potest esse diversa, quo casu loco  $m$  extra vinculum præstat quodammodo aliam literam assumere. Post quæ præter terminos, in quibus  $x$  absque  $y$  reperitur, nihil reducendum restat. Possunt autem hi duobus modis se habere: prout nimirum habebitur vel  $x^2$ , vel  $x$  simpliciter. Vnde fit, ut etiam, loco terminorum omnium, in quibus  $x$  simpliciter reperitur, scribendum sit  $ox$ . Quo loco notandum quoque venit, literam  $o$  quantitatem aliquam hinc designare, non autem cyphram: quandoquidem æqualis est ac loco illorum omnium scribitur, quæ cum  $x$  junguntur; aliàs enim D. des Cartes eâ ordinariè ad cyphram seu nihil denotandum utitur: ita ut quodammodo hic, ad confusionem evitandam, præstare videatur, pro  $o$  aliam quandam literam substituere. Sed hæc monuisse sufficiat. Denique reducendæ sunt etiam literæ, quæ cum  $x^2$  junguntur, quæque nil præter fractionem designare possunt: cum  $x^2$  duas habeat dimensiones, hoc videlicet modo:  $\frac{p}{m}x^2$ . Vbi considerare oportet, quòd litera  $m$  fractionis  $\frac{p}{m}$  eadem quanti-

quantitas existat, quæ in  $m^2$  in vinculo. Quæ quidem methodo nulla habebitur æquatio, cujus radix ad duas tantum dimensiones ascendit, quæ, prout ex illa educta est, non reducatur ad hanc formulam:  $y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + 0x - \frac{p}{m}x^2}$ . Ita ut hæc ipsa quibuslibet Locis Planis & Solidis construendis inservire queat: cum omnes locos sive terminos, qui in eorum æquationibus reperiri possunt, comprehendat; adeoque non nisi signorum + & - variationem, atque loca & terminos, qui in propositis æquationibus deprehendi nequeunt, considerare oporteat. Quæ quidem omnia à D. des Cartes sunt animadversa. Nos verò ea duntaxat, quæ difficultatem aliquam afferre possent, illustrare conabimur.

## OBSERVATIO PRIMA.

**P**ostquam æquatio ad supradictam formulam est reducta, & illa, sive æquæ multos, sive pauciores terminos habens, etiam fractionibus numericis est affecta: ut, exempli gratiâ, si loco  $\frac{n}{z}x$  habeatur  $\frac{1}{2}x$ , potest operatio institui per hæc fractiones, supponendo, numeratorem 3 esse æqualem numeratori  $n$ , & denominatorem 4 æqualem denominatori  $z$ . Idem intellige de aliis fractionibus numericis, quæ æquales sunt, & ad literarum superioris formulæ referuntur. Vnde cum habetur fractio denotata hoc pacto  $x \sqrt{\frac{1}{2}}$  loco  $\frac{n}{z}x$ ; erit litera  $n$  æqualis  $\sqrt{3}$ , &  $z$  æqualis  $\sqrt{4}$ , atque ita de aliis. Est autem bene observandum, quod diximus: nimirum, si in æquatione reperiatur  $m^2$ , denominatorem  $m$  fractionis  $\frac{p}{m}x^2$  tum esse æqualem ipsi  $m$  quantitatis  $m^2$ . id quod facile est, etiam si alia fractio haberetur, modò supponamus,  $m$  esse ad  $p$ , sicut denominator hujus fractionis ad suum numeratorem: quandoquidem hoc modo fractiones fiunt æquales. Quòd si autem id per numeros fieri non possit, operandum erit per literas, quod sæpe est commodissimum. Porro observandum est, quòd ex terminis, qui inveniendis, centro, lateri recto, & transverso inserviunt, non aliæ literæ usurpandæ sint, quàm quæ in æquatione reperiuntur; & quòd reliquæ literæ eorundem



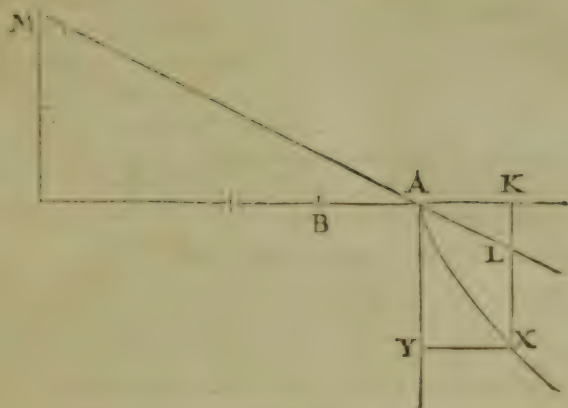
terminorum non magis sint considerandæ, quàm si non haberentur. Cujus ratio est, quòd D. des Cartes, ut universaliter hæc tractaret, terminos hosce ejusmodi constitutionis effecerit, in qua loca omnia forent repleta. Adeoque literæ locorum, quæ in proposita æquatione non reperiuntur, non annumerandæ sunt terminis, qui centris, lateribus rectis, & transversis exprimendis inserviunt.

## OBSERVATIO SECUNDA.

**P** Ag. 27 casus, cùm in æquatione non habetur  $m$ , difficultatem afferre posset, quare ad illum intelligendum cogitandum est, quòd, quando in æquatione non habetur  $m$ , ducenda itidem non sit linea IK in figura ejusdem paginæ. Ac proinde, ut inveniat L I, postquam habetur  $\frac{n}{z}x$ , non referenda est illa ad I K, sed ad A B, eodem modo, quo D. des Cartes ipsam comparat ipsi I K. Quandoquidem facere oportet, ut A B sit ad B L, sicut  $\chi$  ad  $n$ , hoc est, ut A B existente  $x$ , B L sit  $\frac{n}{z}x$ , atque ut punctum L cadat ex parte puncti C, si habeatur  $-\frac{n}{z}x$ ; at ex altera parte versùs R, si reperiatur  $+\frac{n}{z}x$ . Quo factò, ducenda est linea A L, per puncta A & L, quæ eadem erit quæ L I, hoc est, eodem munere fungetur, quo L I in exemplo D<sup>ni</sup> des Cartes. Et quidem cognita erit linea A L, cum lineæ A B, B L, angulusque A B L cognoscantur. Atque ita pro A L accipere possumus  $\frac{a}{z}x$ ; eritque  $a$  nota.

Sed rem fortassis planius per exemplum aliquod explicabimus. Sit, in exposita figura, recta linea A Y, curva autem A X, cujus vertex punctum A, cujusque hæc sit proprietas: ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut X, à quo ad rectam A Y normaliter ducatur X Y, sumptaque utcumque recta A B, hæc ipsa unà cum linea A Y sit ad lineam A Y, sicut linea A Y ad lineam X Y.

Esto A B  $\propto b$ , A Y  $\propto y$ , & A K æqualis ac parallela ipsi X Y  $\propto x$ . Hinc cum  $b+y$  sit ad  $y$ , sicut  $y$  ad  $x$ , erit  $yy \propto xy + xb$ , &  $y \propto \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + xb}$ . Vnde ex iis, quæ habentur pag. 29, constat, lineam hanc esse Hyperbolam, eò quòd habetur  $+\frac{1}{4}x^2$ . Ad quam construendam, cum A K sit  $x$ , linea K L erit  $\frac{1}{2}x$ , quan-

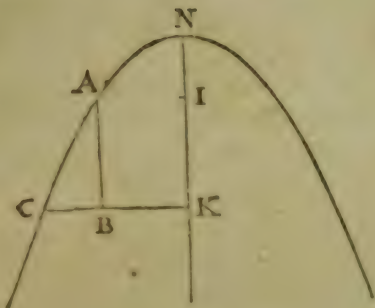


quandoquidem hæc fractio æqualis est ac ipsi  $\frac{n}{x}$   $x$  respondet. Porro, quoniam rectus est angulus AKL, erit quadratum ex AL æquale quadratis ex AK & KL simul sumptis. Hinc cum quadratum ex AK sit  $x^2$ , & quadratum ex KL  $\frac{1}{4} x^2$ , AL erit  $\sqrt{\frac{5}{4}} x^2$  seu  $x \sqrt{\frac{5}{4}}$ ; id quod æquale supponimus ipsi  $\frac{a}{x} x$ , at  $\frac{1}{4} x^2$  ipsi  $\frac{p}{m} x^2$ : ita ut  $\sqrt{5}$  sit  $a$ , &  $\sqrt{4}$  sit  $\zeta$ , & 1 sit  $p$ , & 4 sit  $m$ . Quibus positis, terminus  $\frac{aom}{pz}$ , qui inveniendæ centro inservit, erit  $\sqrt{\frac{80}{16}} bb$ , cum  $am$ , hoc est,  $4\sqrt{5}$ , valeat  $\sqrt{80}$ ; &  $2p\zeta$ , hoc est,  $2\sqrt{4p}$ , valeat  $\sqrt{16}$ ; &  $o$  sit æqualis ipsi  $b$ ; &  $b\sqrt{\frac{80}{16}}$  valeat  $\sqrt{\frac{80}{16}} bb$ , hoc est,  $\sqrt{5} bb$ . Quod quidem centrum sumendum est à puncto A versùs M, quandoquidem Hyperbola est, & habetur  $+bx$ , hoc est,  $+ox$ , juxta pag. 30. Latus rectum hic est  $\frac{oz}{a}$ , hoc est,  $b\sqrt{\frac{5}{4}}$  seu  $\sqrt{\frac{5}{4}} bb$ . Vnde latus transversum sit  $\frac{aom}{pz}$ : quoniam oportet, ut  $p\zeta$  sit ad  $a^2m$ , sicut  $\frac{oz}{a}$  ad latus transversum, quod idcirco, (ut diximus,) erit  $\frac{aom}{pz}$ . id quod facit  $b\sqrt{\frac{80}{4}}$ , hoc est,  $\sqrt{20} bb$ . Ac  
proinde



proinde cum distantia puncti A à centro sit  $\sqrt{5}bb$ , quæ semissis est lateris transversi (quoniam, cum duorum quadratorum unum alterius est quadruplum, latus tantum lateris sit duplum); manifestum est, punctum A verticem fore diametri AL. Ideoque si fiat  $MA \propto \sqrt{20}bb$ , erit ipsa latus transversum, & latus rectum erit, (ut diximus,)  $\sqrt{\frac{4}{5}}bb$ . Quorum demonstratio facilis est. Nam per prop. 21. lib. 1<sup>mi</sup> Conicorum Apollonii, ut latus transversum  $MA \propto \sqrt{20}bb$  est ad latus rectum  $\sqrt{\frac{4}{5}}bb$ , ita est rectangulum MLA ad quadratum ex LX. Est autem  $AL \propto \sqrt{\frac{1}{5}}x^2$ . Hinc si multiplicetur  $\sqrt{20}bb + \sqrt{\frac{4}{5}}x^2$  per  $\sqrt{\frac{1}{5}}x^2$ , habebitur rectangulum MLA, quod proinde erit  $\sqrt{\frac{100}{4}}bbx^2 + \sqrt{\frac{25}{16}}x^4$ . Multiplicando verò id ipsum per latus rectum  $\sqrt{\frac{4}{5}}bb$ , exurgit  $\sqrt{\frac{400}{20}}b^2x^2 + \sqrt{\frac{100}{80}}bbx^4$ , quod divisum per latus transversum  $\sqrt{20}bb$ , exhibet  $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{100}{1600}}x^4$ , hoc est,  $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{1}{16}}x^4$ , seu  $bx + \frac{1}{4}x^2$ , pro quadrato ex LX, unde ipsa LX fit  $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$ . Jam si ad lineam LX addatur linea LK  $\propto \frac{1}{2}x$ , obtinebitur linea XK, hoc est,  $y \propto \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$ , ac per consequens  $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2} \propto y - \frac{1}{2}x$ . Vnde ductâ utrâque æqualitatis parte in se, fiet  $bx + \frac{1}{4}x^2 \propto yy - xy + \frac{1}{4}x^2$ , seu  $yy \propto bx + xy$ . Hinc ut  $b + y$  se habet ad  $y$ , ita  $y$  se habebit ad  $x$ . Quod erat demonstrandum.

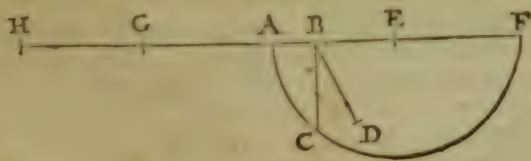
Proponatur adhuc aliud exemplum, referens eum casum in quo non reperiatur  $\frac{n}{z}x$  in æquatione. Habeamus itaque æquationem hanc  $yy \propto -d^2 + dy + bx$ , cujus radix est  $y \propto -d + \sqrt{d^2 + bx}$ , quam construere oporteat. Supponatur in figura sequente AB  $\propto x$ , & angulus ABC ad libitum, BC autem, indefinite continuatâ versùs B,  $\propto y$ ; fiatque BK  $\propto d$ , quæ hic idem præstat quod  $m$  in superiori formula, quoniam habetur  $-d$ . Ductâ autem NK indefinite parallelâ ipsi AB, sumatur KI æqualis AB, prout ostensum fuit pag. 27 & 28. Quo facto, relinquetur tantum  $\sqrt{d^2 + bx}$ , & pagina sequens docet lineam quæsitam esse Parabolam, quoniam non habetur  $x^2$ . Præterea puncto N existente vertice, linea IN esse debet  $\frac{am^2}{oz}$ , hoc est,  $\frac{d^2}{b}$ , in hoc exemplo. Terminus denique, qui explicat latus rectum, erit  $\frac{oz}{a}$ , idem



idem hic existens quod  $b$ , & sit  $KC$  ordinatum adplicata ad diametrum. Quorum demonstratio nec difficilis. Nam, secundum 11 prop. 1<sup>mi</sup> Libri Conicorum Apollonii, rectangulum comprehensum sub latere recto  $b$  & linea  $NK \propto \frac{d^2}{b} + x$ , utpote,  $dd + bx$ , est æquale quadrato linear  $KC$ . Est verò linea  $KC$  æqualis ipsis  $BC \propto y$ , &  $BK \propto d$ , simul sumptis. Erit itaque linea  $KC \propto y + d$ , & quadratum ejus  $\propto yy + 2dy + dd$ . Ac proinde  $yy + 2dy + dd \propto dd + bx$ , & per consequens  $yy \propto -2dy + bx$ . Quod demonstrare oportebat.

## OBSERVATIO TERTIA.

Paginà 29, circa medium, dictum est, lineam quæsitam esse Circulum, cum  $aam \propto p\zeta$ , & cum angulus est rectus. Verum hoc intelligendum etiam est, cum angulus est rectus, nec omnino habetur  $aam$ , nec  $p\zeta$ : aut cum in æquatione literæ unius termini æquales sunt literis termini alterius. Ad pleniorē autem horum intellectum sequentia construamus exempla.



Habeatur æquatio  $yy \propto bx - x^2$ , cujus radix est  $y \propto \sqrt{bx - x^2}$ , & supponatur in appositā figura linea  $HA \propto b$ , linea  $AB \propto x$ , & linea

Q



linea BC vel BD  $\propto y$ . Manifestum autem est, lineam construendam esse Ellipsin aut Circulum, quoniam habetur  $-x^2$ . Non reperitur autem  $m$ , aut  $\frac{n}{z}x$ . Et sufficit pro  $x$  sumere AB, atque centrum ab A versus B, cum habeatur  $+ox$ , hoc est, in hoc exemplo,  $+bx$ . Ita ut pro illo sumendum sit  $\frac{aom}{2pz}$ , hoc est,  $b$  divisum per 2, seu  $\frac{1}{2}b$ , cum non habeatur  $a$ , neque  $m$ , neque  $p$ , neque  $z$ . Latus autem rectum sit  $\frac{oz}{a}$ , hoc est,  $b$ ; transversum verò  $\frac{aom}{pz}$ , hoc est,  $b$ ; & tum considerare tantum oportet, utrum angulus ABC an verò ABD sit rectus. Nam cum hic non habeatur  $aa$ , nec  $pz^2$ , existente angulo (puta ABC) recto, linea quæ sita erit Circulus; at verò obliquo existente (ut ABD) erit linea quæ sita Ellipsis. Quapropter si utroque casu faciamus AE  $\propto \frac{1}{2}b$ , erit punctum E centrum, & AF  $\propto b$  latus transversum; latus autem rectum  $\propto b$ , atque BC vel BD  $\propto y$  ordinatim adplicata ad diametrum AF. Quorum demonstratio facilis est. Etenim quoniam utroque casu juxta 21<sup>am</sup> prop<sup>onem</sup> 1<sup>mi</sup> libri Conicorum Apollonii latus transversum  $b$  est ad latus rectum  $b$ , sicut rectangulum FBA ad quadratum ex BC vel BD: erit rectangulum FBA æquale quadrato ex BC vel BD. Hinc cum FB sit  $\propto b - x$ , & AB  $\propto x$ , erit dictum rectangulum, hoc est,  $bx - x^2$ , æquale quadrato ex BC vel BD, hoc est, erit  $yy \propto bx - x^2$ . Quod erat demonstrandum.

Quòd si æquatio haberetur  $yy \propto bb + x^2$ , quæ sita linea esset Hyperbole: & si vel BC, vel BD sumatur pro  $y$ , hoc est, sive angulus sit rectus, sive obliquus; erit constructio præcedenti omnino similis; nisi quòd centrum & latus transversum sit sumendum à puncto A versus alteram partem, nempe versus H. Atque ita faciendo AG  $\propto \frac{1}{2}b$ , fiet punctum G centrum, eritque tam latus transversum, quàm rectum  $\propto b$ . Demonstratio præcedenti erit similis, observatis tantum signis  $+$  &  $-$ .

## OBSERVATIO QUARTA.

**A** Nimadvertendum præterea est, si in æquatione non habeatur fractio ipsi  $x^2$  adhærens, & nihilominus tamen adsit  $m^2$ , hoc est, habeatur, verbi gratiâ,  $\sqrt{m^2 + ox - x^2}$  loco  $\frac{p}{m}x^2$ : quòd





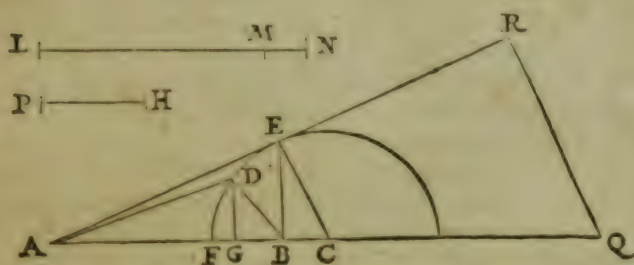
eritque LN ad MN, ut quadratum à PH ad quadratum ab MN. Hinc si LN vocetur  $c$ ; erit  $c$  ad  $f$ , sicut quadratum à PH ad quadratum ab MN, hoc est, ut quadratum ex AD  $\propto x^2 + yy$  ad quadratum ex DB  $\propto yy + bb - 2bx + x^2$ . Ac proinde productum extremorum erit æquale producto mediorum, hoc est,  $fx^2 + fyy \propto cyy + cbb - 2cbx + cx^2$ , & per consequens,  $cyy - fyy \propto -cbb + 2cbx - cx^2 + fx^2$ , ac denuo  $yy \propto \frac{-cbb + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c-f}$ ,

& tandem  $y \propto \sqrt{\frac{-cbb + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c-f}}$ .

Ad abbreviandum autem hunc terminum  $\frac{-cx^2 + fx^2}{c-f}$ ; licet consideremus, quod  $f-c$  &  $c-f$  exprimant semper unam eandemque differentiam, quippe quæ est inter  $c$  &  $f$ , etiam si  $c$  major sit quam  $f$  (dum in operatione supponimus  $h \propto c-f$ ); semper tamen habebimus  $\frac{-cx^2 + fx^2}{c-f} \propto \frac{-hx^2}{h}$ , hoc est  $x^2$  simpliciter; adeò ut relinquatur  $y \propto \sqrt{\frac{-cbb + 2cbx}{c-f} - x^2}$ . Id quod nos docet, locum esse Planum, eumque Circulum existere: cum habeatur  $-x^2$ , angulusque AGD sit rectus, &  $aam \propto p\zeta^2$ ; neque enim hic habetur  $a$ , neque  $\zeta$ ; atque  $m$  ipsi  $p$  æqualis supponitur; cum nulla ipsi  $x^2$  fractio adhæreat. Quibus ita constitutis Circulum hoc modo inveniemus.

Terminus, qui centrum nobis exhibere debet, est  $\frac{aom}{2pz}$ , ex quo nobis præter  $\frac{o}{2}$  nihil inservit: cum  $m$  ipsi  $p$  sit æqualis; hoc est, pro eo tantum habebimus  $\frac{cb}{c-f}$ . Ac idcirco, postquam linea LM æquatur  $c-f$ , si fiat ut linea LM  $\propto c-f$  ad lineam LN  $\propto c$ , ita linea AB  $\propto b$  ad lineam AC, erit linea AC  $\propto \frac{cb}{c-f}$ , & punctum C centrum Circuli. Sumendum autem id erit ab A versus B, quoniam habetur  $+\frac{2cbx}{c-f}$ , respondens ipsi  $ox$ . Præterea, quoniam in Circulo latus rectum & transversum sibi invicem sunt æqualia, alterutro tantum erit opus. Formula autem lateris recti hic est  $\sqrt{\frac{o^2 x^2}{a^2} - \frac{4mpx^2}{a^2}}$ . Vnde quidem illud, quod nobis in hoc exemplo inservit, non aliud erit quam  $\sqrt{o^2 - 4m^2}$ , hoc est, quod,

quod, auferendo quadratum  $\frac{4cb}{-f}$  à quadrato ex  $\frac{2cb}{-f}$ , relinquitur quadratum lateris recti. Est autem paulò ante inventa linea



$AC \propto \frac{e^b}{e-f}$ ; ideoque ejus dupla  $AQ \propto \frac{2eb}{e-f}$ . Hinc invenire  
 adhuc oportet  $\frac{4eb^2}{e-f}$ , quod representatur per  $4m^2$ . Invenitur  
 autem; ponendo esse, ut  $e-f$  ad  $e$ , ita  $bb$  ad  $\frac{eb^2}{e-f}$ . at ut  $e-f$   
 est ad  $e$ , sic  $AB \propto b$  est ad  $AC$ . Quapropter erit ut  $b$  ad lineam  
 $AC$ , sic  $bb$  ad  $\frac{eb^2}{e-f}$ . Quoniam autem ratio duorum quadratorum  
 ad invicem duplicata est rationis, quam inter se habent ipsorum  
 latera: hinc, si ponamus lineam  $AE$  mediam proportionalem in-  
 ter  $b$  & lineam  $AC$ ; erit  $b$  ad lineam  $AE$ , sicut  $b$  ad  $\sqrt{\frac{eb^2}{e-f}}$ . & per  
 consequens linea  $AE \propto \sqrt{\frac{eb^2}{e-f}}$ . Vnde si  $AR$  fiat dupla ipsius  
 $AE$ , erit ea æqualis  $\sqrt{\frac{4eb^2}{e-f}}$ . Adeoque si constituamus triangu-  
 lum  $ARQ$ , cujus latus  $AQ$  sit æquale  $\frac{2eb}{e-f}$  (ut dictum est), cu-  
 jusque angulus  $ARQ$  sit rectus; erit latus  $RQ \propto \sqrt{e^2 - 4m^2}$ ;  
 quandoquidem quadratum ejus æquatur quadrato lineæ  $\frac{2eb}{e-f}$ , mi-  
 nus quadrato  $\frac{4eb^2}{e-f}$ . Atque ita  $RQ$  fit & latus rectum & diame-  
 ter Circuli. Et si ex centro  $C$  ducatur linea  $CE$  parallela ipsi  
 $RQ$ ,



RQ, erit ipsa æqualis radio Circuli, utpote æqualis semissi lineæ RQ.

Et hæc quidem quantum ad constructionem juxta hanc Methodum, quæ, postquam jam est inventa, brevior reddi potest. Nam cum angulus AEC sit rectus, & AE media proportionalis inter AC & AB, similia erunt triangula AEC, ABE, & EBC; ac proinde AC ad CE, ut CE ad CB. Vt autem AB est ad AC, ita est LM ad LN. Quare per conversionem rationis erit AC ad BC, ut LN ad NM. At verò ut ratio AC ad CB duplicata est rationis AC ad CE (propterea quòd CE media est proportionalis inter AC & CB), ita etiam, cum linea PH media sit proportionalis inter LN & NM (per constructionem): erit ratio LN ad NM, hoc est, AC ad CB, duplicata rationis LN ad PH. Quapropter erit ut LN ad PH, seu PH ad MN, ita AC ad CE; quæ quidem Circuli radius est. Demonstratio hujus constructionis ad imitationem præcedentium inveniri potest, quam hic omittimus: cum illa ab Eutocio initio commentariorum ejus in Apollonii Conica sit ostensa.

#### OBSERVATIO QUINTA.

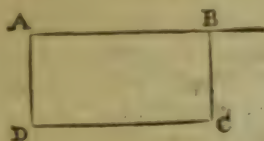
P Ag. 21 hujus Geometriæ dictum est: quòd, postquam hæc æquatio non ascendit ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut etiam ultra quadratum unius ex illis, linea curva semper sit primi & simplicissimi generis, sub quo tantum Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ. Quod ita intelligendum est, duas quantitates indeterminatas  $x$  &  $y$ , cum separatim in Equationis terminis reperiuntur, non ultra sua quadrata ascendere debere; sed in terminis, ubi simul reperiuntur, singulas non nisi unam dimensionem habere debere, ita ut simul tantum rectangulum aliquod duæve dimensiones efficiant.

Similiter, si in Equatione reperiretur terminus aliquis, in quo haberetur  $y^3$ , vel  $x^3$ ; aut  $y^4$ , vel  $x^4$ ; aut denique  $xy^2$ , vel  $x^2y$ , vel  $x^2yy$ : linea curva esset secundi generis. Et sic de cæteris. In quibus omnibus solum indeterminatarum quantitatum ratio habenda est, non autem quantitatum cognitarum, quibuscum junguntur.

Quòd

Quod si quantitates indeterminata singula separatim ad duas dimensiones non ascendant, neque etiam simul, hoc est, si nullus terminorum ad  $yy$ , aut ad  $x$   $y$  assurgat; linea itidem erit primi generis, & quidem recta, non curva: adeoque locus talem æquationem præbens Planus erit, & ad lineam rectam.

Et quidem, cum locus est ad rectam lineam, Geometria hæc non minus ipsum componere docet, quam cum locus est ad curvam lineam, quæ sit primi generis, & cum in æquatione habetur  $yy$ : sicut ubique in æquatione hujus Geometriæ pro Pappi questione, ex qua superior formula deducta fuit, cernere licet. Quod si verò habeatur  $x^2$  in æquatione, non autem  $yy$ , immutanda tantum erunt nomina quantitatum indeterminatarum, ita ut appelletur  $y$ , quæ dicta fuit  $x$ , &  $x$ , quæ dicta fuit  $y$ : in hunc modum. Esto in sequenti figura  $AB \propto x$ , &  $BC \propto y$ , atque æquatio inventa  $x^2 \propto by$ , quam ad dictam formulam reducere oportet.



Ducta igitur  $AD$  parallelâ ipsi  $BC$ , &  $DC$  parallelâ ipsi  $AB$ , mutatisque nominibus quantitatum indeterminatarum, nimirum appellando  $AD$ , cui æqualis est  $BC$ ,  $x$ , &  $DC$ , quæ æqualis est  $AB$ ,  $y$ ; quæ sita æ-

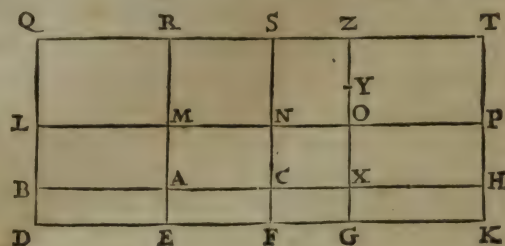
quatio erit  $yy \propto bx$ , cujus radix est  $y \propto \sqrt{bx}$ . Atque ita reducta erit ad formulam, quæ nos docet punctum  $C$  fore in Parabola.

At verò si in æquatione non habeatur  $x^2$ , nec  $yy$ , sed  $xy$ ; qui quidem casus, quoniam nec in æquatione questionis Pappi reperitur, neque ad formulam ex ea deductam refertur; difficultatem aliquam asferre posset, quam propterea enodabimus.

Æquatio autem hæc ad summum plures quam quatuor terminos non comprehendit: unum nimirum, ubi  $x$  reperitur sine  $y$ ; alterum, ubi  $y$  reperitur sine  $x$ ; tertium, ubi reperitur  $xy$ ; ac quartum denique, ubi neque  $x$  neque  $y$  reperitur. Ad eò ut varietas omnis reducatur ad 17 formulas æquationem ac constructionum, quæ sequenti pag. 129 exhibentur. Quarum quidem ope videre licet, quoniam pacto locus semper ad hyperbolam exultat, linearque indeterminata sint Asymptoti, aut ipsis parallelæ.

Detur enim positio lineæ  $BH$ , punctum autem in ea datum sit  $A$ : deinde assumptâ lineâ  $AX$  pro  $x$ , ductâque lineâ  $XY$ , quam pro  $y$  sumemus, facientem cum  $AX$  talem angulum, qualem





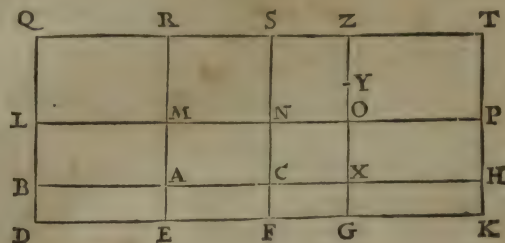
lem libuerit, eâque indefinitè productâ: ducantur lineæ DK, LP, QT parallelæ ipsi BH; ita ut DK cadat infra BH; LP autem supra BH, inter puncta X & Y; QT verò ultra punctum Y. Eodem modo ducantur lineæ QD, RAE, SF, TK parallelæ ipsi XY seu ZG; ita ut linea QD transeat per lineam XA, productam versùs A; & SF per eandem inter puncta A & X; nec non linea TK per eandem AX, productam versùs X. Quibus ita constitutis, si per 4<sup>am</sup> Prop<sup>em</sup> 2<sup>di</sup> libri Conicorum Apollonii describatur Hyperbola, quæ transeat per punctum Y, cuiusque Asymptoti sint lineæ, quas refert quælibet constructio; manifestum est, per 12 Prop<sup>em</sup> eiusdem libri rectangula omnia, quæ ad easdem lineas similiter sumuntur, sibi invicem esse æqualia. Ideoque demonstrandum solum restat, Asymptotos, atque rectangulum uniuscujusque æquationis, ritè esse constructa.

Esto igitur secundum ultimam æquationem Hyperbola constructa, transiens per punctum Y, cuiusque Asymptoti sint DQ, & DG; & rectangulum, contentum sub lineis DG, GY, sit æquale rectangulo dato  $df + bc$ . Hinc si juxta constructionem fecerimus lineas AX  $\propto x$ , XY  $\propto y$ , AB  $\propto c$ , BD vel XG  $\propto b$ ; manifestum est, BX vel DG fore  $x + c$ ; GY autem  $y + b$ ; atque multiplicando unam per alteram proditurum  $bc + bx + cy + xy$ , pro rectangulo linearum DG, GY. quod aliunde quoque æquatur  $df + bc$ . Ac proinde, si utrinque commune auferatur rectangulum  $bc$ , relinquetur  $xy + cy + bx \propto df$ . quæ est æquatio proposita. Eodem modo reliquarum omnium æquationum & constructionum demonstratio ostendetur.

Æqua-

<i>Aequat. 1<sup>ma</sup>.</i> $xy \propto df$ <i>Constr.</i> Rectangulum $AXY \propto df$ Asymptoti $XA, AR$ .	<i>Aquat. 8.</i> $xy - bx \propto df$ <i>Constr.</i> AM $\propto b$ Asympt. RM, MO. Rectang. MOY $\propto df$ .	<i>Aquat. 13.</i> $xy - cy - bx - df \propto 0$ <i>Constr.</i> AC $\propto c$ , CN $\propto b$ Asympt. SN, NO. Rectang. NOY $\propto df + bc$ .
<i>Aquat. 2.</i> $xy + cy \propto bx$ <i>Constr.</i> AB $\propto c$ , BQ $\propto b$ Asympt. BQ, QZ. Rectang. QZY $\propto bc$ .	<i>Aquat. 9.</i> $xy + df \propto cy$ <i>Constr.</i> AH $\propto c$ Asympt. AH, HT. Rectang. HXY $\propto df$ .	<i>Aquat. 14.</i> $xy + cy - bx + df \propto 0$ <i>Constr.</i> AB $\propto c$ , BQ $\propto b$ Asympt. BQ, QZ. Rectang. QZY $\propto df + bc$ .
<i>Aquat. 3.</i> $xy + bx \propto cy$ <i>Constr.</i> AH $\propto c$ , HK $\propto b$ Asympt. EK, KT. Rectang. KGY $\propto bc$ .	<i>Aquat. 10.</i> $xy + df \propto bx$ <i>Constr.</i> AR $\propto b$ Asympt. AR, RZ. Rectang. RZY $\propto df$ .	<i>Aquat. 15.</i> $xy + bx - cy + df \propto 0$ <i>Constr.</i> AH $\propto c$ , HK $\propto b$ Asympt. EK, KT. Rectang. KGY $\propto df + bc$ .
<i>Aquat. 4.</i> $xy - cy \propto bx$ <i>Constr.</i> AC $\propto c$ , CN $\propto b$ Asympt. SN, NO. Rectang. NOY $\propto bc$ .	<i>Aquat. 11.</i> $xy + cy - bx - df \propto 0$ <i>Constr. quando d f excedit bc.</i> AB $\propto c$ , BL $\propto b$ Asympt. QL, LO. Rectang. LOY $\propto df - bc$ <i>Constr. cum bc excedit df.</i> AB $\propto c$ , BQ $\propto b$ Asympt. BQ, QZ. Rectang. QZY $\propto bc - df$ .	<i>Aquat. 16.</i> $xy - cy - bx + df \propto 0$ <i>Constr. quando d f superat bc.</i> AH $\propto c$ , HP $\propto b$ Asympt. MP, PT. Rectang. POY $\propto df - bc$ <i>Constr. cum bc superat df.</i> AH $\propto c$ , HT $\propto b$ Asympt. HT, TQ. Rectang. TZY $\propto bc - df$ .
<i>Aquat. 5.</i> $xy + cy \propto df$ <i>Constr.</i> AB $\propto c$ Asympt. QB, BX. Rectang. BXY $\propto df$ .	<i>Aquat. 12.</i> $xy + bx - cy - df \propto 0$ <i>Constr. quando rectang. d f majus est rectangulo bc.</i> AC $\propto c$ , CF $\propto b$ Asympt. SF, FG. Rectang. FGY $\propto df - bc$ <i>Constr. quando bc rectang. excedit rectang. d f.</i> AH $\propto c$ , HK $\propto b$ Asympt. EK, KT. Rectang. KGY $\propto bc - df$ .	<i>Aquat. 17<sup>ma</sup> &amp; ultima.</i> $xy + cy + bx - df \propto 0$ <i>Constr.</i> AB $\propto c$ , BD $\propto b$ Asympt. QD, DG. Rectang. DGY $\propto df + bc$ .
<i>Aquat. 6.</i> $xy + bx \propto df$ <i>Constr.</i> AF $\propto b$ Asympt. RE, EG. Rectang. EGY $\propto df$ .		
<i>Aquat. 7.</i> $xy - cy \propto df$ <i>Constr.</i> AC $\propto c$ Asympt. SC, CX. Rectang. CXY $\propto df$ .		





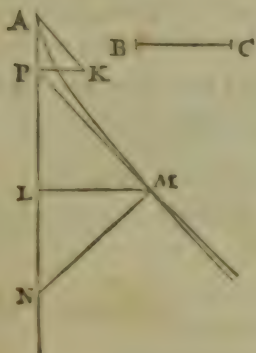
Præterea evidens est, in  $11^{\text{ma}}$ ,  $12^{\text{ma}}$ , &  $16^{\text{ta}}$  æquatione existente rectangulo  $df$  æquali  $bc$ , si hoc ipsum in locum  $df$  substituat, undecimam quidem tunc fore divisibilem per  $x + c$ , duodecimam per  $y + b$ , & decimam sextam per  $c - x$ ; Vtramque autem  $11^{\text{mam}}$  &  $16^{\text{tam}}$  posse reduci ad  $y \propto b$ ; at  $12^{\text{mam}}$  ad  $x \propto c$ . Adeò ut tunc tantum locum ad lineam rectam exhibeant, quando habetur  $y \propto b$ , &  $XY$  ipsi  $b$  fit æqualis, atque per punctum  $Y$  recta linea ducitur ipsi  $AX$  parallela, ut habeatur quæsitæ; Aut quando habetur  $x \propto c$ , &  $XA$  ipsi  $c$  fit æqualis, erit parallela  $AR$  linea recta quæsitæ.

Caterum potuimus quidem æquationum harum varietatem ad minorem numerum reducere, transmutando nempe unam indeterminatarum quantitatum in alteram (sicut in eum finem illas, quæ mutationem hanc recipere possunt, ordine disposuimus); tum etiam constructiones illarum, in quibus quatuor termini non reperiuntur, comprehendere sub iis, quæ omnes habent completos: sed quoniam multò prolixiori indiguissimus sermone, & res ipsa minùs fuisset dilucida, ratione ostensâ uti maluimus.

AD PAGINAM 40 ET SEQUENTES, DE MODO  
INVENIENDI CONTINGENTES LINEARUM  
CURVARUM.

**N**Otandum hîc est, modum inveniendi tangentes linearum curvarum, hoc loco expositum, consistere in inveniendâ æquatione, in quâ linea  $y$  vocata sumi potest pro duabus quantitibus diversis, cùm linea quæ vocatur  $x$  ad tangentem non refertur,

feretur, at verò cum ad ipsam refertur, quòd tunc duæ illæ quan-  
titates diverfæ intelligantur æquales feu in unam còalefcere.  
Quod fit comparando æquationem inventam cum æquatione  
 $yy - 2ey + ee = 0$  aliavè ex hac compofitâ. Hujus rei propona-  
mus fequens exemplum.



Est *linea recta AN*, curva autem *AM*, cujus vertex punctum *A*, cujusque hæc sit proprietas: ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut *M*, à quo ad rectam *AN* ducatur perpendicularis *ML*, recta *BC*, ad arbitrium sumpta, unà cum *AL*, sit ad *AL*, sicut linea *AL* ad *LM*. Oportet rectam lineam invenire *PM*, tangentem hanc curvam *AM* in puncto *M*. Supponatur linea *NM* perpendicularis ad tangentem *PM* in puncto *M*, &  $BC \propto b$ ,  $AL \propto y$ , &  $LM \propto x$ . Hinc cum  $b + y$  sit ad  $y$ ,

ut  $y$  ad  $x$ , fiet æquatio talis:  $b x + y x \propto y y$ , ac proinde  $x \propto \frac{y^2}{b+y}$ .  
 Jam verò, pro eo, quòd in hoc exemplo imaginamur curvam  $A M$   
 tangi à circulo cujus radius  $M N$ , satius est imaginari, quòd ipsa  
 tangatur à recta linea  $M P$ : quandoquidem hoc modo superfluum  
 multiplicationem evitamus. Quocirca statuendo  $A P \propto v$ , &  
 $P K \propto s$  esse parallelam ipsi  $L M$ , atque ab  $A K$ , quæ parallelæ est  
 ipsi  $P M$ , secari in  $K$ : erit ut  $v$  ad  $s$ , sic  $y - v$  ad  $L M$  seu  $\frac{y s - v s}{v}$ .

Quæ quidem cum supra inventa sit  $\propto \frac{y^2}{b+y}$ , habebitur  $\frac{y^2}{b+y} \propto \frac{y^2-v^2}{v}$ , vel  $yy \propto \frac{b^2-v^2}{v-s}$  in  $y = \frac{bv}{v-s}$ , comparandum cum  $yy \propto 2ey - e^2$ . Vnde primo invenimus  $\frac{b^2-v^2}{v-s} \propto 2e$ , vel  $s \propto \frac{2ev}{b-v+e}$ . Deinde  $\frac{bv}{v-s} \propto e^2$ , vel  $s \propto \frac{e^2 v}{b+v+e}$ , ac per consequens  $\frac{2ev}{b-v+e} \propto \frac{e^2 v}{b+v+e}$ . Hoc est,  $AP \propto v \propto \frac{be}{2b+e}$  seu  $\frac{by}{2b+y}$ , &  $PL \propto y - v \propto \frac{by+y^2}{2b+y}$ . Caterum quoniam  $LM$  media

R 2

est



est proportionalis inter PL & LN, erit LN  $\propto \frac{2by^3 + y^4}{b^3 + 3b^2y + 3by^2 + y^3}$ .

Quod erat faciendum. Vel etiam sic, imaginando curvam AM tangi à circulo, cujus radius est MN. Omnino ut in hujus Geometriae Methodo supponitur factum.

Igitur quoniam habemus  $\frac{y^2}{y+b} \propto x$ , ac proinde  $x^2 \propto \frac{y^4}{y^2 + 2by + b^2}$ , supponamus, quemadmodum hæc Geometria requirit, AN  $\propto v$ , & MN  $\propto s$ , & erit quadratum ex LM, hoc est,  $x^2 \propto ss - vv + 2vy - yy$ , ac idcirco  $\frac{y^4}{y^2 + 2by + b^2} \propto ss - vv + 2vy - yy$ . Vnde æquatione ope multiplicationis ordinatâ, divisâque totâ summâ per 2, exurget æquatio talis:

$$\begin{array}{r} y^4 + by^3 + \frac{1}{2}vvyy + bvy + \frac{1}{2}bbvv \propto 0. \\ -v + \frac{1}{2}bb - bbv - \frac{1}{2}bbss \\ -2bv - bss \\ -\frac{1}{2}ss \end{array}$$

Iam verò multiplicando  $yy - 2ey + ee \propto 0$  per  $yy + fy + gg$ , ut alteri reddatur similis, proveniet hæc æquatio:

$$\begin{array}{r} y^4 + fyy^3 + ggyy - eeggy + eegg \propto 0. \\ -2e - 2ef + eef \\ + ee \end{array}$$

Quæ si comparatur cum præcedente, quantitates secundi termini præbebunt  $f \propto b + 2e - v$ ; ultimi  $gg \propto \frac{b^2v^2 - b^2s^2}{2e^2}$ ; & tertii  $\frac{b^2v^2 - b^2s^2}{2e^2} - 2be - 3ee + 2ev \propto \frac{1}{2}vv + \frac{1}{2}bb - 2bv - \frac{1}{2}ss$ .

Ac proinde si multiplicemus totum per  $2ee$ , producet  $+bbvv - bbss - 4be^3 - 6e^4 + 4ve^3 \propto vvee + bbee - 4bvee - ssee$ , sive  $bbvv - 4be^3 - 6e^4 + 4ve^3 - vvee - bbee + 4bvee \propto bbss - eess$ , & per consequens

$$\begin{array}{r} -6e^4 + 4ve^3 - vvee + bbvv \propto ss. \\ -4b + 4bv \\ -bb \\ \hline bb - ee \end{array}$$

Quartus terminus dabit

$$\frac{-b^2v^2 + b^2s^2}{e} + bbe - vee + 2e^3 \propto +bbvv - bbv - bss.$$

Vnde multiplicando totum per  $e$ , fiet

$$-bbvv + bbss + be^3 - ve^3 + e^4 \propto +bbve - bbve - bess.$$

ac per

ac per consequens

$$\frac{-^2e^2 + ve^2 + bvve + bbvv}{-b - bbv} \propto sc.$$

$$\frac{bb + be}{bb + be}$$

Quocirca habebimus

$$\frac{^2e^2 + ve^2 - vvee + bbvv}{-^2b + ^2bv - bb} \propto \frac{-^2e^2 + ve^2 + bvve + bbvv}{-b - bbv}$$

$$\frac{bb - ee}{bb + be}$$

Hinc multiplicando per crucem, ut in fractionibus, & auferendo utrinque producta æqualia, habebitur

$$2e^4 + 7be^2 + 8bbe^2 + 4b^2e^2 - 4b^2vee - b^2ve \propto 0.$$

$$-v - 4bv - 6bb + b^2$$

Quam æquationem si dividamus per  $ee + be$ , orietur

$$2e^2 + 5be^2 + 3bbe^2 - 3bbve - b^2v \propto 0:$$

$$-v - 3bv + b^2$$

ac per consequens

$$^2e^2 + ^2be^2 + ^2bbe^2 + b^2e \propto b^2v + ^2bbev + ^2beer + e^2v.$$

ac demum  $\frac{2e^2 + 5be^2 + 3bbe^2 + b^2e}{b^2 + 3bbv + 3bbe + e^2} \propto v.$

Vbi si in locum  $e$  substituatur  $y$ , atque ex hac summa deinde auferatur linea  $AL \propto y$ , relinquetur  $LN \propto \frac{2by^2 + y^4}{b^2 + 3bbv + 3bbe + y^2}$  ut supra. Vbi notandum, lineam hanc curvam non aliam esse quàm Hyperbolam, supra à nobis constructam.

AD PAGINAM 75 & 76.

**D**Emonstranda hic est operatio, quam hæc Geometria nos docet, cum radicem incognitam alicujus æquationis multiplicare volumus per certam aliquam quantitatem aut numerum cognitum. Proponatur æquatio  $x^2 - ex^2 + dd x - b^2 \propto 0$ , cujus radicem incognitam  $x$  per lineam  $b$  multiplicare oporteat. Supponatur  $y \propto xh$ , & fiet  $\frac{y}{b} \propto x$ , ideoque  $\frac{y^2}{b^2} \propto x^2$ , nec non  $\frac{y^3}{b^3}$

$\propto x^3$ . Proinde si substituamus in æquatione præcedente  $\frac{y}{b}$  loco  $x$ , &  $\frac{y^2}{b^2}$  loco  $x^2$ , itemque  $\frac{y^3}{b^3}$  loco  $x^3$ , erit sequens æquatio  $\frac{y^3}{b^3} -$

R 3



$\frac{cy^2}{b^2} + \frac{d^2y}{b} - b^3 \propto 0$ , æqualis præcedenti. Vnde multiplicando totum per  $b^3$ , produceretur  $y^3 - chyy + ddhhy - b^3h^3 \propto 0$ . Evidens autem est, idem productum inveniri, si in æquatione proposita ponamus  $y$ , & quadratum ejus  $yy$ , cubumque  $y^3$ , loco  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ : atque deinde secundum terminum multiplicemus per  $b$ , tertium per  $b^2$ , & quartum per  $b^3$ , omnino ut hæc Geometria docet. Vbi, postquam substituimus  $\frac{y}{b}$ ,  $\frac{y^2}{b^2}$ , &  $\frac{y^3}{b^3}$  loco  $x$ ,  $x^2$ , &  $x^3$ , ad multiplicandum totum per  $b^3$ , sufficit auferre denominatorem, qui ab  $b$  denominatur, atque tantum reliquum secundi termini multiplicare per  $b$ , reliquum tertii per  $hh$ , & reliquum quarti per  $b^3$ : quandoquidem à terminis, secundo & tertio, auferendo denominatores  $hb$  &  $b$ , ipsi eatenus sunt multiplicati. Adeò ut sufficiat multiplicare reliquum secundi termini per  $b$ , & reliquum tertii per  $hh$ , at ipsum quartum per  $b^3$ , cum hic denominatorem ab  $b$  denominatum, per quem sic auferendo fuisset multiplicatus, non admittat. non aliter quàm hæc Geometria docet. Quæ demonstratio & methodus in altioribus quoque æquationibus locum obtinent, in quibus radix  $x$  plures dimensiones, quàm in æquatione proposita, admittit.

Notandum autem est, cum termini æquationis hujus sic productæ non singuli æquè multas literas seu dimensiones habent, lineam, quam pro unitate ad libitum sumpsimus, & cujus ratione supposuimus  $\frac{y}{b} \propto x$ , toties in terminis, qui pauciores dimensiones seu literas habent, subintelligendam esse, quoties fuerit opus. Adeò ut ejusdem lineæ beneficio termini abbreviari possint, sic ut singuli non nisi tres literas seu dimensiones admittant, ac præterea ut illius ope, postquam radix una  $y$  fuerit cognita, mediante æquatione  $\frac{y}{b} \propto x$ , cognoscatur quoque radix altera  $x$ .

Ad hæc supponere quoque possumus  $yy \propto xh$ , ita ut habeamus  $\frac{y^2}{b} \propto x$ , &  $\frac{y^4}{b^2} \propto x^2$ , nec non  $\frac{y^6}{b^3} \propto x^3$ ; quibus, ut supra, subrogatis, habebimus  $\frac{y^6}{b^3} - \frac{cy^4}{b^2} + \frac{d^2y^2}{b} - b^3 \propto 0$ . Ac proinde multiplicando totum per  $b^3$ , fiet  $y^6 - chyy^4 + ddhhy^2 - b^3b^3 \propto 0$ . Vnde perspicuum fit, quod substituendo, juxta præscriptum hujus Geometriæ,  $yy$  pro  $x$ , quadratum ejus  $y^4$  pro  $x^2$ , & ipsius

& ipsius cubum  $y^3$  pro  $x^3$ , atque multiplicando secundum terminum per  $h$ , tertium per  $h^2$ , & quartum per  $h^3$ , eandem consecuturi sumus æquationem. ut ex demonstratione superiori facile est colligere; & omnes quidem termini æquè multas habebunt literas seu dimensiones. Et tantum de operatione per literas.

Quod autem spectat ad operationem, quæ fit, cùm radix incognita per numerum aliquem est multiplicanda; ipsa eidem demonstrationi innititur.

Esto eadem, quæ supra, æquatio:  $x^3 - cxx + ddx - b^3 = 0$ ; & oporteat radicem incognitam  $x$  multiplicare per 3. Supponatur  $y = 3x$ , eritque  $\frac{y}{3} = x$ , &  $\frac{y^2}{9} = x^2$ , nec non  $\frac{y^3}{27} = x^3$ . Quibus, ut supra, substitutis, fiet  $\frac{y^3}{27} - \frac{cy^2}{9} + \frac{d^2y}{3} - b^3 = 0$ . Ac proinde multiplicato toto per 27, exsurgit  $y^3 - 3cy^2 + 9d^2y - 27b^3 = 0$ . Quæ æquatio etiam invenitur, si in æquatione proposita substituamus  $y$ , quadratum ejus  $yy$ , & ipsius cubum  $y^3$ , loco  $x$ , quadrati  $x^2$ , &  $x^3$  cubi; atque deinde secundum terminum per 3 multiplicemus, tertium per 9, & quartum per 27, ex præscripto hujus Geometriæ. Quæ quidem operatione termini omnes, ob rationes supra allatas, æquè multas dimensiones acquirant.

Idem intelligendum est de exemplo in hac Geometria proposito,  $x^3 - x\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27}\sqrt{3} = 0$ . Etenim supposito  $y = 3x\sqrt{3}$ , erit  $\frac{y}{3\sqrt{3}} = x$ , &  $\frac{y^2}{3} = x^2$ , nec non  $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} = x^3$ . Vnde si in æquatione proposita substituamus  $\frac{y}{3\sqrt{3}}$ , quadratum ejus  $\frac{y^2}{3}$ , & ipsius cubum  $\frac{y^3}{3\sqrt{3}}$ , in locum  $x$ , quadrati  $x^2$ , & cubi  $x^3$ ; invenietur  $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} - \frac{y^2}{3} + \frac{26y}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$ . Atque adeò si totum multiplicemus per  $3\sqrt{3}$ , habebitur  $y^3 - 3y^2 + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$ . Eadem nempe æquatio, quæ obtinetur operando juxta hujus Geometriæ methodum, quemadmodum supra fuit ostensum.

Non secus fiet demonstratio, si de radice incognita per quantitatem aliquam cognitam dividenda agatur. Proponatur namque æquatio  $x^3 - cxx + ddx - b^3 = 0$ , sitque  $x$  dividenda per  $h$ .

Sup-



Supponatur  $y \propto \frac{x}{b}$ , eritque  $yh \propto x$ , &  $y^2 h^2 \propto x^2$ , nec non  $y^3 h^3 \propto x^3$ . Quæ si in æquatione proposita substituantur, fiet  $y^3 h^3 - e h^2 y^2 + d^2 h y - b^3 \propto 0$ . Ac proinde si totum dividatur per  $h^3$ , orietur  $y^3 - \frac{e}{b} y^2 + \frac{d^2}{b^2} y - \frac{b^3}{b^3} \propto 0$ .

Manifestum autem est, idem nos obtenturos, si in æquatione proposita subrogemus  $y$ , quadratum ejus  $yy$ , & ipsius cubum  $y^3$ , in locum  $x$ , quadrati  $x^2$ , & cubi  $x^3$ , atque sic deinde secundum terminum dividamus per  $h$ , tertium per  $hh$ , & quartum per  $h^3$ : quoniam in superiori operatione, ubi  $hh$  in secundo termino, &  $b$  in tertio reperitur, perspicuum est, quod, ad dividendum omnes terminos per  $h^3$ , auferendo toties  $h$ , quoties in ipsis reperitur, opus tantum sit dividere reliquum secundi termini per  $h$ , reliquum tertii per  $hh$ , ipsum autem quartum terminum per  $h^3$ , quippe qui quantitatem  $h$  non comprehendit. Omnino ut hæc Geometria requirit.

Quia verò æquationis hujus sic productæ termini singuli non æquæ multas habent literas seu dimensiones; igitur ut æquales numero reddantur, oportebit in illis, qui pauciores dimensiones habent quàm requiritur, toties literam aliquam subintelligere, quoties erit opus, quæ lineam pro unitate ad libitum sumptam designet, & cujus ratione supposuimus  $y \propto \frac{x}{b}$ . vel potius beneficio hujus lineæ, quam pro unitate assumpsimus, & linearum cognitarum, efficere, ut singuli æquationis termini tres literas seu dimensiones habeant. Id quod facile est. Etenim cognitâ, v.g. lineâ  $\frac{e}{b}$ , pro unitate acceptâ, possumus ad eandem denotandam loco  $\frac{e}{b}$  sumere  $p$ . atque ita de cæteris. Aded ut, cognita radice  $y$ , ejusdem unitatis ope cognoscatur quoque  $x$ , per æquationem hanc  $y \propto \frac{x}{b}$ , vel  $yh \propto x$ .

Nec aliter in numeris veritatem hujus Geometriæ Methodi ostendemus. Proponatur enim eadem æquatio, quæ supra,  $x^3 - ex^2 + ddx - b^3 \propto 0$ , & oporteat radicem incognitam  $x$  dividere per 3. Suppositâ igitur  $y \propto \frac{x}{3}$ , fiet  $3y \propto x$ , &  $9yy \propto x^2$ , nec non  $27y^3 \propto x^3$ . Quæ si substituantur in æquatione proposita, habebitur  $27y^3 - 9eyy + ddy - b^3 \propto 0$ . Ac proinde dividendo totum

totum per 27, orietur  $y^3 - \frac{1}{3}py + \frac{1}{3}ddy - \frac{1}{3}b^3 \propto 0$ . Quæ æquatio quoque invenietur, si procedamus juxta hujus Geometria Methodum: subrogando nimirum  $y$  in æquatione proposita, quadratum ejus  $yy$ , & ipsius cubum  $y^3$ , in locum  $x$ , quadrati  $x^2$ , & cubi  $x^3$ : & dividendo deinde secundum terminum per 3, tertium per hujus quadratum 9, & quartum per ipsius cubum 27. Eadem demonstratio locum obtinet, si in æquatione radix incognita plures dimensiones habuerit.

AD PAGINAM 79, & sequentes.

**P**ROponatur  $x^4 + px^3 + qx - r \propto 0$ , & supponatur juxta præscriptum hujus Geometria  $x^3 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$ , eritque  $x^3 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \propto \frac{q}{2y} - yx$ , ac proinde quadratum unius partis æquale quadrato partis alterius, hoc est,  $x^4 + yyxx + \frac{1}{2}y^4 + px^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{2}pp \propto \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyxx$ , & consequenter  $x^4 + \frac{1}{2}y^4 + px^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{2}pp + qx - \frac{q^2}{4y^2} \propto 0$ . Ex qua æquatione si tollatur prima  $x^4 + px^3 + qx - r \propto 0$ , relinquetur  $\frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{2}pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \propto 0$ . Unde multiplicando totum per  $4yy$ , exsurget  $y^6 + py^4 + \frac{p^2}{4}yy - qq \propto 0$ . Quod erat demonstrandum.

Eadem ratione demonstratio fiet secundum omnes variationes signorum  $+$  &  $-$ , atque observationes in hac Geometria expositas. In cujus rei exemplum duorum adhuc sequentium casuum demonstrationem subjiciemus.

Sit æquatio proposita  $x^4 - px^3 + qx - r \propto 0$ . Si ergo juxta hanc Geometriam supposuerimus  $x^3 + yx + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$ , habebimus  $x^3 + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p \propto \frac{q}{2y} - yx$ . Vnde & quadratum unius partis æquale erit quadrato alterius partis, hoc est,  $x^4 + yyxx + \frac{1}{2}y^4 - px^3 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{2}pp \propto \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyxx$ . Et per consequens  $x^4 + \frac{1}{2}y^4 - px^3 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{2}pp + qx - \frac{q^2}{4y^2} \propto 0$ . E qua si auferatur prima  $x^4 - px^3 + qx - r \propto 0$ ,

S

relin-



relinquetur  $\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \propto 0$ . Quare si totum multiplicemus per  $4yy$ , inueniemus  $y^6 - 2py^4 + \frac{p^2}{4r}yy - qq \propto 0$ . Quod demonstrare oportebat.

Iam verò si ponamus  $x^4 + px^2 - qx + r \propto 0$ , supponendo secundum hanc Geometriam  $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$ ; erit  $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \propto \frac{q}{2y} + yx$ . Vnde quadratum prioris partis æquale erit quadrato posterioris, hoc est,  $x^4 + yx^2 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \propto yx^2 + qx + \frac{qq}{4yy}$ . Ac per consequens,  $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - qx - \frac{qq}{4y^2} \propto 0$ . E qua si tollatur prima  $x^4 + px^2 - qx + r \propto 0$ , remanebit  $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - r - \frac{qq}{4yy} \propto 0$ . Atque ideo si totum multiplicetur per  $4yy$ , inuenietur  $y^6 + 2py^4 + \frac{p^2}{4r}yy - qq \propto 0$ . Quod erat demonstrandum.

Non secus demonstrabuntur omnes reliqui casus secundum utramlibet harum suppositionum: nimirum,  $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$ , aut  $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$ , observando tantum signa  $+$  &  $-$ , quemadmodum hæc Geometria docet. Cujus operationis ope in genere æquationes omnes, in quibus radix incognita 4<sup>or</sup> habet dimensiones, ad formam, in hac Geometria propositam, reduci possunt: nimirum,  $+y^6 - 2py^4 + \frac{p^2}{4r}yy - qq \propto 0$ . signa  $+$  &  $-$  quæ præcipit, observando, sicut demonstravimus. Quo fit, ut, si divisionis beneficio æquationem propositam ad eam formam reducere possimus, ita ut post divisionem radix ejus  $y$  plures quàm duas dimensiones non admittat, ipsa per Geometriam communem, juxta præscripta paginae 6 & 7 hujus Geometriæ inveniri possit. Quâ inventâ, mediantibus æquationibus  $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$ , &  $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \propto 0$ , (observando signa  $+$  &  $-$ , ponenda locis, ubi sunt omiſſa) inuenietur quoque radix  $x$ , cujus loco in altera æquatione pro radice supposueramus  $y$ . At verò si æquatio  
supra

supra inventa, denominata à radice  $y$ , sic dividi nequeat, tunc considerare illam poterimus, velut tres duntaxat dimensiones habentem, supponendo scilicet  $xyy$ , ipsamque substituendo in æquatione; adeo ut habeamus  $z^3 - 2pz^2 + \frac{p^2}{4r}z - qq\infty 0$ . Quæ, observatis iisdem signis  $+$  &  $-$ , quæ in altera æquatione reperiuntur, & sublato secundo termino, per id, quod pag. 73 dictum est, reducetur ad formam aliquam illarum trium, quæ habentur paginâ 93, ad inveniendam deinde radicem ejus  $z$  per Geometriam Solidorum, juxta pag. 85, & sequentes. Quæ certè eadem futura est quæ  $yy$ , quâ cognitâ innotesceat &  $y$ . Cujus ope atque duarum superiorum æquationum tandem invenietur  $x$ .

Verum enimverò observandum est; in omnibus præcedentibus operationibus utendum esse eadem lineâ, quæ pro unitate est accepta, si illam determinamus, & usurpamus ad æquationem propositam reducendam ad superioris formam, nempe:  $x^3 + px^2 + qx + r\infty 0$ . observando signa  $+$  &  $-$ .

Verum equidem est, quòd, postquam æquationem hanc ad præcedentis formam reduximus, quæ à radice  $y$  sit denominata, nimirum ad æquationem  $y^6 - 2py^4 + \frac{p^2}{4r}y^2 - qq\infty 0$ , quæ quæque dividi seu reduci non possit, ita ut radix ejus  $y$  plures quàm duas dimensiones habeat, non teneamur ulterius progredi: (siquidem illo casu Problema non Planum, sed Solidum existit, juxta pag. 80) atque tunc contenti esse possimus æquatione primâ  $x^3 + px^2 + qx + r\infty 0$  (cum per illam invenire possimus radicem  $x$  mediante Geometriâ Solidorum, secundum paginam 85 & sequentes): Attamen nihilominus operatione præcedente, quam explicavimus, uti possumus, saltem ut ostendatur veritas ejus, quod habetur pag. 93 & 94, ubi dicitur, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad æquationem, quæ ultra quadrato-quadratum non ascendit, reducuntur, semper ad formam aliquam earum, quæ paginâ 93 proponuntur, reduci queant.

AD PAGINAM 93.

**Q**uandoquidem ex eo, quod in hac Geometria ostensum atque supra adnotatum est, liquet, æquationes omnes, quarum difficultates ultra Quadrato-quadratum aut Cubum non

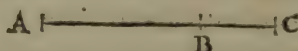
S 2

ascen-



ascendunt, reduci posse ad aliquam formam earum, quæ hæc paginâ proponuntur: exhibenda tantum restat demonstratio radicis, quæ ex ipsis, secundum Cardani regulas, quas super hac re in medium affert Capite secundo libri ejus, quem de Arte Magna seu Regulis Algebraicis inscripsit, educuntur. Cum hoc ipsum difficultatem fortè non exiguum parere posset iis, qui in eundem locum aliquando inciderent, quippe qui à Speciosa Algebra, & mutua inter Arithmetica & Geometria relationis atque convenientiæ ignaris, non facillè percipiatur. Quocirca ut veritas extractionis harum radicum expendatur, demonstrabimus primum sequens

## L E M M A.



SEctâ utcumque lineâ AC in B, ostendendum est: Cubum lineæ AB, unâ cum cubo lineæ BC, & triplo producto linearum AC,

BC, AB, simul æquari cubo lineæ AC.

Sit AB  $\propto a$ , BC  $\propto b$ , eritque AC  $\propto a + b$ . Productum linearum AC, BC, AB, erit  $baa + bba$ , cujus triplum  $3baa + 3bba$ . Huic si addantur cubi linearum AB, BC, fiet  $a^3 + 3baa + 3bba + b^3$ . Et manifestum est, summam hanc æqualem esse cubo lineæ AC.

Demonstrato itaque hoc Lemmate, habebitur primo loco

$$Z \propto \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Hinc in figura adjecta supponendo binomium

$$\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \text{ æquale lineæ AC, \& residuum}$$

$$\sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \text{ æquale lineæ BC, erit eorum differentia}$$

$$\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \text{ æqualis lineæ AB. Iam verò}$$

statuendo AB  $\propto Z$ , erit differentia Cuborum ex his radicibus (nimirum differentia inter cubum  $+ \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ , & cubum  $- \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ , (auferendo hunc ab illo) æqualis  $q$ . Quæ propterea æqualis erit differentiæ inter cubum lineæ

neæ

neæ B C. Atqui cubus lineæ AB, & triplum productum linearum A C, B C, A B simul, æquantur eidem differentiæ q, (liquidem cum cubo lineæ B C componunt cubum lineæ A C). Erit itaque  $\zeta^3$ , cubus videlicet lineæ A B, unâ cum triplo producto linearum A C, B C, A B, æqualis q.

Ut autem habeatur hoc productum, multiplicandum est binomium  $\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ , quod æquatur lineæ A C, per residuum  $\sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ , quod æquale est lineæ B C. Hinc cum  $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$  in se multiplicatum faciat  $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$ , ac  $+\frac{1}{2}q$  in  $-\frac{1}{2}q$  faciat  $-\frac{1}{4}qq$ ; quæ producta simul addita faciunt  $\frac{1}{27}p^3$  (liquidem  $+\frac{1}{4}qq$  &  $-\frac{1}{4}qq$  addendo evanescunt): & porro producta, quæ sunt ex  $+\frac{1}{2}q$  &  $-\frac{1}{2}q$  in  $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ , se mutuo destruant: Erit totum productum  $\sqrt{C. \cdot \frac{1}{27}p^3}$  seu  $\frac{1}{3}p$ , radix scilicet cubica ex  $\frac{1}{27}p^3$ . quandoquidem quaestio erat de multiplicandis radicibus cubicis. Vnde triplum productum erit p, quod si multiplicetur per AB, hoc est, per  $\zeta$ , fiet  $p\zeta$ , æquale triplo producto linearum A C, B C, A B. Et per consequens  $\zeta^3 + p\zeta = q$ , vel  $\zeta^3 = -p\zeta + q$ . Quod erat demonstrandum.

Sit jam secundo loco

$\zeta = \sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ .  
& supponatur prima radix cubica (quæ binomium est) in figura præcedente æqualis lineæ A B; secunda autem (quæ residuum est) æqualis lineæ B C; eritque summa cuborum utriusque lineæ æqualis q. Porro supponendo lineam A C  $\propto \zeta$ , auferendoque ex ejusdem cubo  $\zeta^3$ , triplum productum linearum A B, B C, &  $\zeta$ , relinquentur cubi linearum A B & B C, qui quidem simul sumpti ipsi q sunt æquales. Est autem productum ex A B, B C, hoc est, quod sit ex binomio in residuum,  $\sqrt{C. \cdot \frac{1}{27}p^3}$  seu  $\frac{1}{3}p$ . Nam cum multiplicando  $+\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$  per  $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$  (unâ radice existente signo + adfectâ, alterâ verò signo -) producat utriusvis quadratum affectum signo -, nimirum  $-\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$ , & utramque radicem per  $+\frac{1}{2}q$  multiplicando, producta evanescant; restat tantum  $+\frac{1}{2}q$  in se multiplicandum. Quare cum productum illud sit  $+\frac{1}{4}qq$ , & alterum productum inventum sit  $-\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$ ; erit totum productum  $\sqrt{C. \cdot \frac{1}{27}p^3}$  seu



342 FL. DE BEAUNE NOTÆ BREVES.

feu  $\frac{1}{2} p$ , sicut diximus, ac proinde ejus triplum  $p$ . Quod si rursus multiplicetur per  $z$ , producet  $p z$ , æquale triplo producto linearum  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ : & per consequens  $z^3 - p z \propto q$ , hoc est,  $z^3 \propto * + p z + q$ . Quod erat demonstrandum.

Adduxi autem demonstrationem extractionis harum radicum, quod contemplatio earum atque inventio pulcherrimæ mihi sint visæ. Verum quantum ad praxin, cum Geometricè æquationum hoc loco propositarum radices sunt extrahendæ; ejus sanè methodus, quæ generalis atque facilis est, quàm optimè in hac Geometria demonstrata cernitur. Si verò Arithmetice illas extrahere lubuerit, multò id facilius fiet juxta methodum à Vieta in tractatu de Numerosa Potestatum Resolutione traditam, quàm per hæc regulas Cardani.

F I N I S.



FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

I. 2

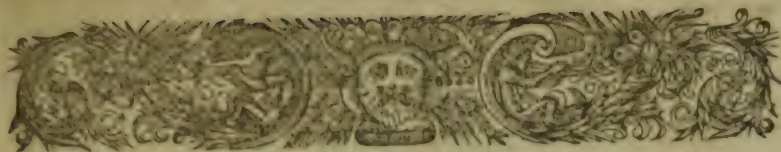
GEOMETRIAM

RENATI DES CARTES

COMMENTARIIL







## ARGVMENTVM PRIMI LIBRI.

**P**rimo libro Autor viam quodammodo aperit ad suam Methodum, quā in resolvendis & construendis Geometria Problematis utitur, quamque tribus hisce libris est completurus. Quae est, ut certarum notarum sive characterum beneficio, quibus cum data tum quaesita linea designantur, difficultates omnes, quae in isdem Problematis evolvenda veniunt, ad ejusmodi terminos reducantur, ut deinde ad illorum constructionem non nisi rectarum quarundam linearum longitudinem querere sit opus. Ad quas inveniendas, docet, operationes omnes, quae circa lineas hasce, ut cognita fiant, sunt instituenda, ad 4 vel 5 diversas, quemadmodum in Arithmetica, revocari posse: quae sunt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum Extractio. Quae quā ratione Geometricè fiant, deinceps explicat. Vbi porro observandum venit, quod, postquam hi Arithmetices termini in Geometriam sunt introducti, ad operationes hasce in lineis aequè instituendas atque in numeris, consentaneum sit rectam lineam, quae unitatis vicem gerat, assumere, & ad eandem reliquas referre. Id quod communiter liberum est, cum quamlibet lineam pro ea accipere liceat.

Quibus explicatu, ostendit, quo pacto notis atque literis in Geometria sit utendum ad praedictas lineas breviter designandas, earumque operationes facile indicandas: ut hac ratione diversa earum relationes conspicuae fiant, atque difficultas omnis, verborum involutis exuta, quam simplicissimè ob oculos poni possit. Et quia hac Methodus in resolvendis Geometria Problematis requirit, ut difficultates omnes, quae in illis evolvenda occurrunt, ad unum genus Problematum reducantur, nempe, ut quaratur tantummodo valor quarundam linearum rectarum, quae alicujus aequationis sint radices: idcirco docet, quo pacto Problema aliquod propositum perducatur ad aequationem, supponendo illud ipsum ut jam factum. Ac deinde, cum Aequatio certum sit medium quo Problema solvitur, refert totidem aequationes inveniendas esse, quot in eo supposita fuerint incognita lineae. Cum

T

autem



autem hac Methodus nullis Problematum finibus coërceatur, ipsaſque non tantum ad Problemata, in quibus de inveniendis quibusdam rectis lineis, aut etiam planis, solidisve quaestio est (quae quidem facile ad tales terminos reduci queunt, ut non nisi recta quaedam linea inveniendae sint) applicari possit; sed etiam ad Problemata, in quibus certi anguli dantur, vel angulorum inter sese comparatio faciendae est; atque ad Problemata in quibus quaedam puncta aut lineae datae sunt, & alia puncta inveniri debent, se extendat (siquidem in his à quaestitis punctis ad data, aut datarum rectarum terminos, aut etiam in datis angulis ad positione datas rectae lineae duci possunt, quae quaestitorum punctorum loca determinant; in illis autem quae dictorum angulorum vices gerant, sicut post exemplis planum fiet): facile constat, illam non modo Veterum Analysin atque Recentiorum Algebrae comprehendere; sed etiam ad id omne, ubi de quantitatum aequalitate vel proportionem inquiritur, adhiberi posse, atque adeo tam generalem esse, ut nullum non suae artis per universam Mathesin specimen edat.

Iam vero postquam Problema aliquod ad aequationem est perductum, ipsaſque aequatio ad simplicissimos terminos reducta, si quidem id ipsum per Geometriam communem construi potest, hoc est, ut ad constructionem ejus non nisi rectis lineis atque circulis utamur, prout in superficie aliqua plana describuntur, docet, qualis tunc debeat esse aequatio, & quâ ratione radix ejus tam inveniri quam exprimi possit. Atque ita breviter, quidquid ad planorum Problematum constructionem spectat, absolvit.

Vt autem tum praeceptionum harum usui locus sit, tum vero ejusdem Methodi facilitas in resolvendo ac construendo nobili aliquo Problemate eluceat, inquirendam sibi tandem proponit rationem componendi loci ad tres, quatuor, vel plures lineas: ad quam, velut scientiae culmen, Veteres ut pervenirent, summâ curâ elaborarunt.

Et hoc quidem primi Libri Argumentum asserre visum fuit. Caterum loca difficiliora, quae in eo illustranda esse duximus, fere sunt sequentia.

COM-

## COMMENTARI

I N

## LIBRVM PRIMVM.

**E**T radicum extractio, quæ pro Divisionis A  
 quadam specie haberi potest. ] Quandoqui-  
 dem eadem ferme proportio utrique operatio-  
 ni convenit. Est enim in Divisione, ut quotiens  
 ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. In  
 extractione verò radice quadrata, ut radix, ceu  
 quotiens, ad unitatem; ita datus numerus, ceu  
 dividendus, ad radicem, ceu divisorem. Adde ut radice extra-  
 ctio divisionis species sit censenda, in qua divisor quotienti est æ-  
 qualis; vel etiam, in qua radix inter datum numerum & unitatem  
 est media proportionalis.

*Vel etiam si una sit, quæ vocetur unitas.* ] Per unitatem in- B  
 tellige lineam quandam determinatam, quæ ad quamvis reliqua-  
 rum linearum talem relationem habeat, qualem unitas ad certum  
 aliquem numerum.

*Ut eò commodius ad numeros referatur, quamque commu- C*  
*niter pro libitu assumere licet.* ] Sit enim, exempli gratiâ, datum  
 aliquod rectangulum transmutandum in quadratum: si pro uni-  
 tate sumatur latus unum, quod libuerit, & inter ipsum & reli-  
 quum inveniatur media proportionalis; erit ea latus quadrati, da-  
 to æqualis. Atque hâc ratione latus alterum vicem gerit alicujus  
 numeri, e quo radix quadrata est extrahenda. Adde ut manifestum  
 sit, Problema propositum, nec non mediæ proportionalis inter  
 duas datas lineas inventionem, nihil aliud esse, quàm si una lineâ  
 assumptâ pro unitate, ex reliquâ lineâ tanquam numero extraha-  
 tur radix quadrata.

*Ut ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram, ut D*  
*est altera ad unitatem, quod idem est atque multiplicatio.* ]  
 In multiplicatione enim est: ut productum ad multiplicandum,  
 T 2 ita



ita multiplicans ad unitatem. Vel permutando, ut productum ad multiplicantem, sic multiplicandus ad unitatem.

E *Vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Divisione.]*

Est namque in Divisione, ut supra annotavimus, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. Ac proinde permutando, ut quotiens ad dividendum, sic unitas ad divisorem.

F *Vt si radix cubica sit extrahenda ex  $aa\ bb - b$ , cogitandum est, quantitatem  $aa\ bb$  semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem  $b$  bis per eandem esse multiplicatam.]*

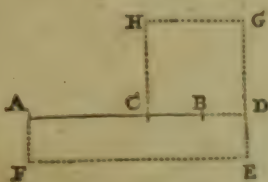
Putâ unitatem, quæ hic subintelligitur, esse  $c$ . Vnde si quantitas  $aa\ bb$ , quæ unâ abundat dimensione, semel dividatur per  $c$ , fiet  $\frac{aa\ bb}{c}$ ; at verò altera quantitas  $b$ , quæ duabus deficit dimensionibus, ut æquales numero habeantur, bis multiplicetur per  $c$ , hoc est, per  $cc$ , fiet  $bcc$ : adeò ut tota quantitas sit  $\frac{aa\ bb}{c} - bcc$ .

G *Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabis illud primâ fronte ut jam factum, nominaq; imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessaria videbuntur, tam iis quæ incognita sunt, quàm quæ cognita. Deinde, nullo inter lineas hæc cognitâ & incognitâ factò discrimine, evolventa est Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependent, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Aequatio vocatur: æquales enim sunt termini modi unius, terminis modi alterius. Iam verò tot huiusmodi Aequationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognita lineæ.] Quæ verba ut rectè percipiantur, unum atque alterum Problema proponamus.*

PRO-

PROBLEMA 1<sup>ma</sup>.

**D** Atam rectam lineam AB, utcumque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub AD, DB comprehensum, æquetur quadrato rectæ CD.



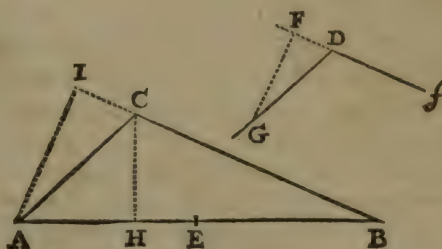
Considero rem velut jam factam, hoc est, suppono rectangulum ADEF æquari quadrato CDGH, quod faciendum proponitur. Deinde, cum omnis quaestio Geometrica eò reduci possit, ut non nisi longitudo alicujus vel aliquarum rectarum ex aliis rectis sit quaerenda, & nemo non

videat, ad ejus constructionem tantummodo quaerendam esse lineam BD, omnemque difficultatem in ea invenienda esse sitam; nomina impono lineis tam datis AC, CB, quam quaesitæ BD. Proinde, pro linea AC pono quantitatem cognitam  $a$ ; pro CB,  $b$ ; at pro BD quantitatem incognitam  $x$ , fietque AD  $a+b+x$ , CD autem  $b+x$ . Quibus peractis, ut ad Aequationem perveniat, & habeam rectangulum ADEF, duco AD, hoc est,  $a+b+x$  in DE seu DB, hoc est,  $x$ , quod proinde erit  $ax + bx + xx$ . Similiter ut inveniatur quadratum CDGH, multiplico CD, hoc est,  $b+x$  in se, fietque  $bb + bx + xx$ . Ita ut habeatur æquatio  $ax + bx + xx \propto bb + bx + xx$ . Ad quam redeundam tollatur utrinque  $bx$  &  $xx$ , sic ut ex una parte remaneat  $ax$ , & ex altera  $bb + bx$ ; tum translato  $bx$  ad alteram partem sub contrario signo, erit æquatio  $ax - bx \propto bb$ . Cujus utraque parte divisa per  $a-b$ , provenit  $x \propto \frac{bb}{a-b}$ . E quibus pater, lineam quaesitam BD inveniri per divisionem quadrati lineæ CB per excessum, quo linea AC superat ipsam CB, vel etiam per hunc excessum, tanquam primam, & lineam CB, tanquam secundam, inveniendò tertiam proportionalem BD.



PROBLEMA 2<sup>dum</sup>.

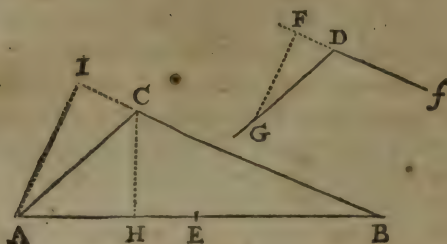
**D** Atâ rectâ lineâ terminatâ AB, ex terminis ejus A & B duas rectas lineas inflectere AC, CB, continentes angulum ACB, æqualem dato D, ut quæ ab ipsis fiunt quadrata, habeant ad triangulum ACB rationem datam, ut 4 *d* ad *a*.



Factum sit quod quæritur, & ex puncto C demittatur super rectam AB perpendicularis CH. Quoniam igitur data sunt puncta A & B; & quidem ad trium punctorum situm determinandum nihil simplicius haberi potest, quàm si noscantur tres lineæ AH, HC, & HB: facîle constat, quæstionem propositam eò reduci, ut inveniendæ tantùm sint duæ lineæ AH, HC, seu BH, HC; atque adeò duas supponendas esse lineas incognitas. Quia verò, sectâ lineâ AB bifariam in E, datum est punctum E, atque ideo ipsa AE vel EB, quam voco *a*, atque operatio aliquantò brevior evadit, si loco dictarum AH, HC, seu BH, HC, quæramus duas lineas HE, HC: Idcirco pro HE pono quantitatem incognitam *x*, & pro HC quantitatem incognitam *y*. Unde pro AH invenitur *a* - *x*, & pro HB *a* + *x*. Jam inter lineas notas & ignotas nullo facto discrimine, directè percurrenda est Problematis difficultas, & videndum, quomodo una ex aliis sit deducenda, donec tandem ad Equationem deveniatur. Primò igitur quadratum ex AC erit  $a^2 - 2ax + xx + yy$ : quo-

quoniam componitur ex duobus quadratis linearum AH & HC. Eodem modo quadratum lineæ CB erit  $aa + 2ax + xx + yy$ : quia æquale est binis quadratis ex BH & HC. Atque adeo summa quadratorum ex AC, CB erit  $aa + xx + yy$ . Quæ cum eam rationem habeat ad triangulum ABC, quod est  $ay$ , (utpote æquale semissi ejus, quod producit ex basi AB & perpendicularo CH,) quam habet  $4d$  ad  $a$ : erit productum ex  $aa + xx + yy$  in  $a$  æquale ei, quod provenit ex  $ay$  in  $4d$ , hoc est, habebitur Aequatio inter  $2a^3 + 2axx + 2ayy$  &  $4ady$ . Sed quandoquidem duæ suppositæ sunt incognitæ lineæ  $x$  &  $y$ , alia adhuc superest Aequatio inveniendæ. Quam ut inveniamus, considerandus insuper est angulus D, cui æqualis supponitur angulus ACB; qui si obtusus fuerit, produco lineam BC, donec ex puncto A in ipsam cadat perpendicularis AI, omnino ut factum est circa angulum D. Tum, quoniam datus est angulus D, dantur quoque rectæ DF & FG. Ac proinde si pro DF ponatur  $b$ , & pro FG  $c$ , gerent ipsæ vicem dati anguli D, fientque triangula ACI & GDF similia. Eadem ratione similia erunt triangula HCB & ABI. Unde erit ut CB ad AB, sic CH ad AI, & BH ad BI. Quare si pro quadrato ex CB  $aa + 2ax + xx + yy$  brevitas causâ scribatur  $e$ , h. e., pro CB  $\sqrt{aa + 2ax + xx + yy}$  ponatur  $e$ ; fiatque ut  $e$  ad  $2a$ , sic CH seu  $y$  ad AI: erit AI  $\propto \frac{2ay}{e}$ . Similiter ut  $e$  ad  $2a$ , sic BH, seu  $a+x$ , ad BI: erit BI  $\propto \frac{2ax + a^2}{e}$ . Tum subductâ BC seu  $e$  ex BI seu  $\frac{2ax + a^2}{e}$ , relinquitur CI  $\frac{aa + ax - ee}{e}$ . Jam cum CI sit ad AI, hoc est,  $\frac{aa + ax - ee}{e}$  ad  $\frac{2ay}{e}$ , seu  $aa + ax - ee$  ad  $2ay$ , sicut DF ad FG, hoc est,  $b$  ad  $c$ : erit  $aa + ax - ee$ , productum sub extremis, æquale  $2aby$ , ei, quod sit sub mediis. Quæ altera est Aequatio. Atque ad hæc facienda manuduxerunt nos præcepta jam tradita, ita ut nullæ partes Problematis sint omissæ. Et quicumque omnia penitiùs inspexerit, se suo Marte propositæ quæstionis solutionem ex illis huc usque perducere potuisse judicabit. Difficultas enim tota jam à figuris ad numeros seu terminos Analyticos est traducta, ita ut, quæ supersunt, cuilibet obvia esse possint, etiam si de lineis, punctis, angulisque amplius non

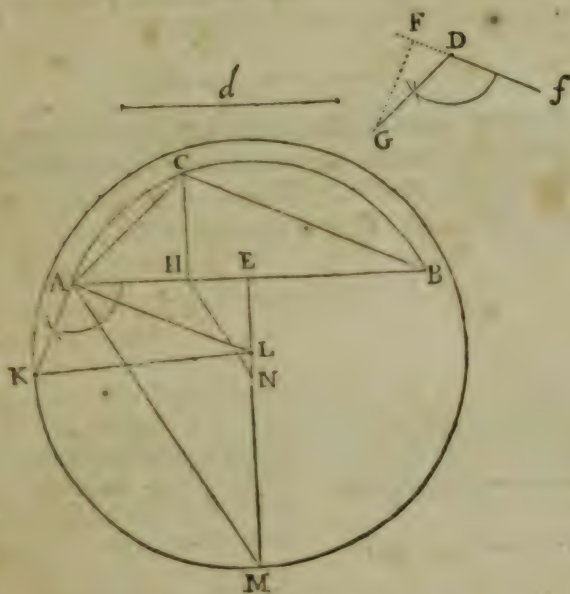




non cogitet. Inventis ergo tot *Æquationibus*, quot suppositæ fuerunt incognitæ linear; quoniam in utraque binæ reperiuntur quantitates incognitæ; hinc talis *reductio* fieri debet, ut ex una parte tantum habeatur  $xx$ , ut sequitur. Quocirca cum primum  $a^3 + a^2xx + ayy$  æquetur  $4ad$ , dividatur utraque pars per  $2a$ , & fit æquatio inter  $aa + xx + yy$  &  $2dy$ ; &  $aa$ ,  $yy$  in alteram partem translatis, inter  $xx$  &  $2dy - yy - aa$ . Deinde cum  $aac + acx - cee$  æquetur  $2aby$ , restituto valore quantitatis assumptæ  $ee$ , ipsoque ducto in  $-c$ , prodibit æquatio  $aac - cxx - cyy \propto aby$ . In qua si fiat porro terminorum transpositio; ut  $cxx$  unam teneat *Æquationis* partem sub signo  $+$  & reliqui partem alteram, atque utraque pars per  $c$  dividatur, proveniet *Æquatio*  $xx \propto aa - yy - \frac{2ab}{c}y$ , seu  $xx \propto aa - yy - 2fy$ , (scribendo nempe  $2f$  pro  $\frac{2ab}{c}$ : quandoquidem liberum est quolibet nomine datas quantitates insignire).

*Reductâ* ergo utrâque *Æquatione* inventâ ad eandem quantitatem  $xx$ , adæquandæ sunt reliquæ quantitates inter se, ut inveniat inde quantitas incognita  $y$ . Quare cum  $2dy - yy - aa$  æquetur  $aa - yy - 2fy$ , additis utrinque  $yy$  &  $aa$ , erit  $2dy \propto 2aa - 2fy$ , seu  $dy \propto aa - fy$ : & translato  $2fy$  ad alteram partem, factâque utrobique divisione per  $d + f$ , fiet  $y \propto \frac{aa}{d+f}$ . Inventâ autem quantitate  $y$ , non est difficile alteram quantitatem incognitam  $x$  invenire. Si enim in præcedenti æquatione  $xx \propto dy - yy - aa$ ,  
pro

pro y substituatur summa jam inventa  $\frac{a^2}{d+f}$ , & pro yy ejusdem  
summae quadratum, nempe  $\frac{a^4}{d^2+2df+f^2}$ , invenietur  
 $xx \propto \frac{a^2d^2 - a^2f^2 - a^4}{d^2+2df+f^2}$  &  $x \propto \sqrt{\frac{a^2d^2 - a^2f^2 - a^4}{d^2+2df+f^2}}$ . Ubique  
dd non debere esse minorem quam  $ff+aa$ , cum aliis Problema  
futurum esset impossibile. Cujus quidem constructio talis est.



Facto angulo  $KAB$  æquali dato  $D$ , erigatur ex  $A$  ipsi  $KA$  perpendicularis  $AL$ , occurrens perpendiculari  $EL$  in  $L$ , centroque  $L$  intervallo rectæ  $d$  circulus describatur, secans  $KA$ ,  $EL$  in  $K$  &  $M$ . Deinde assumptâ  $EN$  æquali  $KA$ , jungatur  $MA$ , & ex  $N$  agatur huic parallela  $NH$ , quæ ipsi  $AB$  occurrat in  $H$ . Postea descripto ex  $L$  intervallo  $LA$  circuli segmento  $ACB$ , ducatur ex  $H$  ipsi  $AB$  perpendicularis  $HC$ , occurrens circulo in  $C$ . Quæ  $AC$  est æqualis dato  $d$ . cum-

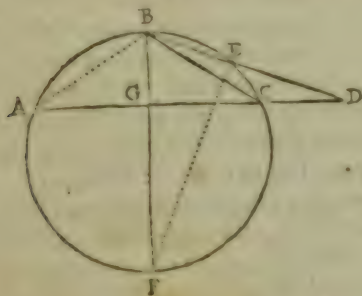




Haud dissimilis erit quæstio, si punctum D inveniendum sit, ita ut ipsarum DC, DB differentia sit datæ rectæ  $a$  æqualis.

### III PROBLEM A.

$BC \propto b$ : oporteatque invenire  $ED \propto x$ .



V 2



ex G C. Quod idem & alio modo inveniri potest, considerando perpendicularem G D secare hinc inde circumferentiam in C & A. Quia enim hinc per 35 Terti Elementorum rectangulum sub B G, G F est æquale rectangulo sub A G, G C, hoc est, quadrato ex G C: sit ut si multiplicavero G F  $\propto \chi - y$  per B G  $\propto y$  productum  $\chi y - y y$  sit denuo quadrato ex G C æquale. Habetur ergo Aequatio inter  $bb - y y$  &  $\chi y - y y$ , hoc est, addendo utrobique  $y y$ , inter  $bb$  &  $\chi y$ . Porro cum in hac quaestione tres suppositæ sint incognitæ lineæ  $x$ ,  $y$ , &  $\chi$ , superest ut duas adhuc alias Aequationes inveniamus. Hinc, ductâ F E, quoniam, considerando lineam B D secare circumferentiam in E, similia sunt triangula B G D & B E F, erit ut B G ad B D, hoc est,  $y$  ad  $a + x$ ; ita B E ad B F, hoc est,  $a$  ad  $\chi$ . Ac proinde, cum productum sub extremis sit æquale producto sub mediis, erit  $\chi y \propto a a + a x$ . Quæ altera est Aequatio. In qua si in locum  $\chi y$  subrogetur ejus valor ante inventus  $bb$ , habebitur  $bb \propto a a + a x$ , hoc est, transferendo  $a a$  in alteram partem, atque deinde utrobique dividendo per  $a$ , erit  $x \propto \frac{bb - a a}{a}$ . Quæ quantitas est lineæ E D, quam investigare intendebamus. Cæterum, quia inventâ hâc lineâ E D  $\propto x$ , utraque reliquarum incognitarum B G & B F, per  $y$  &  $\chi$  designatarum, quæ ad eam invenendam necessaria videbantur, ad arbitrium sumi potest, cum in Problemate nulla ampliùs materia superfit, quâ perveniatur ad Aequationes, quibus utraque ipsarum determinari queat, atque idcirco difficultas omnis Problematis jam sit evoluta: indicio est, rectam E D eandem semper inveniri, etiamsi ad illam quærendam pro utraque linearum B G, B F diversa magnitudo accipiatur, hoc est, alius atque alius circulus adhibeatur: quandoquidem Problema, si de linearum B G, B F longitudine ex datis B E, B C investigandâ quæritur, haud determinatum existit, sed tantum ipsius E D.

Qui plura in loci hujus illustrationem exempla desideret, videat quæ ad literam G secundi libri à nobis sunt allata.

GGG *Postea verò si plures adhuc supersint, ordine quoque utendum erit unaquâque Aequationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis.] Sic, quoniam, reducto*

ducto Problemate aliquo, in quo ad ipsum construendum tres  
supponenda sunt incognita linea  $x$ ,  $y$ , &  $z$ , ad duas Aequationes  
 $xx \propto +^2 cx + bb$ , &  $yy \propto aa +^2 zx - xx$ , pro incognita linea  $z$ ,  
 $+^2 z - cc$

$$\begin{array}{r} -yy \\ -^2 cz \end{array}$$

eui nulla responder Aequatio, ad arbitrium sumi potest linea co-  
gnita  $d$ : potero in locum duarum precedentium Aequationum  
scribere  $xx \propto +^2 cx + bb$ , &  $yy \propto aa +^2 dx - xx$ . Hinc cum

$$\begin{array}{r} +^2 d - cc \\ -yy \\ -^2 cd \end{array}$$

duae supersint lineae inveniendae  $x$  &  $y$ , ordine quoque utenda  
erit unaquaque Aequationum reliquarum  $xx \propto +^2 cx + bb$ , &

$$\begin{array}{r} +^2 d - cc \\ -yy \\ -^2 cd \end{array}$$

$yy \propto aa +^2 dx - xx$ , siue eas considerando separatim, siue unam  
cum altera comparando, ad explicandam unamquamque ex in-  
cognitis lineis. Quocirca considerando separatim Aequationem  
 $yy \propto aa +^2 dx - xx$ , cum, quantitibus  $+aa$  &  $-xx$  ad alte-  
ram partem sub contrario signo translatis, fiat  $2dx \propto yy + xx$   
 $-aa$ : hinc si in altera Aequatione  $xx \propto +^2 cx + bb$  pro  $2dx$

$$\begin{array}{r} +^2 d - cc \\ -yy \\ -^2 cd \end{array}$$

substituatur  $yy + xx - aa$ , habebit Aequationem  $xx \propto +^2 cx$ ,  
 $+yy + xx - aa, +bb - cc - yy -^2 cd$ . Hoc est, demptis æ-  
qualibus, ordinatæque æqualitate, habebitur  $2cx \propto aa + cc$   
 $-bb +^2 cd$ . Et sit, divisâ utrâque æqualitatis parte per  $2c$ ,

$x \propto \frac{aa + cc - bb +^2 cd}{2c}$ . Ostendens quâ ratione linea incognita  
 $x$  ex cognitis  $a, b, c$ , & ex ad arbitrium sumendâ  $d$  sit inveniendâ.  
Inventâ autem lineâ  $x$ , ut habeatur  $y$ , oportet tantum in Aequa-  
tione superiori  $yy \propto aa +^2 dx - xx$  in locum  $x$  subrogare valo-  
rem inventum  $\frac{aa + cc - bb +^2 cd}{2c}$ , & in locum  $xx$  huius valorem,

& sit  $yy \propto \frac{aa + cc - bb +^2 cd}{2c} +^2 c \frac{aa + cc - bb +^2 cd}{2c} - \frac{aa + cc - bb +^2 cd}{2c}$ . Un-



158 FRANCISCI à SCHOOTEN  
de, extractâ radice, invenitur

$$y \propto \sqrt{\frac{{}^2aabb + {}^2aacc + {}^2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + {}^4ccdd}{{}^4cc}}. \text{ Exhi-}$$

bens quo pacto linea incognita  $y$  ex cognitis  $a, b, c$ , & ex ad arbitrium sumenda  $d$ , obtineri possit.

Cæterum quoniam in Problemate, ad præcedentes Æquationes reducto, propter lineam  $d$ , quæ hic modò major modò minor ad arbitrium sumi potest, lineæ quoque  $x$  &  $y$  inde majores ac minores evadunt, atque ob id Problema non determinatum existit, sed infinitas recipit solutiones: lubet & alterum Problema, quod omnino determinatum est, atque in cujus solutione, ad unumquemque ex quæsitis numeris investigandum, unam Æquationem cum aliâ comparavimus, in medium afferre.

#### PROBLEMA.

**I**nvenire duos numeros, quorum summa multiplicata per summam suorum quadratorum faciat 715; & differentia per differentiam eorundem quadratorum faciat 99.

Supposito Problemate tanquam jam facto, pono pro majori numero quæsito  $x + y$ , & pro minori  $x - y$ : eritque summa quæsitorum numerorum  $\propto x$ , & eorundem differentia  $\propto y$ .

Jam quia  $x + y$  &  $x - y$  in se ducti faciunt  $xx + {}^2xy + yy$  &  $xx - {}^2xy + yy$ , quorum summa est  ${}^2xx + {}^2yy$  & differentia  ${}^4xy$ : restat ut  ${}^2xx + {}^2yy$  multiplicata per  $2x$ , &  $4xy$  per  ${}^2y$ , producta  $4x^3 + {}^4xyy$  &  $8xyy$  sint datis numeris 715 & 99 æqualia.

Quocirca inventis duabus Æquationibus  $4x^3 + {}^4xyy \propto 715$  &  $8xyy \propto 99$ , ut ex iis obtineatur uterque numerus incognitus  $x$  &  $y$ , comparo unam Æquationem cum altera: multiplicando primum utramque partem prioris per 2, & fit  $8x^3 + 8xyy \propto 1430$ , ac deinde ex ea subtrahendo posteriorem  $8xyy \propto 99$ , & relinquitur  $8x^3 \propto 1331$ . In quâ, si utrobique extrahatur radix Cubica, habebitur  $2x \propto 11$ , & fit  $x \propto 5\frac{1}{2}$ .

Postea ad inveniendum  $y$  dividatur Æquatio posterior  $8xyy \propto 99$  per jam inventam  $2x \propto 11$ , & orietur Æquatio  $4yy \propto 9$ .  
In

In qua si utrinque extrahatur radix quadrata, habebitur  $y \propto 3$ , & sit  $y \propto 1$ .

Ceterum invento utroque numero incognito  $x$  &  $y$ , quoniam pro majori quæstorum posueramus  $x + y$  & pro minori  $x - y$ : erit major  $\propto 7$ , & minor  $\propto 4$ . Et solutum erit Problema.

Atque ita reducendo illas, efficere oportet, ut tantum una remaneat, aequalis alteri cognita, aut cuius quadratum, siue cubus, siue quadrato-quadratum, siue surdesolidum, siue quadrato-cubus &c. aequalis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum plurimve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, relique autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, siue cubum, siue quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto designo

$$\begin{aligned} z &\propto b, \text{ aut} \\ z^2 &\propto a z + b b, \text{ aut} \\ z^3 &\propto a z^2 + b b z - c^3, \text{ aut} \\ z^4 &\propto a z^3 + b b z^2 - c^3 z + d^4, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Hoc est,  $z$ , quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis quantitati cognitæ  $b$ . Aut quadratum linearæ  $z$  est æquale ei, quod provenit subtrahendo  $a z$  ex  $b b$ : quarum quidem  $b b$  cognita est; sed  $a z$  composita ex  $z$  media proportionali inter unitatem & quadratum  $z z$ , ut supra explicavimus, & ex quantitate cognita  $a$ . Aut cubus linearæ  $z$  æqualis est ei, quod provenit ex additione & subtractione trium quantitatum  $a z^2$ ,  $b b z$ , &  $c^3$ ; quarum quidem  $c^3$  cognita est; at  $b b z$  composita ex  $z$ , prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & cubum  $z^3$ , & ex quantitate cognita  $b b$ ; ac denique  $a z^2$ , composita ex  $z z$ , secunda dictarum mediarum, & ex quantitate cognita  $a$ . Atque sic de cæteris.

Ubi notandum est, per quantitates cognitæ, intelligendas esse eas, quæ in quæstione vel datæ sunt, vel per certas operationes datarum quantitatum, jam traditæ & notæ, sic præparatæ sunt, ut pro cognitæ sive datæ sint habendæ, atque quæsitæ sive incognitæ æquiparandæ.

Sic cum ponitur  $z \propto b$ , indicatur lineam incognitam, quæ per



per  $\chi$  designatur, æqualem esse alicui ex cognitis, quæ designatur per  $b$ . Quod quidem rarò contingit, cum incognitæ lineæ plerumque aliqua operatione seu præparatione cognitarum linearum indigeant, antequam cognitis evadant æquales.

Ut, si fuerit  $\chi \propto \frac{cd}{e}$ . Assumptâ pro unitate alterutrâ quantitatum  $c, d$ , quæ in se invicem ductæ numeratorem constituunt, dividenda est reliqua per denominatorem, sive quantitatem  $e$  (quemadmodum superius est ostensum); eritque quotiens divisionis æqualis quantitati incognitæ  $\chi$ .

Eodem modo si habeatur  $\chi \propto \frac{cc+cd}{e-f}$ , erit ut  $e-f$  ad  $c+d$ , ita  $c$  ad  $\chi$ ; sive ut  $e-f$  ad  $c$ , ita  $c+d$  ad  $\chi$ .

Et si sit  $\chi \propto \frac{cc-dd}{e+f}$ , erit  $e+f$  ad  $c+d$ , sicut  $c-d$  ad  $\chi$ ; vel  $e+f$  ad  $c-d$ , sicut  $c+d$  ad  $\chi$ .

Nec non si habeatur  $\chi \propto \frac{cd+ef}{g}$ , & fiat, ut  $c$  ad  $e$ , sic  $f$  ad quartam, quæ vocetur  $h$ : poterit pro  $ef$  scribi  $ch$ , atque adeò loco  $\frac{cd+ef}{g}$  substitui  $\frac{cd+ch}{g}$ . Ubi deinde si fiat ut  $g$  ad  $c$ , sic  $d+h$  ad quartam: sive permutando (quod eodem recidit) ut  $g$  ad  $d+h$ , sic  $c$  ad quartam, quam vocare lubet  $b$ : erit  $\chi \propto b$ . Id quod & aliis modis præstari potest.

Non secus si sit  $\chi \propto \frac{cdef}{ade-agb}$ , & statuatur esse ut  $a$  ad  $c$ , sic  $e$  ad quartam, quæ sit  $i$ ; erit  $ai \propto ce$ , ita ut pro  $\frac{cdef}{ade-agb}$  scribi possit  $\frac{adif}{ade-agb}$  seu  $\frac{dif}{de-gb}$ . Rursus si ponamus esse ut  $d$  ad  $g$ , sic  $h$  ad quartam, quæ sit  $k$ : erit  $dk \propto gb$ , ita ut in locum  $\frac{dif}{de-gb}$  subrogari possit  $\frac{dif}{de-dk}$  seu  $\frac{if}{e-k}$ . Ubi denuo si fiat, ut  $e-k$  ad  $i$ , ita  $f$  ad quartam, quam vocabo  $b$ ; fiet ut supra  $\chi \propto b$ . Quod idem variis modis fieri potest.

Denique sit  $\chi \propto \frac{acdd-acc}{d+acd}$ . Supponendo esse ut  $a$  ad  $d$ , ita  $d$  ad quartam, quæ nominetur  $e$ : erit  $ae \propto dd$ : poteritque pro  $\frac{acdd-acc}{d+acd}$  substitui  $\frac{ace-acc}{aed+acd}$  seu  $\frac{ace-acc}{ed+cd}$ . Rursus statuendo esse ut  $e+c$  ad  $e-c$ , sic  $c$  ad quartam quæ appelletur  $f$ , fiet

fiet  $\frac{ee-cc}{e+e} \propto f$ : licebitque pro  $\frac{ace-acc}{ed+ed}$  reponere  $\frac{af}{d}$ . Ubi demum si fiat ut  $d$  ad  $f$ , ita  $a$  ad quartam, quæ vocetur  $b$ , fiet rursus, ut supra,  $\chi \propto b$ . Quod similiter pluribus modis expedire licet. Atque ita de cæteris.

E quibus constat, quantitatem incognitam  $\chi$ , post huiusmodi operationes atque cognitarum linearum requisitas præparationes, eò reduci posse, ut sub una semper specie efferatur, & alteri cognitæ dicatur æqualis.

Notandum autem, huc quoque referendas esse æquationes in quibus quantitatis incognitæ quadratum, aut cubus, aut quadrato-quadratum, &c. æquatur quantitati alicui cognitæ, absque additione vel subtractione aliarum quantitatum, quæ componuntur ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, aut cubum, aut quadrato-quadratum &c. multiplicatis per alias cognitæ. Ubi incognita quantitas, extrahendo tantum aliquam radicem, inveniri potest. Ut cum  $\chi\chi$  æquatur  $aq$ . Suppositâ lineâ  $a$  pro unitate, erit radix quadrata extracta ex lineâ  $q$ , ut superius est ostensum, (nimirum inveniendâ inter lineas  $a$  &  $q$  mediam proportionalem,) æqualis quæsitæ lineæ  $\chi$ , quæ hoc modo denotatur:  $\chi \propto \sqrt{aq}$ . Ubi apparet, quæstionem per hanc extractionem, dum planum  $aq$  transmutatur in quadratum  $bb$ , cuius latus est  $b$ , eò esse reductam, ut incognita quantitas alteri cognitæ dicatur æqualis.

Eodem modo si  $\chi^3$  æquetur  $aaq$ , & quætratur  $\chi$ . Assumptâ rursus  $a$  pro unitate, erit extracta ex  $q$  radix cubica, hoc est, inventarum inter  $a$  primam &  $q$  quartam duarum mediarum proportionalium (ut tertio libro ostenditur) prior, radici quæsitæ  $\chi$  æqualis. Designabitur autem hoc pacto:  $\chi \propto \sqrt[3]{C.aaq}$ . Ubi similiter constat, quòd, dum hac operatione solidum aliquod, utpote  $aaq$ , resolvitur in cubum  $b^3$ , & utrobique deinde extrahitur radix cubica,  $\chi$  rursus fiat ipsi  $b$  æqualis.

Nec aliter evenit cum  $\chi^4 \propto aaqq$ . Etenim dum extrahitur utrinque radix quadrato-quadrata seu bi-quadrata, hoc est, postquam radix semel extracta, dat  $\chi\chi \propto aq$ , eadem adhuc semel repetita radicis extractio, dabit  $\chi \propto \sqrt{aq}$ , sive, supponendo  $aq$  in quadratum  $bb$  esse conversum,  $\chi \propto b$ . Atque ita ulterius in infinitum.



Porro advertendum est, si quantitates cognitæ, ex quibus radix aliqua extrahi debet, sub aliâ specie, quàm hic expositum fuit, oblata fuerint (ut si ex  $aa + bb$ , aut ex  $\frac{aadd - aaff - aa}{dd + af + ff}$  &c. extrahenda sit radix quadrata): quod tunc facile sit, non solum per ea, quæ jam tradita sunt, sed & aliis modis quantitates datas in alias transmutare: ita ut non aliter ex illis radices extrahendæ sint, ac si ex quantitate  $aa$  extrahendæ forent. Quod & de radice cubica, quadrato-quadrata, aliisque in infinitum, est intelligendum.

*Atque ideo sufficiet vos monere, si quis in reducendis hisce æquationibus non omiserit uti divisionibus omnibus, quæ fieri possunt, &c.]* Ubi notandum, inter quatuor operationum species, Additionem & Subtractionem non reddere terminos alicujus quæstionis difficiliore, quippe quos tantum signis + vel — conjungunt aut disjungunt; quæ quidem signa diversa genera non constituunt. Multiplicationem verò quod attinet, ea est, quæ termini involvuntur vel intricantur, & dimensiones augentur; quæ contra Divisione extricantur & minuuntur. Idem de radicibus extractione intellige, quæ, ut supra dictum fuit, divisionis tantum species est habenda. Adeo ut ad inveniendos terminos simplicissimos ad quos quæstio aliqua reduci queat, maximo opere observandum sit, ut in reducendis æquationibus, omnes divisiones atque extractions, quæ fieri possunt, tentemus. Cujus rei exemplum non inelegans suggerere potest demonstratio proprietatis Parabolæ tertio libro adducta.

*Erit tota OM æqualis  $\frac{1}{2}x$ , lineæ quæsita. Quæ quidem sic exprimitur:  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ .]* Sciendum hic est, æquationem propositam  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ , juxta ea, quæ habentur lib. III. pag. 69, aliam adhuc habere radicem, minorem quàm nihil, quæ à D. des Cartes falsa appellatur, quæque hic per lineam PM designatur, atque hoc modo exprimitur  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ . Quemadmodum faciliè demonstrari potest. Si enim, posita  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ , auferatur utrinque  $\frac{1}{2}a$ , & inde utraque pars  $-\frac{1}{2}a$ , &  $-\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$  in se ducatur quadratè, fiet  $\frac{1}{4}x^2 = a^2 + \frac{1}{4}aa + bb$ . Ubi si demum utrinque dematur  $\frac{1}{4}aa$ , &  $-a^2$  in alteram partem transferatur, fiet  $\frac{1}{4}x^2 = a^2 + bb$ .

*Erit-*

Eritque reliqua  $PM$  equalis  $y$ , radici quesita: Ita ut fiat  $L$

$y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ .] Verum æquatio  $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$  admittit adhuc aliam radicem, minorem quàm nihil, quæ per lineam  $OM$  designata ita exprimitur,  $y \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ . Cujus demonstratio ad exemplar præcedentis fieri potest.

Nec aliter fit, si proponatur  $x^2 \propto -axx + bb$ ,  $PM$  enim esset  $xx$ , & haberetur  $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ .] Quoniam enim  $x^2 \propto -axx + bb$ , transferendo  $-axx$  in alteram æquationis partem, erit  $x^2 + axx \propto bb$ . & additâ utrique parti  $+\frac{1}{4}aa$ , proveniet  $x^2 + axx + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$ . Iam verò extractâ utrobique radice, invenietur  $xx + \frac{1}{2}ax \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ . ac proinde transponendo  $+\frac{1}{2}ax$ , ut  $xx$  unam constituat æquationis partem, erit  $xx \propto -\frac{1}{2}ax + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ . Unde extractâ rursus utrinque radice, fiet  $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ .

Eodem modo si habeatur  $z^2 \propto az^2 + bb$ , erit

$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ . Nam cum  $z^2 \propto az^2 + bb$ , erit per transpositionem  $z^2 - az^2 \propto bb$ . Addatur jam utrinque  $\frac{1}{4}aa$ , fietque  $z^2 - az^2 + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$ . Unde, extractâ utrobique radice, prodibit  $z^2 - \frac{1}{2}az \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ . hoc est,  $z^2 \propto \frac{1}{2}az + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ , & per consequens

$$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}.$$

Similiter si sit  $z^2 \propto az^2 - bb$ , erit  $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$ , nec non  $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$ . Cum enim  $z^2 \propto az^2 - bb$ , & per transpositionem  $z^2 - az^2 \propto -bb$ , addatur utrinque  $\frac{1}{4}aa$ , fietque  $z^2 - az^2 + \frac{1}{4}aa \propto -bb$ . Quare extractâ utrobique radice, emerget  $z^2 - \frac{1}{2}az \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , hoc est,  $z^2 \propto \frac{1}{2}az - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , ac per consequens

$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$ . Porro, quoniam radix ex  $z^2 - az^2 + \frac{1}{4}aa$  est quoque  $\frac{1}{2}a - z^2$ , hinc &  $\frac{1}{2}a - z^2 \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , hoc est,  $z^2 \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , ac per consequens

$$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}.$$



Cæterum ut Geometricè inveniatur harum æquationum radices, sciendum est, quòd, dum omnes termini non æquè multas habent dimensiones, toties illic, ubi numero pauciores habentur, subintelligenda sit unitas, quoties requiritur; ut in æquatione  $x^2 \infty - axx + bb$ . Quia in termino  $axx$  tres duntaxat dimensiones reperiuntur, & in termino  $bb$  tantum duæ, cogitandum est, terminum  $axx$ , ut dimensiones fiant æquales, semel per unitatem esse multiplicatum, terminum autem  $bb$  bis. Adeò ut, si pro unitate accipiamus  $c$ , æquatio sit  $x^2 \infty - caxx + ccbb$ . Verùm expedit unitatem illam tantisper dissimulare, & æquationem hanc  $xx \infty - ax + bb$  usurpare, donec radicem ejus Geometricè, ut traditum est, invenerimus, nimirum lineam  $PM$ , quæ exprimitur hoc pacto:  $x \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ . Ita ut deinde tantum opus sit ex  $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$  extrahere radicem quadratam seu inter inventam lineam  $PM$  & unitatem  $c$  invenire mediam proportionalem, ut Geometricè obtineatur radix  $xx \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$ . Atque ita in aliis.

Unde liquidò constat, ad inveniendas harum æquationum radices, nihil aliud requiri, quàm quod circa priores tres Æquationum formulas, & radicis quadratæ extractionem Auctor præcepit. Adeò ut hinc simul manifestum sit, quo pacto, postquam sic linea aliqua pro unitate assumpta vel concepta fuerit, (quemadmodum hujus Geometriæ methodus requirit) Problemata omnia Geometriæ communis, hoc est, quæ rectarum linearum & circulorum beneficio construi possunt, per ea tantum, quæ ab Authore per 4 figuras 1<sup>mi</sup> libri exposita sunt, expediri queant, quemadmodum pag. 7 monuit.

N *Quod si circulus, centrum suum habens in puncto N, transiensque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat, constructionem Problematis propositi esse impossibilem.* Quod itidem ex Æquatione cognosci potest. Nam cum Æquatio sit certum medium, quo Problema aliquod resolvitur, sanè, si resolvendo incidimus in æquationem impossibilem, argumentum est, Problema quoque esse impossibile. Arguitur autem impossibilitas illa ex contradictione, quam involvit,

vit, cum nempe in ea statuitur minor quantitas æuari alicui majori, vel cum jubemur ad eam resolvendam aliquid præstare, quod fieri nullo modo potest, ut, quantitatem aliquam majorem à minore subducere. Quemadmodum in æquatione  $xx - ax - bb$ . quoniam ad inveniendam radicem  $x$ ,  $bb$  ex  $\frac{1}{2}aa$  subtrahi debet; oportet ut  $bb$  non sit majus quàm  $\frac{1}{2}aa$ , sive ut  $b$  non sit majus quàm  $\frac{1}{2}a$ . Aliàs enim radix ejus sic explicari non posset, & æquatio impossibilis foret. Quod & ex ejusdem constitutione licet agnoscere, si in ea duæ sint radices veræ. Si enim ponamus  $x = c$ , seu  $x - c = 0$ , itemque  $x = d$ , seu  $x - d = 0$ , atque deinde multiplicemus  $x - c = 0$  per  $x - d = 0$ , exsurget æquatio  $x^2 - cx - dx + cd = 0$ , seu  $xx - (c+d)x + cd = 0$ . In qua si  $+c+d$  interpretemur per  $+a$ , &  $-cd$  per  $-bb$ , habebimus æquationem propositam  $xx - ax - bb$ . Adeo ut constet æquationem hanc duas veras radices admittere, seu quæ majores sunt quàm 0, quarum quidem summa est  $a$ , & productum ex earum multiplicatione  $bb$ .

Sed ut duas semper veras radices recipiat, requiritur, ut  $bb$  non sit majus quàm  $\frac{1}{2}aa$ , seu,  $b$  non majus quàm  $\frac{1}{2}a$ : quoniam maximum productum quod sit ex partibus ipsius  $a$ , est, cum  $a$  in duas partes æquales dividitur. Ubi notandum, quod ubi  $bb > \frac{1}{2}aa$ ,  $\frac{1}{2}a$  esse  $x$ , quæ quæritur, atque æquationem eo casu unam tantum sortiri radicem, aut duas quidem, sed æquales. At verò  $bb$  existente majore quàm  $\frac{1}{2}aa$ , æquationem esse impossibilem, nec ullam admittere radicem. Id quod similiter de æquatione  $xx - ax - bb$  est intelligendum, quæ de duabus falsis radicibus est explicabilis. Ut patet ex ejus constitutione. Etenim ponendo  $x = c$  seu  $x + c = 0$ , nec non  $x = d$  seu  $x + d = 0$ , & multiplicando  $x + c = 0$  per  $x + d = 0$ : proveniet æquatio

$$xx + cx + dx + cd = 0, \text{ seu } xx + (c+d)x + cd = 0.$$

In qua si interpretemur  $-c-d$  per  $-a$ , &  $+cd$  per  $-bb$ , emerget æquatio proposita  $xx - ax - bb$ . Cujus porro radices Geometricè inveniuntur perinde atque æquationis præcedentis, quæ denique sic exprimuntur  $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , &  $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ .

Cæterum quod ad duas reliquas æquationes attinet, primam vide-



videlicet  $z^2 \propto az + bb$ , & secundam  $yy \propto -ay + bb$ , ex  
nulli determinationi sunt obnoxie, & semper per duas radices  
explicari possunt, unam veram & alteram falsam. Ut si ponatur  
 $z \propto c$ , seu  $z - c \propto 0$ , &  $z \propto -d$ , seu  $z + d \propto 0$ , & multipli-  
cetur  $z - c \propto 0$  per  $z + d \propto 0$ ; fiet  $z^2 - \frac{c}{+d} z - cd \propto 0$ , seu  
 $z^2 \propto \frac{+c}{-d} z + cd$ . In qua æquatione si statuamus  $c$  majorem esse  
quàm  $d$ , ita ut excessus sit penes  $c$  cum signo  $+$ , atque  $+c - d$   
interpretemur per  $+a$ , &  $+cd$  per  $+bb$ , habebimus eandem  
æquationem, quam prius, nimirum  $z^2 \propto az + bb$ . Aded ut per-  
spicuum sit ipsam de duabus inæqualibus radicibus esse explica-  
bilem, majore vera & minore falsa. At verò si ponamus  $c$  mino-  
rem quàm  $d$ , ita ut excessus sit penes  $d$  cum signo  $-$ , atque  
 $+c - d$  interpretemur per  $-a$ , &  $+cd$  per  $+bb$ ; prodibit  
æquatio secundæ formæ: nimirum,  $z^2 \propto -az + bb$ , quippe  
quæ à duabus inæqualibus radicibus explicatur, quarum minor  
est vera, major autem falsa. Denique si  $d$  constituatur ipsi  $c$  æqua-  
lis, destruent se invicem  $+c$  &  $-d$ , & evanescet secundus ter-  
minus  $az$ , & erit Æquatio  $z^2 \propto +bb$ , cujus duæ radices, ve-  
ra  $+b$  & falsa  $-b$ , sunt æquales.

E quibus omnibus apparet, ad æquationes allatas Geometricè  
resolvendas, earumque radices juxta regulas hic traditas commo-  
dè explicandas, requiri, ut ultimus terminus designetur per  $bb$ , aut  
ad eam formam, sicut superius est ostensum, reducatur.

A R-

# ARGUMENTVM

## SECUNDI LIBRI.

**S**ecundus liber agit de lineis curvis, earumque naturam explicat, docendo, quanam illa sint, quas in Geometriam recipere oportet, quaeque Geometricae appellandae sunt, utinam quo pacto possint cognosci. Modus autem eas cognoscendi in eo consistit, quod describi possint per motum aliquem continuum, vel per plures ejusmodi motus, quorum posteriores regantur à prioribus. Verum enimvero licet allato modo descripta turba omnes in Geometriam sui recipiende, atque pro Geometricis agnoscenda; tamen ad comprehendendas omnes, quae sunt in natura, & ipsas ordine distinguendas in certa genera, prout gradatim magis magisque in infinitum sunt composita, apertius quidquam asserri nequit, quam ut in genere dicatur: illas omnes Geometricas esse appellandas, quarum omnia puncta ad omnia lineae rectae puncta certam habent relationem, quae exprimi potest per aliquam aequationem, se indifferenter ad omnia utriusque lineae puncta extendentem. Et quidem, quod, cum aequatio illa ultra rectangulum sub duabus quantitatibus indeterminatis, quae ad dictam relationem explicandam requiruntur) aut ultra quadratum unius ex ipsis non ascendit, linea curva tunc primi & simplicissimi sui generis (in quo tantum Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensae.) At verò cum ipsa ad tres quasvis dimensiones ascendit, quod illa tunc sit secundi generis. Cum verò ad 5 aut 6 dimensiones ascendit, quod illa tunc sit tertii generis. Atque ita porro in infinitum.

Vbi porro facile est intelligere, quanam sint, quae ex Geometria sint rejiciende, & inter Mechanicas ponende: Quandoquidem curvae illae omnes, quae inter praedictas non comprehendantur, ab hac Geometria rejiciuntur. Cujusmodi sunt illae omnes, quae per motus continuos describi nequeunt, & ubi posteriores à prioribus non dependent, sed per duos motus describi concipiuntur, qui sunt à se invicem distincti, nullamque relationem habentes, quae possit exae mensurari, sive quarum omnia puncta ad omnia lineae rectae puncta relationem non habent, quae per aliquam aequationem omnibus communem exprimi possit.

Postquam autem ostendimus, quo pacto lineae curvae ab Auctore distinguantur, tam in illas, quas in Geometriam censet introducendas, quam in illas



in illas, quas pari jure ab ea censet arcendas: ac denique quâ ratione illæ in certa genera sint distinguendæ; operæ pretium videtur ut deinceps ea, quæ Antiqui circa ipsas contemplati fuere, expendamus. Quæ quidem ex his, quæ afferuntur à Pappo ad propositionem 4<sup>am</sup> libri tertii, ut & ad propnem 30 libri quarti Collectionum Mathematicarum, haud difficulter colligi possunt. Vbi, postquam explicavit, Problematum Geometricorum tria ab Antiquis genera fuisse constituta, quorum alia dicuntur Plana, alia Solida, alia denique Linearia; nimirum prout quadam ex ipsis solvi possunt, describendo tantum rectas lineas & circulorum circumferentias; & alia, quæ construi nequeunt, quin ad minimum adhibeatur aliqua Conica sectio; & reliqua denique quin in constructionem assumatur alia demum curva linea: Tandem de duarum mediarum inventionem loquitur, quas inquit Geometricæ rationi innixos invenire non potuisse. Quorum quidam, asserentes, Problema solidum esse, resolutionem per Conicas sectiones, sive solidos locos, fecerunt; alii autem per alias curvas, sive locos lineares; ac alii denique constructionem ejus instrumentis tantum perfecerunt. Nullum autem eorum fuisse, qui resolutionem per locos planos, sive rectas lineas & circulares, absolverit.

Vbi apparet, quod tantummodo constructiones illas Geometricas appellaverint, quæ per rectas lineas & circulorum circumferentias perficiebantur; quodque constructiones in genere non aliter respexerint, quam quatenus ipsarum perfectio à manuum dexteritate & instrumentorum perfectione proficeretur. Vnde cum ad planorum Problematum constructiones non nisi rectas lineas & circulorum circumferentias adhibendas esse viderent, quæ omnium facillimè atque expeditissimè regula & circini beneficio (utpote per instrumenta omnino simplicia) in plano describuntur, & sectiones Conicas reliquasque curvas lineas, varium & difficilem ortum habentes, in plano designare difficile existimarent, ideoque descriptionem earum minus certam statuerent; factum inde quoque, ut solam Planorum constructionem, Geometricam pronuntiarent: adeoque non nisi rectas lineas & circulares, reliquas verò non item, pro Geometricis agnoscerent. Quod quare ita distinxerint, non video. Quandoquidem rectas lineas & Circulos perinde atque Parabolas, Hyperbolas, & Ellipses ex Cono secari posse ab Apollonio scio ostensum. Qui porro postquam plurimas proprietates tribus hisce sectionibus pariter atque Circulo convenire ostendit, & quidem propter mirificas Conicorum Theorematum demonstrationes, cum non solum illâ tempestate, verum etiam sequentibus sæculis, magnus Geometra sit appellatus, non apparet quam ob causam prædicta linea non aequè ac rectæ & circulares pro

Geome-

Geometricis fuerint habitæ. Aded ut non solum Veteribus illis, sed etiam Vieta ejusque affectus assentiri nequeam, dum Geometria defectum hic suspicantes, neque Hyperbolas, neque Parabolas κατ' ἄριστον λόγον in Geometricis describi asseverant, ac proinde Menachmi inventionem duarum mediarum per Parabolas & Hyperbole, sive etiam per binarum Parabolarum intersectionem, veluti non Geometricam respuunt. Quam sanè (meo judicio) non minus Geometricam censere oportet, quàm illam, quæ ab Euclide assertur in Problema 1<sup>mo</sup> Libri 1<sup>mi</sup> Elementorum: siquidem punctum, in quo hæ sectiones sibi mutuo occurrunt, non minus scientificè invenitur, quàm illud, in quo bini circuli se invicem intersecant, ad describendum triangulum æquilaterum.

Ceterum si asseratur, ideo hæc lineas Geometricas non fuisse dictas, eò quod instrumentis describi viderent; Annon ob eandem rationem lineæ rectæ & circularis non Geometricæ fuissent dicenda, cum ad illas in plano describendas regulâ atque circino sit opus? Aded ut si περιεχὸν κατ' ἄριστον καὶ περιεχόμενον Vieta vocaverit constructionem illam quatenus ipsa regulâ & circini beneficio perficitur; Annon pari jure artificiosam atque scientificam appellare licebit constructionem illam, quæ non nisi instrumentis perfici potest, quæ majorem industriam atque artificio in sui compositionem requirunt, cujusque demonstratio simul ex penitiori Geometria penus est depromenda? Quocirca cum rectæ & circularis non Geometricæ non dicantur, neque etiam constructiones per ipsas factæ; ratum igitur esto, quod neque Sectiones Conicæ, quæ cum circulari unum genus curvarum linearum, illudque primum (ut supra dictum fuit) apud Auctorem nostrum constituunt; neque etiam omnes superiorum generum curvæ, constructionesque quæ per ipsas fiunt, aliæ quàm Geometricæ sint habenda, prout demonstratio illas tales esse comprobabit. Hæc autem de curvis lineis dicta sufficiant. Restat ut porro ea, quæ hoc libro ab Autore pertractantur, paucis exponamus.

Explicatâ linearum curvarum naturâ resumit quæstionem Pappi ab Antiquis quaesitam, quam primo libro explicuit, atque resolvere incipit; talem deinde ipsam declarans, ut postquam in aliis atque aliis lineis proposita est, illa quoque alias atque alias curvas lineas, solutionem præbentes, quæque diversis generis sint, prout debita ratio numeri linearum habeatur, admittat. Aded ut nulla curva lineæ sit sub calculum cadens, quæque in Geometriam juxta ejus definitionem recipi possit (quod sanè observatione dignum,) quæ non etiam simul pro certo aliquo linearum numero utilis existat.

Ubi præterea notandum est, quod eam sic resolvere doceat, ut simul

Y

omne



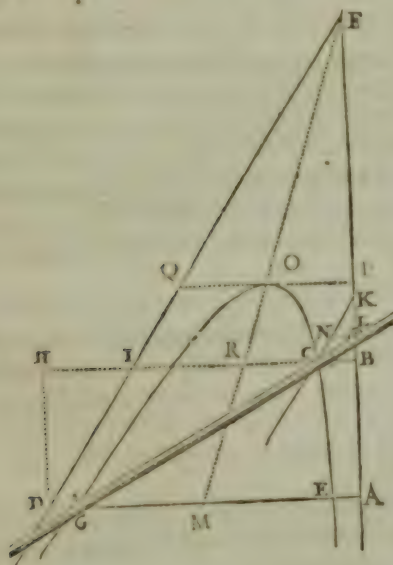
omne illud, quod ad locorum planorum atque solidorum compositionem spectat, exponat, sicque paucis complectatur, non solum questionis propositæ solutionem in tribus quatuorve lineis, sed etiam solidorum locorum compositionem, tantopere à Veteribus quasitam. Nullos enim ex istis locis omisit, præter omnium simplicissimos, quos facilitatis causâ neglexit.

Post hæc autem, questione in 5 lineis propositâ, docet quanam prima & simplicissima sit linearum omnium, quæ ibidem inservire possint. Atque ita tandem illi finem imponit. Quibus peractis declarat, quodd, ad inveniendas omnes proprietates curvarum linearum, sufficiat scire relationem, quam illarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, sicut etiam quo pacto inveniri possint lineæ rectæ, quæ ipsas secant in datis punctis ad angulos rectos. Quod quidem subtilissimâ ac mirabili prosequitur methodo, meoque iudicio digna, ut inter ingeniosissima hominum inventa celebretur. Postea verò nequid desit, quod ad usum curvarum linearum ibidem propositarum spectare videretur, ostendit ipsas diversas habere proprietates, quæ nequaquam sectionum Conicarum proprietatibus cedunt, describitque quadam Ovalium genera, ad radiorum reflexionem atque refractionem per specula & vitra, apprime conducibilia: adeoque in Catoptrica atque Dioptrica usum insignem habentia. Denique ostendit, quo pacto, quæ de lineis curvis explicuit, adplicari etiam possint ad lineas curvas, quæ per motum aliquem ordinatum quorundam punctorum alicujus corporis in spatio trium dimensionum describi possunt. Atque ita, quacunque ad curvarum linearum cognitionem necessaria sunt, breviter absolvit. Quantum autem ad Geometriam promovendam, ejusque arcana detegenda, nec non varias illius functiones cognoscendas hic liber faciat, vel ea ipsa quæ in illo pertractantur, ac modò recensuimus, testari possunt; tum etiam, quia in eo via ad surdesolida, altioraque loca, hætenus incognita, investiganda sternitur, atque in eo infinitæ speculationis campus aperitur.

COM-

LIBRVM SECVNDVM.

**Q**UEMADMODVM *illa re ipsâ nulla alia*  
*est quàm Hyperbola.*] Si enim producat<sup>r</sup> AG  
ad D, ut DG æqualis sit EA seu NL, & per  
D agatur recta DF ipsi CK parallela, occur-  
rens rectæ AB in F: erit DF una ex Asym-  
ptotis, & AF altera. Quod facîle demonstrari  
potest. Supponamus namque lineam G O C E  
Hyperbolam esse, cujus Asymptoti DF, FA, & utraque DG,  
EA æqualis sit ipsi NL; nec non DF ipsi CK parallela, ut di-



Y 2

ximus;



ximus; hoc est, angulus D F A æqualis sit angulo C K B. Producatur autem B C, ut secet D F in I; & per D agatur recta D H parallela ipsi A F, occurrens cum B C in H. Quoniam igitur similia sunt trianguula D H I & K L N triangulo F A D, erunt & ipsa inter se similia. Unde erit ut K L ad L N, hoc est, ut  $b$  ad  $c$ , ita D H seu A B, hoc est,  $x$ , ad H I, quæ ideo erit  $\frac{cx}{b}$ . Deinde subductâ H I ex H B seu D A, hoc est,  $\frac{cx}{b}$  ex  $a+c$ , relinquetur I B,  $a+c-\frac{cx}{b}$ . E qua si auferatur B C seu  $y$ , remanebit I C,  $a+c-\frac{cx}{b}-y$ . Quia verò in Hyperbola rectangulum I C B æquatur rectangulo D E A, per 10 prop. 2<sup>di</sup> libri Conicorum Apollonii; ideo si multiplicetur I C per C B, hoc est,  $a+c-\frac{cx}{b}-y$  per  $y$ , fiet rectangulum I C B,  $ay+cy-\frac{cxy}{b}-yy$ , æquale rectangulo D E A seu  $ac$ , hoc est, ei quod fit ex ductu ipsius D E seu G A in E A. Quare ordinatâ æquatione, factâque transpositione, ut  $yy$  unam obtineat æquationis partem, invenietur  $yy \propto cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac$ . Quæ æquatio eadem est, quæ supra ex motu regulæ G L & rectæ lineæ C K fuit inventa. Adeo ut affirmare liceat, descriptam lineam curvam C E Hyperbolam esse, cujus Asymptoti A F, F D; quemadmodum supposuimus. Quorum plenior demonstrationem qui desiderat, consulat caput 6<sup>tem</sup> tractatus nostri de Organica Conicarum Sectionum in plano descriptione, ubi casus omnes prosecuti sumus.

Sed utile fuerit unum aut alterum Problema simile adjungere.

In plano quocunque concipiatur moveri A B regula, mobilis circa punctum fixum A, atque huic regulæ affixa alia æqualis regula B D, in puncto B, ut similiter circa punctum B in eodem plano moveri possit. Assumpto autem in B D inter B & D quovis puncto E, & commoto puncto D per rectam lineam A D; Quæritur cujus generis sit curva lineæ, quam punctum E motu illo describit?

Quoniam igitur ad hanc quæstionem oportet cognoscere relationem, quam hujus curvæ puncta habent ad puncta lineæ rectæ A D, in qua punctum A est datum; suppono ex puncto E, ad quod





ordinetur, ita ut  $x x$  unam teneat æquationis partem (si sit  $x$  quam invenire volumus, relinquendo  $y$  indeterminatam), invenietur

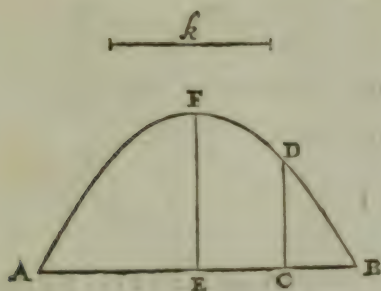
$$x x \propto \frac{4 a a b b - 4 a b^3 + b^4 - b b y y}{4 a a - 4 a b + b b}, \text{ vel } x x \propto b b - \frac{b b y y}{4 a a - 4 a b + b b}.$$

Unde cum æquatio non ascendat ultra quadratum unius ex quantitibus indeterminatis, quemadmodum & superius in Hyperbola evenit: constat, lineam curvam descriptam esse primi generis, quippe quæ alia non est quàm Ellipsis, juxta ea quæ secundo capite tractatus nostri de Organica Conicarum sectionum descriptione demonstravimus. Ubi advertere licet praxin (quam & Clavius lib. 1. suæ Gnorn. affert prop. 26<sup>ta</sup>) describendi Ellipsin per puncta, quæ ex inventa æquatione colligi potest, quæque lignariis & cæmentariis in extruendis fornicibus familiaris est, atque in orthographicis Sphæræ delineationibus usum habet insignem. Nam si productâ  $A B$  ad  $I$ , ut  $B I$  sit æqualis  $B E$ , centro  $A$  intervallo  $A I$  circulus describatur, secans  $A D$ , hinc inde productam, in  $L$  &  $K$ : erit  $L K$  axis transversus Ellipsis. Rectus autem invenitur, si ex eodem centro, intervallo  $D E$ , circulus describatur  $p G F g$ , secans  $A I$  in  $F$ . Erit enim  $A G$  semissis axis recti. Et si à puncto  $F$  ipsi  $A D$  ducatur  $F E$  parallela, secans  $I N$  in  $E$ : erit punctum  $E$  unum ex punctis, per quod Ellipsis transire debet. Quo quidem modo infinita alia puncta inveniuntur. Quod & ex calculo fit manifestum: Est enim  $A I 2 a - b$ , &  $A N y$ ; estque ut  $A I$  seu  $2 a - b$  ad  $A N$  seu  $y$ , ita  $A F$  seu  $b$  ad  $A n$ , quæ ideo est  $\frac{b y}{2 a - b}$ . Cujus quadratum  $\frac{b b y y}{4 a a - 4 a b + b b}$  si auferatur à quadrato ex  $A F$  seu  $b b$ , remanebit quadratum ex  $n F \propto b b - \frac{b b y y}{4 a a - 4 a b + b b}$ , utpote æquale  $x x$  quadrato lineæ  $N E$ . Quemadmodum fuit inventum.

Eodem modo operaberis in quæstione sequenti, quæ ultima est propositio lib. 4<sup>ta</sup> collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini.

Quæritur cujus generis sit curva linea  $A F D B$ , cujus hæc est proprietas: ut, deductâ, à quolibet ejus puncto, ut  $D$ , perpendiculari  $D C$ , in rectam  $A B$ , positione & magnitudine datam, id quod sub perpendiculari  $D C$  & alia quadam data linea  $k$  continetur, æquale sit rectangulo, quod sub segmentis  $A C$ ,  $C B$  comprehenditur.

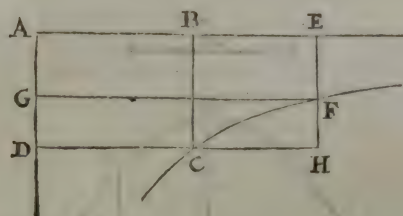
Seçtâ



Secunda AB bifariam in E, pono AE vel EB  $\propto a$ , EC  $\propto y$ , CD  $\propto x$ : eritque AC  $\propto a + y$ , & CB  $\propto a - y$ . Cum igitur ejusmodi sit relatio punctorum curvæ ADB ad puncta rectæ AB, ut rectangulum sub CD & k æquetur rectangulo sub AC, CB: erit  $aa - yy \propto kx$ . Quæ æquatio ad omnia utriusque lineæ puncta referri potest, quandoquidem y & x duæ quantitates indeterminatæ existunt, quæ ad omnes lineas EC, CD applicari possunt. Exceptis punctis F & E, quo casu quantitas y nulla est, & EF æquatur  $\frac{ax}{k}$ . quod & de duobus præcedentibus Problematibus est intelligendum. Cæterum cum in æquatione inventa  $aa - yy \propto kx$  una quantitatum incognitarum y ascendat ad quadratum, indicio est, lineam curvam esse primi generis. Quam aliam non esse, quàm Parabolam, demonstravit Pappus loco citato.

Non aliter concludes, æquatione existente  $xy \propto ab$ , vel  $xy \propto by - ax$ , lineam curvam, quæ hanc æquationem produxit, esse primi generis: cum tantum ascendat ad rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum x & y. Est autem curva illa linea Hyperbola. Quod facile intelligetur, si in prima æquatione, ubi  $xy \propto ab$ , concipiamus ab constituere rectangulum aliquod parallelogrammum ABCD, cujus unum latus AB sit a, & alterum BC sit b; atque per punctum C circa Asymptotos DA, AB Hyperbolen describamus CF; ac denique à quovis in ea pun-





ea puncto F agamus duas rectas lineas FG, FE, ipsis AB, BC parallelas: Erit enim parallelogrammum ACFG parallelogrammo ABCD æquale, per 12 prop. 2<sup>di</sup> libri Conicorum Apollonii. Adeo ut AE & EF sumi possint pro duabus quantitatibus indeterminatis  $y$  &  $x$ , quæ in se invicem ductæ efficiant  $xy \propto ab$ , quod exigebat proposita æquatio.

Eodem modo, si æquatio fuerit  $xy \propto by - ax$ , & producantur rectæ DC, EF, donec concurrant in punctum H: erit itidem parallelogrammum DHFG parallelogrammo CHEB æquale. Ac proinde si DC ponatur  $\propto a$ , & CB  $\propto b$ , (ut ante) & binæ quantitates indeterminatæ  $y$  &  $x$  ad binas lineas CH & HF referantur, atque DH seu  $a + y$  ducatur in HF seu  $x$ : erit rectangulum DF seu  $xy + ax$  æquale rectangulo CE seu  $by$ , utpote quod invenitur multiplicando CB seu  $b$  per CH seu  $y$ . Adeoque si utrinque auferatur  $ax$ , relinquetur  $xy \propto by - ax$ . Quæ est æquatio posterior.

E quibus manifestum fit, quod, licet plurimi referat, quænam rectæ pro quantitatibus indeterminatis sumantur, ut æquatio brevis atque facilis reddatur, semper tamen linea ejusdem generis appareat, quocunque tandem modo sumantur.

Omitto alios æquationum modos seu formulas, eandem curvam designantes, quandoquidem complures sunt. In genere hoc dicam, totam æquationum illarum varietatem oriri tantum ex varia harum curvarum ad diversas rectas lineas relatione. Nam, ut ostendatur quænam differentia obtineri possit, cum curva linea ad diversas rectas lineas refertur: Sunt duæ rectæ lineæ positione datæ AB, DF, sibi mutuò occurrentes in D; punctum autem

tem





$y + b + \frac{bx}{a}$ , ad CG; erit  $CG \propto \frac{ab + bx + ay}{\sqrt{aa + bb}}$ . E quibus perspicuum fit, differentiam omnem, quæ in referendis curvæ punctis C, tum ad puncta rectæ AB, tum ad puncta rectæ DF, obtineri potest, in eo tantum consistere, quod, cum AB indeterminata relinquitur, CB exprimitur per  $y$ ; sed CG per  $\frac{ab + bx + ay}{\sqrt{aa + bb}}$ ; & DG per  $\frac{aa + ax - by}{\sqrt{aa + bb}}$ . Ita ut si  $y$  speciem inquat, quæ ei ex proprietate curvæ convenit; constabit simul relatio, quam curvæ puncta C obtinebunt ad puncta utriusque rectæ AB, DF. Id quod eodem modo in omni alia datarum linearum positione ostendi posset, nisi breviores esse vellemus.

B *Saltem si supponamus quantitatem  $e$  &  $z$  majorem quàm  $c$  g. nam si minor foret, mutanda essent omnia signa + & —.] Existente enim  $e$  &  $z$  minore quàm  $c$  g., & multiplicando utrobique per  $z^2$ , foret  $e$  &  $z$  minor quàm  $c$  g.  $z^2$ . Quo casu omnes quoque numeratoris termini, qui signo + adiciuntur, minores erunt illis, qui signo — adiciuntur; adeò ut tantum mutanda sint omnia signa. Aequationem autem hoc facto illam manere, ita ostenditur. Esto  $y \propto \frac{fe - dk}{d - e}$  (sufficit enim id per facile aliquod exemplum ostendere), suppositaque  $d$  minori quàm  $e$ , mutantur omnia signa + & —: fietque  $y \propto \frac{-fe + dk}{-d + e}$ .*

Quoniam enim ex hypothese  $y \propto \frac{fe - dk}{d - e}$ , erit, multiplicando utrinque per  $d - e$ ,  $dy - ey \propto fe - dk$ . Unde factâ transpositione, ut totum æquetur nihilo, erit  $dy - ey - fe + dk \propto 0$ . Transferantur rursus  $+dy - ey$  in alteram æquationis partem, & fiet  $-fe + dk \propto -dy + ey$ . Quæ æquatio à præcedenti non differt, nisi quod termini omnes contrariis signis sint affecti. Quare si utraque æqualitatis pars dividatur per  $-d + e$ , prodibit  $y \propto \frac{-fe + dk}{-d + e}$ . ut erat propositum.

Unde colligere licet: Si quantitates quædam signis + & — junctæ æquantur aliis quibusdam quantitatibus etiam signis + & — junctis: erunt quoque eædem contrariis signis affectæ inter se æquales.

Vnde

*Vnde si in hac aequatione quantitas y nulla sit, aut minor* B E  
*quàm nihil, postquam punctum C supposuimus in angulo D A G,*  
*oporteret & illud supponere in angulo D A E, aut E A R, aut*  
*R A G, mutando signa + & —, prout ad effectum hunc requi-*  
*reretur. Quòd si verò in quatuor hisce positionibus valor ipsius*  
*y nullus reperiretur, indicio esset, questionem casu proposito*  
*esse impossibilem.]* Sciendum hic ab Autore obiter notari, ad Vide fig.  
 plenam compositionem loci, in quem cadit quæsitum punctum pag. 12.  
 C, opus esse ut investigemus id ipsum in omnibus 4<sup>or</sup> angulis  
 D A G, D A E, E A R, & R A G, quærendo nempe ad hoc  
 4<sup>or</sup> æquationes diversas. Id quod notat facile esse, unâ æquatione  
 jam inventâ, quoniam ad reliquas obtinendas tantummodo mu-  
 tare oportet signa + & —, pro diversa habitudine quantitatum  
 inventarum ad figuræ lineas; ut punctum C, quando cadit intra  
 angulum D A E, aut E A R, aut R A G quærat eadem ratione,  
 quâ illud hic invenire docuit, cum intra angulum D A G cadere  
 supponitur. Manifestum enim est, quòd, si in 4<sup>or</sup> hisce positionibus  
 valor ipsius y nullus reperitur, quæstio proposita futura sit impos-  
 sibilis. Quod ipsum hic in genere de puncto C intelligi debet, e-  
 tiam si quæstio alias conditiones præsupponat: cum illa vix alio-  
 quin Autori (ob exiguam ejus utilitatem) istius momenti visa sit, ut  
 in constructione hujus loci totus esset, nisi quatenus hic unâ simul  
 compositionem Locorum Planorum & Solidorum traderet, sicut  
 ipsius verba indicant p. 12 & 34. Quippe alias in hac positione da-  
 tarum linearum contingit, quando videlicet rectangulum sub C B,  
 C F ponitur æquale rectangulo sub C D, C H, ut punctum C  
 non tantum ubivis cadat in Circulum, qui transit per puncta A, G,  
 & duas intersectiones linearum F E, G H, & ipsarum D A, F E;  
 verum etiam in utramque duarum oppositarum Hyperbolarum,  
 quarum una transit per A & G puncta, & altera per duas reliquas  
 intersectiones dictas. Quemadmodum etiam, si duæ ex datis li-  
 neis sunt parallelæ, fieri potest, ut punctum C ubilibet cadat in  
 duas oppositas Hyperbolas & insuper in Parabolam vel in duas  
 alias oppositas Hyperbolas; aut etiam in duas oppositas Hyper-  
 bolas & in rectam lineam, ubi videlicet binæ sunt parallelarum  
 paria sese intersecantia. atque ita de aliis. Idem observare licet  
 in Apollonii Locis Planis, à me restitutis, in quorum nonnullis,

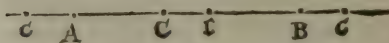
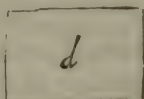


ad plenam loci compositionem, quælitum punctum præter lineas jam expressas etiam alia plana loca contingit, quæ pari facilitate investigari & construi possunt, prout nimirum idem punctum ad id in aliis tantum angulis suppositum fuerit, quemadmodum & ibidem fuit indicatum.

His similia notare quoque licet circa Problemata omnino determinata, in quibus non nisi certus est punctorum numerus. Cuiusmodi est sequens

## P R O B L E M A.

**I**N recta interminata assignatis duobus punctis A, B, in eadem aliud assignare punctum C, ut rectangulum



A C B, quod fit sub rectis A C, C B, ad assignata puncta A, B abscissis, dato spatio  $d$  æquale sit, quod tamen minus sit quartâ parte quadrati ex A B. quæ sit  $\propto a$ .

Quoniam hic juxta mentem Problematis punctum C indeterminatum est respectu puncti A, ut & respectu puncti B, hoc est, indeterminatum quò magis ad dextram quàm ad sinistram utriusque cadat, hinc si concipiatur determinatum inter A & B, æquatio huc pertinens comprehendet plus quàm oportet, neque legitima erit, si ei soli acquiescere velimus. Quocirca & illud ipsum extra A & B ab utraque parte supponendum est, si velimus ut solutio Problematis omnibus numeris sit absoluta.

Unde supponendo C primum cadere extra A B ad sinistram ipsius A, erit, assumptâ  $x$  pro A c,  $xx + ax \propto d$ ; ac deinde supponendo C cadere inter A & B, erit  $ax - xx \propto d$ ; & denique supponendo c cadere extra A B ad dextram ipsius B, erit  $xx - ax \propto d$ . Hoc est in numeris, si  $a$  sit  $\propto 20$ ,  $d \propto 96$ , habebitur  $x \propto 4$ ,  $x \propto -24$ ;  $x \propto 12$ ,  $x \propto 8$ ;  $x \propto 24$ , &  $x \propto -4$ . Quæ quidem omnes sunt radices, quæ ad propositum Problema pertinent. Quarum prima & ultima designant longitudinem lineæ A c  $\propto x$ , qualis

COMMENTARIJ IN LIBRUM II. 181

qualis ipsa sumenda est ab A versus sinistram, & quatuor reli-  
quæ, qualis ipsa sumi debet ab A versus dextram, cadente pun-  
cto C inter A & B, vel ultra B; adeo ut in toto sint 4<sup>or</sup> diversa  
puncta, quæ quæsito satisfaciunt.

Cæterum si velimus, ut una obtineatur æquatio, quæ hæc  
omnes radices simul includat, oportet tantum, ubicunque acce-  
pto puncto C, factâque  $A \propto x$ , multiplicare  $xx + 20x - 9600$   
per  $20x - xx - 9600$ , & id quod fit rursus per  $xx - 20x$   
 $- 9600$ , & invenietur  $-x^6 + 20x^5 + 496x^4 - 11840$   
 $x^3 + 47616xx + 184320x - 88473600$  seu  $x^6 - 20x^5 -$   
 $496x^4 + 11840x^3 - 47616xx - 184320x + 88473600$ .

Id quod etiam universalius fieri potest multiplicando C B  
 $\propto 8208x$  per  $A \propto x$ , obtinebitur enim  $8208xx \propto 96$ .  
Quæ æquatio præter radices superiores etiam continet  $x \propto -8$ ,  
&  $x \propto -12$ , quippe quæ eliciuntur ex æquatione  
 $-xx - 20x \propto 96$ .

Ubi demum notandum, ex æquatione inventa  $8208xx \propto 96$   
facile quoque esse aliam vulgari modo affectam invenire, quæ  
omnes easdem radices cum illa comprehendat, utpote multi-  
plicando utramque partem in se quadratè, & fit  $400xx840x^2$   
 $+ x^4 \propto 9216$ . Unde servatâ  $840x^2$  ab una parte, & deinde  
utrâque rursus quadratâ, invenitur æquatio  $x^8 - 800x^6 +$   
 $141568x^4 - 7372800xx + 8493465600$ , cujus radices  
eadem sunt quæ præcedentis æquationis  $8208xx \propto 96$ ,  
quas enumeravimus. Ratio autem, cur D. des Cartes hujusmodi  
æquationibus ad solutionem quæstionis ex Pappo allatæ non fue-  
rit usus, vel ea videtur, quod alias tum vulgares, tum etiam à  
quolibet facilius perceptibiles animadverterit; ita ut, dum quæ-  
stio per se satis difficilis existit, præstare judicaverit, specialem  
æquationem pro C puncto investigare, postquam illud in angulo  
DAG supponitur, ulteriusque tantum digito indicare, si Pro-  
blemati penitus satisfaciendum sit, eodem modo in reliquis an-  
gulis DAE, EAR, & RAG esse procedendum; quàm æqua-  
tionem universalem, quæ omnia simul puncta respiceret, invenire.

*Hinc nihil mihi amplius restare video pro linea LC præter* C

*hosce terminos: LC  $\propto \sqrt{mm + 0x - \frac{p}{m}xx}$ . Vnde cogno-*  
Z 3 *scitur,*

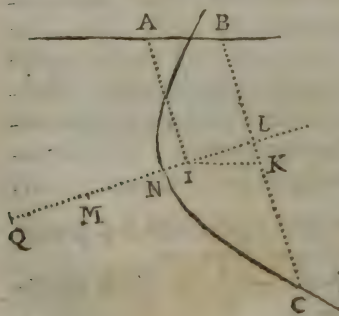


scitur, quòd si nulli fuissent, futurum fuisse ut punctum C reperiretur in linea recta IL; & si tales existissent, ut inde radix extrahi potuisset, hoc est, ut,  $mm \& \frac{p}{m}xx$  signo + notatis, 00 fuisset equalis  $4pm$ , sive etiam termini  $mm \& 0x$ , aut  $0x \& \frac{p}{m}xx$  nihilo fuissent aequales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidisset, quæ quidem inventu difficilior non fuisset quam IL.] Hæc verba tres condiciones complectuntur ad determinandum punctum C, quando in lineam rectam cadit.

Nam cum facienda sit  $LC \propto \sqrt{mm + 0x - \frac{p}{m}xx}$ , reperietur illud punctum in linea recta IL, si termini, quibus ipsa exprimitur, nulli sint. Et si tales fuerint, ut radix ex iis extrahi possit, hoc est, ut,  $mm \& \frac{p}{m}xx$  signo + notatis, 00 sit equalis  $4pm$ , hoc est,

ut LC sit  $\sqrt{mm + \frac{p}{m}xx} \propto \sqrt{4pm}$  seu  $m \propto \sqrt{\frac{p}{m}}$ : punctum C similiter in recta linea reperietur. Idem continget, si termini  $mm \& 0x$ , aut  $0x \& \frac{p}{m}xx$  fuerint nulli, dummodo reliquus  $\frac{p}{m}xx$ , aut  $mm$  semper signo + adfectus sit.

CC Sed si hoc non fiat, punctum C reperietur semper in aliqua trium Conicarum sectionum, aut in Circulo, cujus, &c.] Quò ista, quæ hic deinceps pag. 29, 30, & 31 ab Autore traduntur, cuivis manifestiora fiant, sequentia in medium afferre visum fuit.



Primus casus, cum Sectio est Parabola, in quâ linea LC una ex iis existit, quæ ordinatim ad diametrum, quæ semper in lineam IL cadit, adplicantur; & cujus vertex N in ea ex altera parte puncti L sumendus est respectu puncti I, linea LC existente  $\propto \sqrt{mm + 0x}$ . Ad quem inveniendum, sicut & latus rectum

Etum  $r$ , pono pro  $N I f$ , eritque  $N L \propto f + \frac{ax}{7}$ ,

deinde ita procedo :

$$\text{Mult. N L. } f + \frac{a \times}{\frac{1}{y}}$$

$$\text{fit } \square \text{ LC. } \int r + \frac{r x}{q}; \text{ xquale } m m + o x.$$

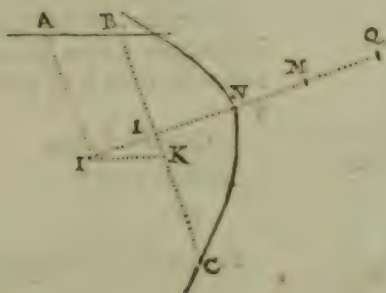
$$\begin{array}{r} 47 \text{ } \infty \text{ } 0 \\ \hline 47 \text{ } \infty \text{ } 0 \text{ } 2 \\ \hline 7 \text{ } \infty \text{ } \frac{02}{4} \end{array}$$

fr  $\infty$  mm, dele r

$$\frac{f_0 z}{z} \propto \text{ms ms}$$

for a m m

$$f \infty \frac{.377777}{07}$$



2<sup>us</sup> casus  
ubi vertex N  
in linea IL ex  
eadem parte  
puncti L su-  
mendus est re-  
spectu puncti  
I, lineā LC  
existente  $\infty$   
 $\sqrt{m m} = 0 x$ .

Quod sic liquet

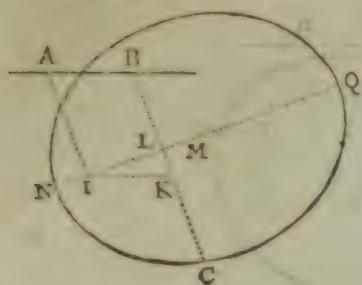
Mult. L N.  $\int - \frac{x}{r}$   
per  $r$

fit  $\square L.C. f_1 - \frac{afx}{3}$  xquale  $mm - 0x$ .

Et fit, ut ante,  $r \propto \frac{0.2}{a}$ , &  $f \propto \frac{977.778}{0.7}$ .







Primus casus, cum linea est Circulus, & centrum ejus M in linea I L ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineam LC existente

$$\propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$$

Ad quod inveniendum, ut & diametrum NQ, pono pro NM vel MQc, &

pro IM d; eritque NL  $\propto c - d + \frac{ax}{\sqrt{}}$ , & LQ  $\propto c + d - \frac{ax}{\sqrt{}}$ .

Deinde ita procedo:

Mult. NL.  $c - d + \frac{ax}{\sqrt{}}$

per LQ.  $c + d - \frac{ax}{\sqrt{}}$

$$cc - cd + \frac{acx}{\sqrt{}} + cd - dd + \frac{adx}{\sqrt{}}$$

$$- \frac{acx}{\sqrt{}} + \frac{adx}{\sqrt{}} - \frac{axxx}{\sqrt{\sqrt{}}}$$

fit  $\square NLQ$  seu  $\square LC. cc - dd + \frac{acx}{\sqrt{}} - \frac{adx}{\sqrt{}} - \frac{axxx}{\sqrt{\sqrt{}}}$ , æquale  $mm + ox - \frac{p}{m}xx$ .

Intellige hic c majorem esse quam d.

$$\frac{aa}{\sqrt{\sqrt{}}} \propto \frac{p}{m}$$

$$\frac{2ad}{\sqrt{}} \propto 0$$

$$d \propto \frac{ox}{2a} \text{ seu } \frac{am}{2p}. \text{ Est enim } aam \propto p\sqrt{\sqrt{}}. \text{ Et fit } dd \propto \frac{ooxx}{4aa}.$$

$$cc - dd \propto mm, \text{ dele } dd$$

$$cc \propto \frac{ooxx}{4aa} + mm$$

$$4cc \propto \frac{ooxx}{aa} + \frac{4amm}{aa}, \text{ dele } aam$$

$$4cc \propto \frac{ooxx}{aa} + \frac{4mp\sqrt{\sqrt{}}}{aa}$$

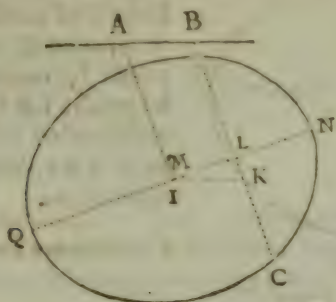
$$4cc \propto \sqrt{\frac{ooxx}{aa} + \frac{4mp\sqrt{\sqrt{}}}{aa}}$$

Aa

2<sup>da</sup>







3<sup>us</sup> casus, ubi  
centrum M cadit in  
punctum I, cum  
quantitas  $ox$  nul-  
la est, lineâ LC  
existente

$$\propto \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}.$$

Et fit  $2c \propto m$  vel

$$\frac{2pxx}{aa}, \text{ vel etiam}$$

$$\sqrt{\frac{4mpxx}{aa}}.$$

Quod sic liquet

Mult. QL.  $c + \frac{ax}{\sqrt{}}$

per LN.  $c - \frac{ax}{\sqrt{}}$

$$cc + \frac{acx}{\sqrt{}}$$

$$- \frac{aax}{\sqrt{}} - \frac{aaxx}{\sqrt{}}$$

& fit  $\square QLN$  seu  $\square LC. cc - \frac{aaxx}{\sqrt{}}$ , æquale  $mm - \frac{p}{m}xx$ .

Intellige hic  $d$  esse  $\propto o$ .

$$\frac{aa}{\sqrt{}} \propto \frac{p}{m}$$

$$\frac{aam \propto p\sqrt{}}{m \propto \frac{p\sqrt{}}{aa}}, \text{ \& } mm \propto \frac{pp\sqrt{}}{aa} \propto cc$$

$$\frac{4pp\sqrt{}}{aa} \propto cc$$

$$2c \propto \sqrt{\frac{4pp\sqrt{}}{aa}} \text{ vel } 2m.$$

Nota hic in tribus allatis casibus, in quibus  $c$  major intelligitur  
quàm  $d$ , verticem N cadere ad alteram partem puncti M respectu  
puncti I, hoc est, quando habetur  $+mm$ .





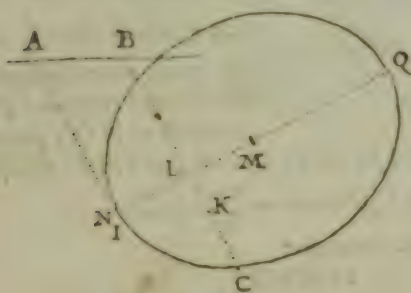
$cc - dd \infty - mm$ , dele  $dd$

$$\frac{cc \infty}{4aa} - \frac{mm}{mm}$$

$$\frac{4cc \infty}{aa} - \frac{4amm}{aa}, \text{ dele } 4amm$$

$$\frac{4cc \infty}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}$$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{cczz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$ . Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Circulum, quemadmodum supposuimus, quantitatem  $oo$  hoc casu majorem requiri quam  $4mp$ .



5<sup>us</sup> casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cum quantitas  $mm$  non reperitur, lineâ LC existente  $\infty$

$$\sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}. \text{ Et fit}$$

$$d \infty r \infty \frac{oz}{za} \text{ seu } \frac{aom}{zpz},$$

$$\& 2c \infty \frac{oz}{a}.$$

Quod sic liquet

$$\text{Mult. NL. } \frac{ax}{i}$$

$$\text{per LQ. } 2c - \frac{ax}{i}$$

$$\text{fit } \square NLQ \text{ seu } \square LC. \frac{2acx}{i} - \frac{aaxx}{ii}, \text{ aequale } ox - \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hic  $c$  &  $d$  esse æquales.

$$\frac{2ac}{i} \infty o$$

$$\frac{2ac}{i} \infty o \zeta$$

$$2c \infty r \infty \frac{oz}{a}$$

$$\frac{aa}{ii} \infty \frac{p}{m}$$

$$aam \infty pzz$$

Hinc cum in omnibus hisce Circuli casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in  $xx$  ducta ubique signo — adfecta reperitur, ut & quantitas  $aam \infty pzz$ ; nec præter positiones hasce ul-

A a 3

la alia





$$\frac{ccr-ddr}{2c} \propto mm$$

$$ccr-ddr \propto 2cmm, \text{ dele } c \& cc$$

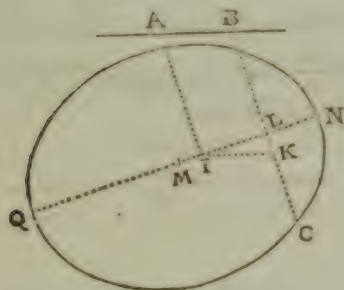
$$\frac{aaadr}{00zz} - ddr \propto \frac{2admmr}{0z}$$

$$aaadr \propto d00zz + 2admm0z$$

$$rr \propto \frac{00zz}{aa} + \frac{2admm0z}{ad}, \text{ dele } d, \& \text{ extr. } \sqrt{}$$

$$r \propto \sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}. \text{ Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut } pzz \text{ ad } aam, \text{ ita}$$

$$\sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ ad } \sqrt{\frac{aa00mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$$



2<sup>us</sup> casus, ubi centrum M in linea IL ex altera parte est sumendum puncti L respectu puncti I, lineâ LC existente

$$\propto \sqrt{mm - ox} - \frac{p}{m}xx.$$

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect.  $\square QLN$

$$2c \text{ --- } r \text{ --- } cc - dd = \frac{2adx}{r} - \frac{aaxx}{rr},$$

$\square LC$

$$\text{ad } ccr - ddr = \frac{2adr}{z} - \frac{aarxx}{zz}, \text{ aequale } mm - ox - \frac{p}{m}xx.$$

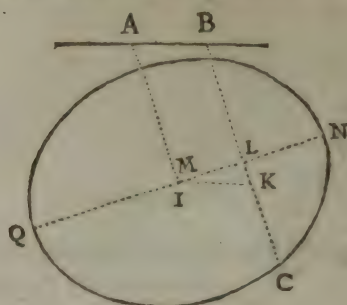
Intellige hic similiter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, r ad 2c, ut pzz ad aam, d  $\propto \frac{a0m}{2pz}$ ,

$$r \propto \sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \& 2c \propto \sqrt{\frac{aa00mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$$

3<sup>us</sup>





3<sup>tius</sup> casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cum quantitas  
 o x nulla est, lineâ LC existente  $\propto \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$ . Et fit

$$r \propto \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}} \text{ seu } \frac{2z}{a} \sqrt{mp}, \text{ \& } 2c \propto \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect.  $\square QKN$   $\square LC$   
 $2c \text{ --- } r \text{ --- } cc - \frac{aaxx^2}{zz}$ , ad  $ccr - \frac{aaxxx}{zz}$ , æquale  
 $mm - \frac{p}{m}xx$ .

Intellige hic d esse  $\propto o$

$$\frac{aar}{2czx} \propto \frac{p}{m}$$

$$\frac{aamr}{c} \propto \frac{aamr}{2pzz}$$

Hinc ut r ad 2c, ita pzz ad aam.

$$\frac{cr}{2} \propto mm$$

$$cr \propto 2mm, \text{ dele } c$$

$$\frac{aamr}{2pzz} \propto 2mm$$

$$aar \propto 4mpzz$$

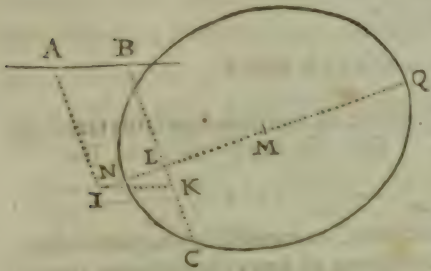
$$rr \propto \frac{4mpzz}{aa}$$

$$r \propto \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$$

Hinc ad inveniendum la-  
 tus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita  
 $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ , ad  $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$ .

Ubi

Ubi notandum, in allatis tribus casibus, sicut in Circulo, propter ipsam  $d$  majorem, verticem  $N$  cadere ad alteram partem puncti  $M$  respectu puncti  $I$ , hoc est, quando habetur  $+mm$ .



4<sup>ta</sup> casus, ubi vertex  
N cadit ad eandem par-  
tem puncti M respectu  
puncti I, nimirum in-  
ter puncta I & L, cum  
oo est major quam 4<sup>ma</sup> p.  
linea L C existente ∞

$$V = mm + ox - \frac{p}{m} xx.$$

Et fit  $d \propto \frac{a \cdot m}{2 \cdot p}$ ,

$$700 \sqrt{\frac{0022}{AA} - \frac{4mP22}{AA}}, \& 200 \sqrt{\frac{AA0077m}{PP77} - \frac{4AA77m}{P77}}.$$

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect.

DNLQ

$$c \frac{r}{r} \rightarrow c - dd + \frac{adx}{2} - \frac{axxx}{22}, \text{ ad}$$

□LC

$$\frac{ccr - ddr + \frac{r^2 drx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{zc}, \text{ xquale } -mm + ox - \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hic  $c$  minorem quam  $d$ .

$$\frac{dr}{dz} \propto 0$$

2007

$$\frac{air}{07} \text{ } \infty, \& \frac{air}{0077} \text{ } \infty$$

$$\frac{4.37}{2622} \propto \frac{\rho}{m}$$

dele  $c$ ,  $\frac{aamr \infty 2cpzz}{aamr \infty \frac{2adpzr}{}}$  Hinc ut  $r$  ad  $2c$ , ita  $pzz$  ad  $aam$ .

dom 2 d p 2

$$d \propto \frac{a \cdot m}{2 p z}$$

Bb

667—





Quocirca cum in omnibus hisce Ellipseos casibus siue diversis  
ejus positionibus quantitas in  $xx$  ducta ubique signo — adfecta  
reperiatur, & ratio recti lateris ad transversum sit, ut  $p\mathcal{R}\mathcal{R}$  ad  
 $aa m$ ; nec præter allatas positiones ulla alia excogitari queat, quâ  
linea  $LC$  talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineat  
tur: sequitur, si in quæstione terminus  $\ell_{xx}$  signo — denotatus  
fuerit, lineam, in quam punctum quæsitum  $C$  cadit, fore Ellipsin,  
cujus rectum latus ad transversum sit ut  $p\mathcal{R}\mathcal{R}$  ad  $aa m$ , ac ejus  
dem positio, cujusmodi jam est ostensum, exstat.



Primus casus, cum sectio est Hyperbola, in qua linea LC est una ex iis, quæ ad diametrum, quæ est in linea IL, ordinatum applicantur, & ubi centrum M in linea IM ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cum quantitas  $\infty$  est major quam  $4mp$ , lineâ LC existente  $\infty \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$ .

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum  $r$ , & transversum NQ, pono, ut ante in Circulo & Ellipsi, pro NM vel MQ  $c$ , & pro IM  $d$ : eritque  $NL \propto d - c - \frac{ax}{q}$ , &  $LQ \propto d + c - \frac{ax}{q}$ .

B b 2

Dein-



Deinde ita procedo:

Mult. NL.  $d - c - \frac{ax}{z}$

per L Q.  $d + c - \frac{ax}{z}$

$dd - cd - \frac{ax}{z}$

$+ cd - cc - \frac{acx}{z}$

$- \frac{adx}{z} + \frac{acx}{z} + \frac{axxz}{zz}$

lat. tr. lat. rect.

$zc - r - \square NLQ. dd - cc - \frac{2adx}{z} + \frac{axxz}{zz}$

$ad \square LC. \frac{ddr - ccr - \frac{2adr}{z} + \frac{axrx}{zz}}{zc}, \text{ a quale } mm - ox + \frac{p}{m}xx.$

Intellige hìc  $d$  majorem esse quàm  $c$ .

$\frac{adr}{cz} \propto 0$

$\frac{adr}{cz} \propto c \propto z$

$\frac{adr}{cz} \propto c, \& \frac{aaddr}{aozz} \propto cc$

$\frac{aar}{czx} \propto \frac{p}{m}$

dele  $c$ ,  $\frac{aamr}{aozz} \propto \frac{cpz}{z}$

$\frac{aamr}{aozz} \propto \frac{2adpqr}{o}$

$\frac{aom}{aozz} \propto \frac{dpz}{z}$

$\frac{aom}{aozz} \propto d$

Hinc ut  $r$  ad  
 $zc$ , ita  $pzz$   
ad  $aam$ .

$\frac{ddr - ccr}{zc} \propto mm$

$\frac{ddr - ccr}{zc} \propto cmm$ , dele  $c$  &  $cc$

$\frac{ddr - \frac{aaddr}{aozz}}{aozz} \propto \frac{2admmr}{oz}$

$\frac{doozz - aaddr}{aozz} \propto ammoz$

$\frac{doozz - ammoz}{aozz} \propto aaddr$

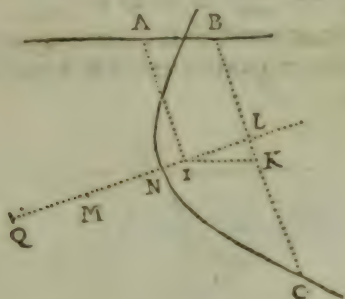
$\frac{doozz - ammoz}{aozz} \propto r$ , dele  $d$ , & extr.  $\vee$

$\sqrt{\frac{doozz - ammoz}{aozz}} \propto r$ . Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut  $pzz$  ad  $aam$ , ita

$\sqrt{\frac{poozz - ampoz}{aozz}}$ , ad  $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{aamz}{pzz}}$

Ubi

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem  $oo$  hoc casu majorem requiri quàm  $4mp$ .



2<sup>da</sup> casus, ubi centrum M in linea IL ex altera parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cum  $oo$  est major quàm  $4mp$ , lineâ LC existente  $\propto \sqrt{mm+ox+\frac{p}{m}xx}$ .

Quod sic liquet

$$\begin{aligned} \text{Mult. QL. } & c + d + \frac{ax}{r} \\ \text{per LN. } & -c + d + \frac{ax}{r} \\ \hline & -cc - cd - \frac{acx}{r} \\ & + cd + dd + \frac{adx}{r} \\ & + \frac{acx}{r} + \frac{adx}{r} + \frac{axxx}{rr} \end{aligned}$$

lat. tr. lat. rect.

$$\begin{aligned} 2c - r &= \square \text{QLN. } dd - cc + \frac{2adx}{r} + \frac{axxx}{rr}, \\ \text{ad } \square \text{LC. } & ddr - ccr + \frac{2adrxx}{r} + \frac{aarxxx}{rr}, \text{ æquale} \end{aligned}$$

$$mmm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

Bb 3

Simi-

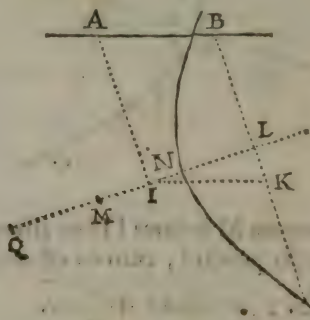


Similiter hic  $d$  majorem intellige quàm  $c$ .

Et fit, ut ante,  $r$  ad  $2c$ , ut  $pzz$  ad  $aam$ ,  $d \propto \frac{aom}{2pz}$ ,

$$r \propto \sqrt{\frac{00zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \text{ \& } 2c \propto \sqrt{\frac{aaomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$$

Ubi etiam liquet, ut punctum  $C$  cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem  $oo$  & hoc casu majorem requiri quàm  $4mp$ .



3<sup>rius</sup> casus, ubi vertex  $N$  sumendus est inter puncta  $I$  &  $L$ , lineâ

$LC$  existente  $\propto \sqrt{-mm + ox + \frac{p}{m}xx}$ .

Et fit  $d \propto \frac{aom}{2p\gamma}$ ,  $r \propto \sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$ , &  $c \propto \sqrt{\frac{aaomm}{pp\gamma\gamma} + \frac{4aam^3}{p\gamma\gamma}}$ .

Quod sic liquet

$$\text{Mult. } QL. \quad c + d + \frac{ax}{\gamma}$$

$$\text{per } LN. \quad -c + d + \frac{ax}{\gamma}$$

$$-cc - cd - \frac{acx}{\gamma}$$

$$+cd + dd + \frac{adx}{\gamma}$$

$$+ \frac{acx}{\gamma} + \frac{adx}{\gamma} + \frac{axx}{\gamma\gamma}$$

lat. tr. lat. rect.

$$2c - r - \square QLN. \quad dd - cc + \frac{2adx}{\gamma} - \frac{axx}{\gamma\gamma}$$

$$\text{ad } \square LC. \quad \frac{ddr - ccr + \frac{2adr}{\gamma} + \frac{aarxx}{\gamma\gamma}}{2c}, \text{ æquale}$$

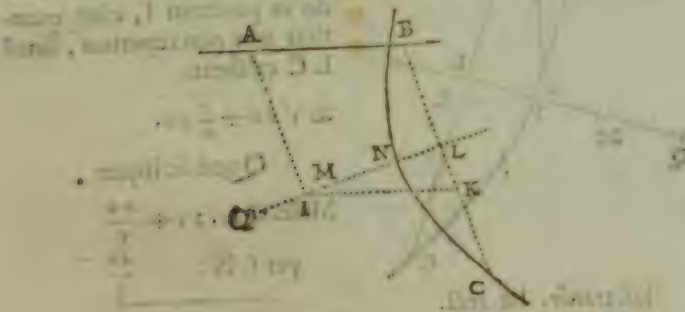
$$-mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intel-

[illegible]

$$\begin{array}{l} \frac{ddr - ccr}{zc} \infty - mm \\ \frac{ddr - ccr}{zc} \infty - cmm, \text{ dele, } c \& cc \\ \frac{ddr - \frac{addr^2}{cccz}}{cccz} \infty - \frac{2admmp}{cz} \\ \frac{dooz}{cccz} + \frac{ammooz}{ad} \infty addr \\ \text{dele d, \&} \\ \text{extr. y.} \quad \frac{dooz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad} \infty rr \end{array}$$

$\sqrt{\frac{a^2 p^2 z^2}{a^2} + \frac{4 m^2 p^2 z^2}{a^2}} \propto r$ . Hinc ad inveniendum latus  
 transferetur, fiat ut  $p z z$  ad  $a a m$ , ita  
 $\sqrt{\frac{a^2 p^2 z^2}{a^2} + \frac{4 m^2 p^2 z^2}{a^2}}$ , ad  $\sqrt{\frac{a^2 a o o m m}{p p z z} + \frac{4 a a m^3}{p p z z}}$ .



4<sup>o</sup> casu, ubi centrui M & vertex N sumi debent inter puncta  
I & L, lineâ LC existente  $x\sqrt{-mm-ax+\frac{p}{m}xx}$ .

Quod



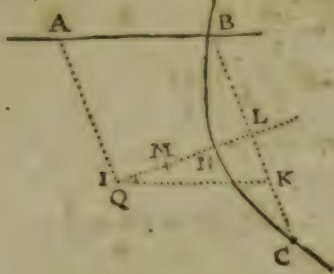


COMMENTARIUM IN LIBRUM II. 201

Intellige hic  $c$  &  $d$  esse æquales.

Et fit, ut ante in Ellipsi,  $r$  ad  $2c$ , ut  $p\sqrt{z}$  ad  $am$ ,

$$d \propto c \propto \frac{am}{2p\sqrt{z}}, r \propto \frac{az}{a}, \& 2c \propto \frac{am}{p\sqrt{z}}.$$



6<sup>us</sup> casus, ubi vertex Q cadit in punctum I, cum quantitas  $mm$  non reperitur, lineâ LC existente

$$\propto \sqrt{-ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL.} \frac{ax}{\sqrt{z}}$$

$$\text{per LN.} -c + \frac{ax}{\sqrt{z}}$$

lat. transv. lat. rect.

$$2c - r = \square \text{QLN.} - \frac{2acx}{\sqrt{z}} + \frac{axx}{\sqrt{z}},$$

$$\text{ad } \square \text{LC.} - \frac{2acrx}{z} + \frac{axrx}{zz}, \text{ æquale } -ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hic similiter  $c$  &  $d$  esse æquales.

Et fit, ut ante,  $r$  ad  $2c$ , ut  $p\sqrt{z}$  ad  $am$ ,  $d \propto c \propto \frac{am}{2p\sqrt{z}}, r \propto \frac{az}{a},$   
 $\& 2c \propto \frac{am}{p\sqrt{z}}.$



7<sup>mus</sup> casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cum quantitas  $ox$  nulla est, lineâ LC existente  $\propto \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}.$   
 Cc Quod



Quod sic liquet

$$\text{Mult. } Q L. \quad c + \frac{ax}{z}$$

$$\text{per } L N. \quad -c + \frac{ax}{z}$$

$$-cc - \frac{acx}{z}$$

$$+ \frac{acx}{z} + \frac{aaxz}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

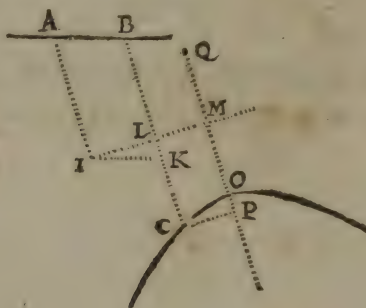
$$2c - r - \square QLN. -cc + \frac{aaxz}{zz},$$

$$-ccr + \frac{aarxz}{zz}$$

$$\text{ad } \square LC. \quad \frac{-ccr + \frac{aarxz}{zz}}{2c}, \text{ æquale } -mm + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hîc  $d$  esse  $\infty o$ .

Unde, ut ante in Ellipsi, invenitur,  $r$  esse ad  $2c$ , sicut  $pzz$  ad  $aam$ , &  $r \propto \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ , at verò  $2c \propto \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$ .



8<sup>vis</sup> casus, ubi linea  $LC$  est parallela diametro, ad quam illa, quæ est in linea  $IL$ , ordinatim applicatur, & ubi centrum  $M$  in linea  $IL$  ex eadem parte puncti  $L$  sumendum est respectu puncti  $I$ , cum quantitas  $oo$  est minor quàm  $4mp$ , lineâ  $LC$  existente  $\propto \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$ .

Hinc ad inveniendum centrum  $M$ , latus rectum  $R$  pertinens ad diametrum  $OP$ , & latus transversum  $OQ$ , pono, ut ante, pro  $IM$   $d$ , & pro  $OM$  vel  $MQ$   $e$ .

Dein-

Deinde ita procedo:

Mult. L M vel CP.  $d - \frac{ax}{z}$

per CP.  $d - \frac{ax}{z}$

$dd - \frac{adx}{z}$

lat. rect. lat. transv.

R ——— 2e ——— □ CP.  $dd - \frac{adx}{z} + \frac{aax}{zz}$ ,

ad □ QP'O.  $2dde - \frac{4adx}{z} + \frac{2aax}{zz}$ ,

add. □ MO. ee

fit □ MP vel LC.  $2dde + eeR - \frac{4adx}{z} + \frac{2aax}{zz}$ ,

aquale  $mm - ox + \frac{p}{m}xx$ .

$\frac{ade}{Rz} \propto o$   
 $\frac{ade \propto o Rz}{e \propto \frac{oRz}{aad}}$

$\frac{aax}{Rzz} \propto \frac{p}{m}$   
 dele e,  $\frac{aaxem \propto pRzz}{\frac{aomRz}{zd} \propto pRzz}$  Hinc ut 2e ad  
 $\frac{aom \propto dpz}{\frac{aom}{p} \propto d}$  R, ita pzz ad  
 $\frac{aom}{p} \propto d$  aam.

$\frac{2dde + eeR}{R} \propto mm$

$2dde + eeR \propto mmR$ , dele e

$\frac{dozR}{za} + eeR \propto mmR$

$\frac{oam}{ap} + ee \propto mm$

$ee \propto mm - \frac{oam}{ap}$

$e \propto \sqrt{mm - \frac{oam}{ap}}$ , &  $2e \propto \sqrt{4mm - \frac{oam}{p}}$ .

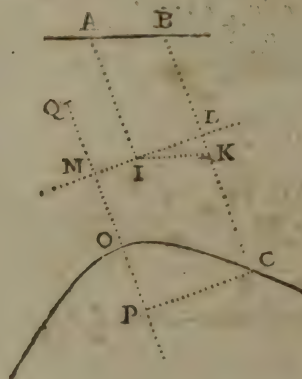
Cc 2

Hinc



Hinc ad inveniendum latus rectum, fiat ut  $p\zeta\zeta$  ad  $aa m$ , ita  
 $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$ , ad  $\sqrt{\frac{4a+m}{p\zeta\zeta} - \frac{a+oom}{p\zeta\zeta}}$ .

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem  $oo$  hoc casu minorem requiri quam  $4mp$ , contra quam in primo casu.



9<sup>us</sup> casus, ubi centrum M in linea IL sumendum est ex altera parte puncti L respectu puncti I, cum  $oo$  est minor quam  $4mp$ , lineâ LC existente

$$\propto \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod sic liquet

$$\text{Mult. ML vel PC. } d + \frac{ax}{\zeta}$$

$$\text{per PC. } d + \frac{ax}{\zeta}$$

$$dd + \frac{adx}{\zeta}$$

$$+ \frac{adx}{\zeta} + \frac{aax}{\zeta\zeta}$$

lat. rect. lat. transv.

$$R - 2e - \square PC. dd + \frac{2adx}{\zeta} + \frac{aax}{\zeta\zeta},$$

$$\square QPO$$

$$\text{ad } \frac{2dde + \frac{4adx}{\zeta} + \frac{2aax}{\zeta\zeta}}{R},$$

$$\text{add. } \square MO. ee$$

$$\text{fit } \square MP \text{ vel LC. } \frac{2dde + eeR + \frac{4adx}{\zeta} + \frac{2aax}{\zeta\zeta}}{R},$$

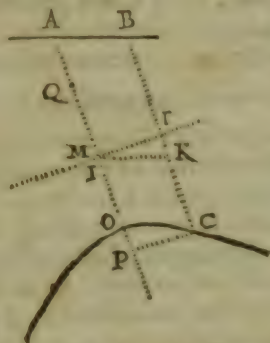
$$\text{xquale } mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

$$\text{Et fit, ut ante, } 2e \text{ ad } R, \text{ ut } p\zeta\zeta \text{ ad } aa m, d \propto \frac{oom}{2p\zeta},$$

$$2e \propto \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}, \text{ \& } R \propto \sqrt{\frac{4a+m}{p\zeta\zeta} - \frac{a+oom}{p\zeta\zeta}}.$$

Ubi

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem 00 & hoc casu minorem requiri quàm 4mp, contra quàm in 2<sup>do</sup> casu.



10<sup>mo</sup> casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cum quanti-  
tas 00 nulla est, lineâ L C existente  $\propto \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$ .

Et fit  $2e \propto m$ , &  $R \propto \frac{2.44mm}{p\lambda\lambda}$ , & ratio  $2e$  ad  $R$ ,  
ut  $p\lambda\lambda$  ad  $aam$ .

Quod sic liquet

Mult. M L vel P C.  $\frac{ax}{x}$

per P C.  $\frac{1.5}{7}$

lat. rect. lat. transv.

t. rect. lat. tranlv.  $\square$  P C.  $\frac{xxxx}{77}$ , ad  $\square$  Q P O.  $\frac{xxxx}{R77}$   
 add.  $\square$  M O.  $ee$

add. ☐ M O. *cc*
$$\text{fit } \square \text{ MP vel L C. } e e + \frac{2 a a e x x}{R z z},$$
$$x \text{quale } m m + \frac{p}{m} x x.$$

CC 30 113 113

630 m, & 26302 m

$$\frac{2446}{R77} \infty \frac{P}{77}$$

dele e,  $\frac{R\gamma\gamma}{2aaem \propto p R\gamma\gamma}$ . Hinc ut  $z$  e ad  $R$ , ita  $p\gamma\gamma$  ad  $aaem$ .

2 4 4 m m 30 p R 22

2 4 4 77 77 30 R  
977

Cc 3

Hinc



Hinc cum in omnibus hisce Hyperbolæ casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in  $xx$  ducta ubique signo  $+$  adfecta reperiatur, & in prioribus septem latus rectum ad transversum sit, ut  $pzz$  ad  $aa m$ , at in tribus posterioribus ut  $aa m$  ad  $pzz$ ; nec præter has positiones ulla alia excogitari queat, quâ linea  $LC$  talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus  $\frac{p}{m}xx$  signo  $+$  denotatus fuerit, punctum quæsitum  $C$  cadere in Hyperbolam, cujus rectum latus ad transversum sive etiam transversum ad rectum, pro diversa terminorum ipsius  $LC$  constitutione, sit ut  $pzz$  ad  $aa m$ , ac ejusdem positio, qualis jam ostensa fuit, existat.

Ubi denique notandum, quod, sicut punctum  $C$  in Hyperbolam cadere ostensum est, cujus vertex  $N$  vel  $O$ , id ipsum similiter in Hyperbola opposita pro libitu assumi possit, cujus vertex est  $Q$ , non autem indifferenter in 4<sup>or</sup> ejusmodi sectionibus, quæ Conjugatæ vocantur, simul.

ccc

*Quâ quidem ratione inde facile est invenire hanc Parabolam per Problema 1<sup>um</sup> primi libri Conicorum Apollonii.*

Quo illis, quibus hi Apollonii libri, aut etiam aliorum, qui de Conicis scripserunt, non sunt ad manus, hac in parte satisfiat: lubet hoc loco adducere ea, quæ mihi olim circa hæc, dum me inter peregrinandum in hac Geometriæ methodo exercebam, exciderant, simili occasione ipse investiganda proposui ac inveni. Quod etiam iis in hac Methodo se oblectare cupientibus, ut proprio Marte propositiones invenire addiscant, inservire potest, prout iis, hisce tanquam exemplis, quibus ad alias quærendas & investigandas instigentur, prævero; ne ad universalem Matheos complexionem plura librorum volumina evolvere & propositiones in iis singulas excutere (quod plerisque summus est scopus) opus habeant; quin potius quo pacto illæ inventæ fuerint perpendant; novasque alias innumeras, quibus scientia hæc non parvum incrementum capere valeat, invenire moliantur.

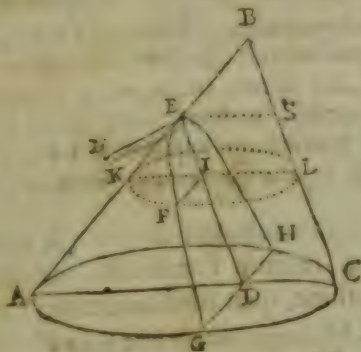
Verum enimvero ut non solum pateat, quâ ratione illa, quæ hoc loco Autor ab Apollonio ostensa citavit, juxta Geometriæ suæ methodum inveniri possint; sed etiam illa, quæ ex ipso p. 29, 31, & 32 allegavit (quæ omnia, quod sciam, ea sunt, quæ ab eo ad Geometriam suam ex Apollonio præsupponuntur): non abs re fue-

re fuerit illa praesenti commentario simul comprehendere atque ad Autoris mentem sic explicata exhibere.

DE LOCIS SOLIDIS SIVE CONICARVM  
SECTIONVM PROPRIETATIBVS.

*Suppositiones.*

1. **R**ectam lineam BA vel BC, quae à vertice coni B ducitur ad basis AC circumferentiam, esse in superficie conica.
2. Sectionem KFL, basi coni AC parallelam, esse circumulum.



De PARABOLA, quae est sectio coni ABC per planum GFEH, in qua linea ED, communis sectio trianguli per axem ABC & plani secantis GFEH, quae & sectionis diameter dici consuevit, parallela est uni laterum AB, BC ejusdem trianguli, ut hic ipsi BC; linea GH, quae Basis Sectionis GFEH vocatur, ipsam AC, basin trianguli per axem, ad rectos angulos secante.

Esto



Eſto  $AB \propto a$  $BC \propto b$  Fiat propter ſimilitudinem  $\triangle^{rum} ABC \& KEI$  $AC \propto c$  $EB \propto d$  ut  $BC$  ad  $CA$ , ita  $EI$  ad  $IK$  $EI \propto x$   $b \text{ — } c \text{ — } x$   $\frac{cx}{b}$  $FI \propto y$  Rurſus fiat propter ſimilitudinem $\triangle^{rum} ABC \& EBS$ ut  $AB$  ad  $AC$ , ita  $EB$  ad  $ES$  ſeu  $IL$  $a \text{ — } c \text{ — } d$   $\frac{cd}{a}$ 

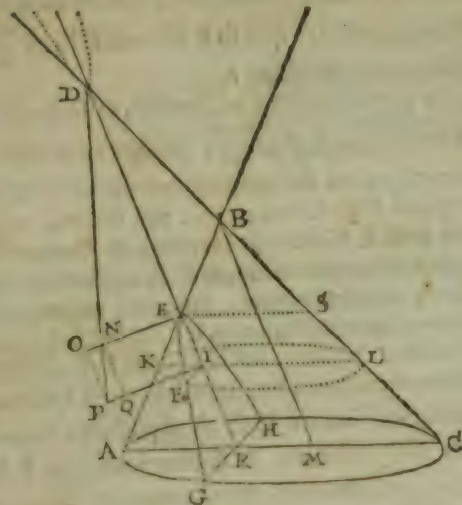
Mult.

 $\square FI$ fit  $\square KIL$   $\frac{ccd}{ab} x \propto y$ .

Hinc ſi fiat, ut  $a$  ad  $cc$ , hoc eſt, ut  $\square ABC$  ad  $\square AC$ , ita  $d$ , hoc eſt,  $EB$ , ad quartam, quæ ſit  $EN$ : erit  $EN \propto \frac{ccd}{ab}$ . Quæ ſi brevitatis cauſâ nominetur  $r$ , habebitur  $r x \propto y$ . Quod ipſum eſt, quod ab Apollonio eſt oſtenſum Theoremate 11<sup>mo</sup> primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodlibet, ſub rectâ  $EN$  ſeu  $r$  ſic inventâ, & diametri ſegmento  $EI$ , quod inter verticem ejus  $E$  & ordinatim adplicatam  $FI$  intercipitur, comprehenſum, eſſe æquale quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ  $FI$ .

Ubi notandum, lineam hanc inventam  $EN$  ſeu  $r$ , ab Apollonio vocari Latus rectum Parabolæ, vel etiam Lineam, juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum  $ED$  ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea Parameter appellatur. Quam porro lineam brevius obtinere licet, quàm hic cum Apollonio oſtendimus. Etenim lineâ  $ES$  exiſtente  $\propto \frac{cd}{a}$ , cum  $BC$  ſit ad  $CA$ , hoc eſt,  $b$  ad  $c$ , ſicut  $ES$ , hoc eſt,  $\frac{cd}{a}$ , ad  $EN \propto \frac{ccd}{ab}$ : inveniri poterit  $EN$ , quærendo tantùm ipſis  $BC$ ,  $CA$ , &  $ES$  quartam proportionalem. Quemadmodum ex oſtenſis eſt manifeſtum.

De



De HYPERBOLA, quæ est sectio coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ER, communis sectio trianguli per axem ABC & plani secantis GFEH, quæ & Sectionis diameter dicitur, extra ejus verticem E producta convenit cum uno laterum AB, BC ejusdem trianguli extra verticem coni B producto, ut hic in D; lineâ GH, quæ basis sectionis GFEH vocatur, ipsam AC, basin trianguli per axem, ad rectos angulos secante.

Sit  $AM \propto z$

$MB \propto b$

$MC \propto c$

$DE \propto q$

$EI \propto x$ , eritq;  $DI \propto q + x$

$FI \propto y$ .

Fiat propter similitudinem  $\Delta^{rum} CBM \& LDI$

ut  $BM$  ad  $MC$ , ita  $DI$  ad  $IL$

$$b - c - q + x \mid \frac{cq + cx}{b}$$

Rursus fiat propter similitudinem

$\Delta^{rum} MBA \& IEK$

ut  $BM$  ad  $MA$ , ita  $EI$  ad  $IK$

$$b - a - x \mid \frac{ax}{b}$$

Mult,

FI

$$\text{fit } \square LIK. \frac{acqx + acxx}{bb} \propto yy.$$

Dd

Hinc



Hinc si fiat, ut  $bb$  ad  $ac$ , hoc est, ut  $\square B M$  ad  $\square A M C$ , ita  $q$ , hoc est,  $D E$ , ad quartam, quæ sit  $E N$ : erit  $E N \propto \frac{acq}{bb}$ . Ipsa autem brevitatis causâ nominetur  $r$ .

Deinde fiat rursus, ut  $bb$  ad  $ac$ , hoc est, ut  $D E$  ad  $E N$ , ita  $x$ , hoc est,  $E I$  seu  $N Q$  ad  $Q P \propto \frac{acx}{bb}$ . Eritque  $rx + QP$  in  $x \propto yy$ . Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate duodecimo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ  $E N$  seu  $r$  sic inventâ, & diametri segmento  $E I$  seu  $x$ , quod inter ejus verticem  $E$  & ordinatim adplicatam  $F I$  interjicitur, comprehensum, unâ cum rectangulo  $N Q P$ , quod sub eodem diametri segmento  $E I$  vel  $N Q$ , & lineâ  $Q P$ , ad quam  $N Q$  eandem rationem habet, quam  $D E$  ad  $E N$ , continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ  $F I$  esse æquale.

Ubi notandum, lineam  $D E$  ab Apollonio vocari Latus transversum Hyperbolæ, & lineam inventam  $E N$  Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum  $E R$  ordinatim adplicantur, à Mydorgio verò hæc ipsa Parameter appellatur. Quæ porro linea facilius obtineri potest, hoc modo: Ductâ scilicet  $E S$  ipsi  $A C$  parallelâ, ac deinde ipsis  $B M$ ,  $M A$ , &  $S E$  quærendo quartam proportionalem  $E N$ . Etenim cum  $B M$  sit ad  $M C$ , hoc est,  $b$  ad  $c$ , sicut  $D E$ , hoc est,  $q$ , ad  $E S$ : erit  $E S \propto \frac{cq}{b}$ . Unde cum præterea  $B M$  ad  $M A$  sit, hoc est,  $b$  ad  $a$ , sicut  $E S$ , hoc est,  $\frac{cq}{b}$ , ad quartam  $\frac{acq}{bb}$ , quæ hic eadem est, quæ linea  $E N$  superiori modo inventa: manifestum est id, quod proponitur.

De  $E L L I P S I$ , quæ est sectio Coni  $A B C$  per planum  $G F E H$ , in quâ linea  $E R$ , communis sectio trianguli per axem  $A B C$  & plani secantis  $G F E H$  convenit cum utroque latere  $A B$ ,  $B C$  ejusdem trianguli in  $E$  &  $D$ ; lineâ  $G H$ , quæ basis sectionis  $G F E H$  vocatur, ipsam  $A C$ , basin trianguli per axem, eandemve productam, ad rectos angulos secante.

Esto





Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate decimotertio primi libri Conicorum, Ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ NE seu  $r$  sic inventâ, & diametri segmento EI seu  $x$ , quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam FI interjicitur, comprehensum, minus rectangulo NOP, quod sub eodem diametri segmento EI vel OP, & lineâ NO, ad quam OP eandem rationem habet, quam DE ad EN, continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ FI esse æquale.

Ubi notandum lineam ED, sectionis diametrum, ab Apollonio vocari Latus transversum ut & Diametrum transversam Ellipsis, & lineam inventam NE Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum ED ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea NE Parameter appellatur. Quæ porro linea, ut ante in Hyperbola, postquam linea ES ipsi AC ducta est parallela, brevius obtineri potest, si tantum ipsis BM, MA, & SE quæraturs quarta proportionalis: quandoquidem hæc semper eadem existit, quæ ipsa NE, inventa, ut supra. Sicut superius à nobis in Hyperbola est ostensum.

Ex his porro facillè liquet, quam inter se rationem habeant quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum in unaquaque harum trium sectionum. Etenim si in Parabolâ linea ED vocetur  $\zeta$ , & ordinatim adplicata GD vocetur  $v$ , erit, ut supra,  $\frac{cdz}{ab} \propto vv$ : ac proinde  $yy$  ad  $vv$ , hoc est,  $\square FI$  ad  $\square GD$ , ut  $\frac{cdx}{ab}$  ad  $\frac{cdz}{ab}$ , seu  $x$  ad  $\zeta$ , hoc est, EI ad ED. Hoc est, in Parabolâ quadrata ordinatim adplicatarum FI, GD inter se sunt, sicut lineæ EI, ED, quæ ab ipsis ex diametro ED ad verticem E abscinduntur. Quod ipsum est, quod docet Apollonius Prop<sup>o</sup> 20<sup>ma</sup> libri 1<sup>mi</sup> Conicorum.

Vide fig. 2. Eodem modo in Hyperbola & Ellipsi acceptâ pro EI aliâ  
& 3. magnitudine quàm ante, ut puta  $\zeta$ , erit in Hyperbolâ  $vv \propto \frac{acqz+aczz}{bb}$ , & in Ellipsi  $vv \propto \frac{acqz-aczz}{bb}$ . Unde  $yy$  ad  $vv$  in Hyperbola fit, ut  $\frac{acqz+acxx}{bb}$  ad  $\frac{acqz+aczz}{bb}$ , hoc est, ut  $qx+xx$  ad  $qz+\zeta\zeta$ ; at in Ellipsi, ut  $\frac{acqz-acxx}{bb}$  ad  $\frac{acqz-aczz}{bb}$ .

$\frac{acqx - acxz}{bb}$ , hoc est, ut  $qx - xx$  ad  $qz - zz$ . Hoc est, in Hyperbola & Ellipsi quadrata ordinatim adplicatarum inter se sunt, ut rectangula contenta lineis, quæ inter ipsas & vertices transversæ lateris interjiciuntur. Denique, quia in Hyperbola  $\square FI \propto \frac{acqx + acxz}{bb}$  est ad  $\square EID \propto qx + xx$ , ut  $ac$  ad  $bb$ ; similiterque in Ellipsi  $\square FI \propto \frac{acqx - acxz}{bb}$  ad  $\square EID \propto qx - xx$ , ut  $ac$  ad  $bb$ , hoc est, ut  $NE$  ad  $ED$ : patet in utrâque figurâ quadrata ordinatim adplicatarum  $FI$  esse ad rectangula  $EID$ , quæ sub rectis  $EI$ ,  $ID$ , inter  $FI$  & vertices transversæ lateris  $E$ ,  $D$  interceptis, comprehenduntur, ut figuræ rectum latus  $NE$  ad transversum  $ED$ . Omnino ut habet Prop<sup>o</sup> 21<sup>ma</sup> libri 1<sup>mi</sup> Conicorum Apollonii. Eadem est ratio in Circulo, qui non nisi certa Ellipsis species censenda est, quippe in qua rectum latus & transversum sunt æqualia.

Ostensis igitur quo pacto Cono dato, eoque secto, ita ut sectio Parabola, Hyperbola, vel Ellipsis existat, sectionis sive figuræ hujus latera inveniri queant: restat ut e contra ostendamus, quâ viâ Conus inveniri possit, & in eo unaquæque trium harum figurarum exhiberi, cujus latera sint datis rectis lineis æqualia.

Ut ad inveniendum Conum  $ABC$ , in eoque sectionem vide fig. 1.  $GFEH$ , quæ Parabola appellatur, cujus latus rectum sit  $\propto \frac{oz}{a}$ , ratio  $\frac{cd}{ab} \propto \frac{oz}{a}$  seu  $\frac{boz}{ab}$ , & sit rejecto  $ab$ , communi denominatore,  $cd \propto boz$ . Hoc est, diviso utrobique per  $cc$ , erit  $d \propto \frac{boz}{cc}$ . Hinc assumpto triangulo quolibet  $ABC$ , cujus latera sint,  $AB \propto a$ ,  $BC \propto b$ , &  $AC \propto c$ , si in ipso sumatur  $EB \propto \frac{boz}{cc}$ , atque ex  $E$  ducatur  $ED$  ipsi  $BC$  parallela: erit  $AC$  diameter circuli sive basis Coni, &  $ABC$  triangulum per axem. Ac proinde si per  $D$  in plano basis hujus Coni ipsi  $AC$  ad rectos angulos ducatur  $GH$ , atque per rectas  $GH$ ,  $DE$  sectio instituitur, faciens in superficie Conica curvam lineam  $GFEH$ : erit hæc ipsa Parabola, cujus latus rectum  $NE$  sit data  $\frac{oz}{a}$  æqualis, quemadmodum requirebatur. Quod si verò ipsa talis præterea exhiberi debeat, ut rectæ  $FI$ , quæ semper ipsi  $GH$  parallela intelli-



guntur, in dato angulo ad diametrum ED adplicentur, opus tantum erit angulum GDE sive EDH dato æqualem efficere, intelligendo ad id circulum AGCH moveri circa AC, tantquam axem, eritque Problemati ex omni parte satisfactum.

Vide 2.

& 3. fig. Similiter ad inveniendum Conum ABC, & in eo sectionem GFEH, quæ sit vel Hyperbola vel Ellipsis, cujus latus rectum

$$\text{sit } \propto \sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ \& transversum } \propto \sqrt{\frac{aa00mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{ppzz}};$$

$$\text{facio } \frac{acq}{bb} \propto \sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ \& } q \propto \sqrt{\frac{aa00mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{ppzz}}.$$

$$\text{Hoc est, assumptis horum quadratis, erit } \frac{aacqq}{b^4} \propto \frac{00zz + 4mpzz}{aa},$$

$$\text{\& } qq \propto \frac{aa00mm + 4aam^3 p}{ppzz}. \text{ Adeoque si in termino } \frac{aacqq}{b^4} \text{ pro}$$

$$qq \text{ hic numerus substituat, habebitur } \frac{a^4ccqmm + 4a^4ccm^3 p}{b^4 ppzz} \propto \frac{00zz + 4mpzz}{aa}.$$

$$\text{Hoc est, multiplicato per crucem, erit } \frac{a^6cc00mm + a^6ccm^3 p}{00ppzz + 4mp^3zz} \propto b^4 + 00ppzz^4 + 4b^4 mp^3zz^4; \text{ \& fit,}$$

$$\text{si utrinque per } 00ppzz^4 + 4mp^3zz^4 \text{ dividatur,}$$

$$\frac{a^6cc00mm + 4a^6ccm^3 p}{00ppzz + 4mp^3zz} \text{ seu } \frac{a^6ccmm}{ppzz} \propto b^4. \text{ Unde, extrahendo}$$

$$\text{utrobique radicem biquadratam, invenitur } \sqrt{\frac{a^3cm}{ppzz}} \propto b. \text{ Hinc}$$

$$\text{assumptis ad libitum duabus lineis AM \& MC, iisque in directum seu in unam lineam posit, quarum major AM sit } \propto a, \text{ \&}$$

$$\text{minor MC } \propto c, \text{ duc ex M in angulo quocunque rectam MB}$$

$$\propto \sqrt{\frac{a^3cm}{ppzz}}, \text{ jungoque BA \& BC; ita ut habeatur triangulum}$$

$$\text{per axem ABC, cujus basis AC diametrum circuli referat, qui Coni basis existit, \& punctum B verticem ipsius Coni. Deinde}$$

$$\text{producta BC, ad Hyperbolam obtinendam, inter angulum ABD}$$

$$\text{pro utrâque figurâ aptanda erit recta ED } \propto \sqrt{\frac{aa00mm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{ppzz}};$$

$$\text{ita ut ipsa parallela sit lineæ BM, (quod facile est,) continuataque}$$

$$\text{occurrat rectæ AM in R. Quibus sic posit, si per R in plano}$$

$$\text{basis hujus Coni ipsi AM ad rectos angulos ducatur GH, atque}$$

$$\text{per rectas GH, RE sectio instituatur, faciens in superficie conica}$$

$$\text{curvam lineam FE: erit hæc ipsa Hyperbola vel Ellipsis quæ sita,}$$

$$\text{hoc est, cujus rectum latus est } \propto \sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ \& transver-}$$

sum

sum  $\propto \sqrt{\frac{a^2 b^2 m^2}{p^2 q^2} + \frac{4 a^2 b^2 m^2}{p^2 q^2}}$ . Quòd si verò insuper tales exhibenda sint, ut recta  $EL$ , quæ semper ipsi  $GH$  parallelæ intelliguntur, in dato angulo ad diametrum  $ER$  applicentur, oportet tantum (ut ante in Parabola) angulum  $GRE$  sive  $ERH$  dato æqualem efficere, intelligendo ad id planum basis hujus Coni esse mobile circa  $AM$ , tanquam axem: eruntque sic conditiones quæstionis omnes adimpletæ, ita ut his primo, secundo, & tertio Problematis primi libri Conicorum Apollonii satisfactum putem: Quorum quidem omnium veritas ex præcedentibus fit manifesta.

Eodem modo reliquos casus Ellipseos & Hyperbolæ, in quibus latera recta & transversa alias quantitates ab his diversas sortiuntur, qualesque eas in antecedentibus determinare docuimus, persequi licet.

Denique ut appareat, quâ ratione Propositiones de Hyperbolæ Asymptotis agentes, de quibus Apollonius secundo atque sequentibus Conicorum libris multas egregias proprietates demonstravit, inventæ fuerint, sequentia protulisse juvabit.

Sit





COMMENTARII IN LIBRUM II. 217

Fiat propter similitudinem  $\Delta^{rum}$  BMA & ERA  
ut BM ad MA, ita ER ad RA

$$b \text{ — } a \text{ — } \chi \quad / \quad \frac{az}{b}$$

Rurfus fiat propter similitudinem  $\Delta^{rum}$   
BMC & DRC

ut BM ad MC, ita DR ad RC

$$b \text{ — } c \text{ — } q + \chi \quad / \quad \frac{cq + cz}{b}$$

} add.

$$C.A. \frac{az + cz + cq}{b} \propto a + c$$

$$\frac{a\chi + c\chi + cq \propto ab + cb}{a\chi + c\chi \propto ab + cb - cq}$$

$$\chi \propto \frac{ab + cb - cq}{a + c}$$

$$\text{Ad R C. } \frac{cq + cz}{b}$$

$$\text{adde X C. } s - c$$

Fiat propter similitudinem  
 $\Delta^{rum}$  XMB & XRA.

XM MB

$$s \text{ — } b \text{ — } \text{XR.}$$

$$\frac{cq + cz + bs - bc}{b}$$

Ra

$$/ \text{ ad } s + \chi$$

Eritque, per 16.  
6<sup>a</sup> Elem.  $\frac{sf + rz \propto cq + cz + bs - bc}{sf + rz - bs \propto cq + cz - bc}$

$$s \propto \frac{cq + cz - bc}{sf + rz - bs} \propto \frac{zac}{a - c}$$

$$\frac{aq + az - ab - cq - cz + cb \propto sf + az - ab}{ab + cb + aq - cq - af \propto az + cz}$$

$$\frac{ab + cb - cq}{a + c} \propto \frac{ab + cb + aq - cq - af}{a + c} \propto \chi$$

$$\frac{ab + cb - cq \propto ab + cb + aq - cq - af}{a + c} \propto \chi$$

$$\frac{ab + cb - cq \propto ab + cb + aq - cq - af}{a + c} \propto \chi$$

$$^2 af \propto aq$$

fit  $aE \propto sf \propto \frac{1}{2}q$ . Id quod ostendit, rectas, quæ oppositarum sectionum Asymptoti dicuntur, in medio transversæ lateris DE se invicem decussare. Ubi etiam patet, angulos, quos comprehendunt, angulo verticis trianguli TBV, cui planum harum sectionum æquidistat, esse æquales.

Ee

Fiat



Fiat propter similitudinem  $\Delta^{\text{rum}}$  BMV & aRY

$\square \text{BM} \square \text{MV}$ $bb - ac$	$\square \text{aE}$ $\frac{1}{4}qq$ $\square \text{aI}$ $\frac{1}{4}qq + qx + xx$ $\square \text{aR}$ $\frac{1}{4}qq + qz + zz$	$\square \text{Eb}$ $\frac{1}{4}acq$ $\square \text{Id}$ $\frac{1}{4}acq + acqx + acxx$ $\square \text{RY}$ $\frac{1}{4}acq + acqz + aczz$	<p>A quo subducto <math>\square^{\text{to}}</math> IF, ante invento, <math>\infty</math>  <math>\frac{acqx + acxx}{bb}</math>, relinquetur, per 5.  <math>2^{\text{di}}</math> Elem., <math>\square \text{Ed} \infty \frac{1}{4}acq</math>.</p> <p>A quo subducto <math>\square^{\text{to}}</math> RG, ante invento, <math>\infty</math>  <math>\frac{acqz + aczz}{bb}</math>, relinquetur, per 5.  <math>2^{\text{di}}</math> Elem., <math>\square \text{ZGY} \infty \frac{1}{4}acq</math>.</p>
--	--	---	--

Jam cum  $\square \text{Eb}$ ,  $\square \text{Ed}$ , &  $\square \text{ZGY}$  singula sint inventa  $\infty \frac{1}{4}acq$ , constat ipsa inter se esse æqualia. Eadem est ratio de quibuscunque aliis hujusmodi rectangulis, in infinitum assumptis. Quod ipsum est, quod docet Prop<sup>tio</sup> 10. 2<sup>di</sup> libri Conicorum Apollonii.

Porro, quoniam  $\frac{1}{4}acq$  est  $\frac{1}{4}$  pars rectanguli sub latere transverso DE  $\infty q$  & latere recto NE, ante invento,  $\infty \frac{acq}{bb}$ , manifesta hinc etiam est Prop<sup>tio</sup> 1<sup>ma</sup> ejusdem libri.

Præ-

Præterea supponatur  $\epsilon$  E vel  $E b \propto e$

*e F ∞ f, crit'que*

$$F d \propto \frac{e^2}{f}$$

$g \propto g$

 $EF \propto b$ 

$Fh \propto i$ , erit que

$$Eh \propto h + i$$

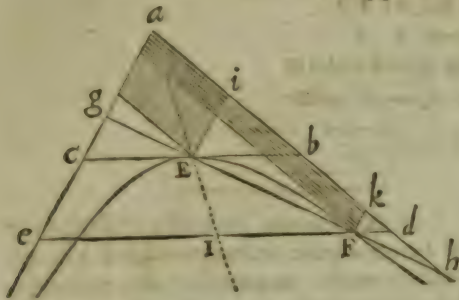
E i x k.

1830

F k 30 m

&  $xk \in n$ , erit que

ikoo n - l.



Tum fiat propter similitudinem  $\Delta$ lorum  $egE$  &  $egF$

ut  $gE$  ad  $Ee$ , ita  $gF$  ad  $Ff$

$$g \xrightarrow{e} g+h \quad f$$

Eritque per 15. 6<sup>a</sup> Elem.  $\frac{gf \propto eg + eb}{gf - ge \propto eb}$

Rursus fiat propter similitudinem  $\Delta$  <sup>lorum</sup>  $F d h$  &  $E b b$

ut  $Fb$  ad  $Fd$ , ita  $Eb$  ad  $Ed$

$$i = \frac{ee}{f} = b + i \quad e$$

Eritque per 16. 6<sup>ta</sup> Elem.  $i \propto \frac{eb+ei}{f}$   
 $\frac{f}{f \propto eb+ei}$

Et fit  $g f - g e \propto f i - e i \propto e h$

Id est, dividendo utrinque per  $f - e$ , erit  $gxi$ . Hoc est,  $gE$  est  
 æqualis  $Fb$ . Eadem est ratio de recta  $EF$ , quomodocunque per  
 duo quælibet alia puncta in Hyperbolâ ducta, & utrinque Asym-  
 ptotis terminata. Id quod cum octava convenit Propositione se-  
 cundi libri Conicorum Apollonii.

Ad huc fiat propter parallelas  $Ei$  &  $Fk$

ut  $gE$  ad  $EF$ , ita  $ai$  ad  $ik$

$$g \text{ --- } h \text{ --- } l / n \text{ --- } l$$

Eritque per 16. 6<sup>u</sup> Elem.  $g^n - g l \propto h l$

Hoc est, in locum  $g$  substituto  $i$ , habebitur  $in - il \propto hl$ , & fit

$$h \propto \frac{n-1}{l}.$$

Ec 2

Deni-



Denique fiat propter similitudinem  $\Delta$ lorum  $Eih$  &  $Fkb$ ut  $Ei$  ad  $Eh$ , ita  $Fk$  ad  $Fb$ 

$$k - h + i - m \mid i$$

Eritq; per 16. 6<sup>ti</sup> Elem.  $ki \propto hm + im$ 

$$\text{vel } ki - mi \propto hm$$

$$\& \text{ fit } h \propto \frac{ki - mi}{m} \propto \frac{in - il}{l}$$

$$kl - ml \propto mn - ml$$

&  $kl \propto mn$ . Hoc est, rectangulumsub  $Ei$  &  $ia$  est æquale rectangulo sub  $Fk$  &  $ka$ .

Id quod eodem modo de omnibus aliis rectangu-

lis, sub similibus lineis comprehensis, manife-

stum est; prout nimirum ad hoc præter puncta

 $E$  &  $F$  alia quævis in Hyperbola assumpta fuerint.

Quibus haud dissimilia sunt ea, quæ Apollonius

demonstravit Prop<sup>ne</sup>. 12<sup>ma</sup> libri 2<sup>di</sup> Conicorum.

Unde demum facile est inferre, cum puncta hæc ulterius at-

que ulterius semper in Hyperbola assumi possint, ac inde uno la-

tere horum rectangulorum continuè accrescente latus alterum

ipsorum perpetuò decrescat; quòd idcirco Asymptoti  $ab$ ,  $ac$ , &

Hyperbola  $EF$  in infinitum productæ ad se ipsas propiùs acce-

dant, & ad intervallum perveniant, minus quolibet dato inter-

vallo. Quibus & illa quadrant, quæ ab Apollonio Prop<sup>bis</sup> 1<sup>ma</sup> &

14<sup>ta</sup> ejusdem libri sunt ostensa.

Cæterùm quoniam D<sup>nm</sup> des Cartes universim iis tantùm pro-

positionibus usus fuisse videtur, quæ non nisi proprietates decla-

rant, quæ cum subjecto suo omnimodè reciprocantur, & à Logi-

cis proprietates 4<sup>ti</sup> modi appellari solent: visum fuit hoc loco

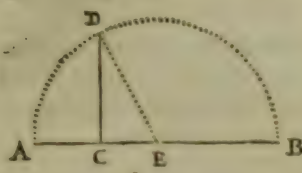
deinceps modum, quo cognosci possunt, qualem eum eruditis-

simus atque ingeniosissimus Vir-Juvenis D. Johannes Hudde-

nus, Amstelodamensis, Gerh. fil. excogitavit, per unum aut al-

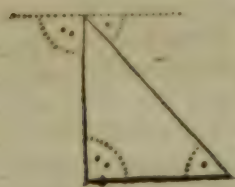
terum exemplum exponere.

Ut



Ut ad inquirendum, utrum proprietas circuli, quæ declarat, quadrata ordinatim applicatarum ad diametrum esse æqualia rectangulis sub segmentis diametri, cum circulo sit reciproca nec ne: supponatur recta AB, & in eam perpendicularis CD, hanc habens proprietatem, ut quadratum super ipsâ sit æquale rectangulo sub segmentis AC, CB. Quæritur qualis sit linea ADB.

Ad quod investigandum, sectâ AB bifariam in E, ponatur AE vel EB  $\propto a$ , CE  $\propto x$ , & CD  $\propto y$ : eritque AC  $\propto a - x$ , & CB  $\propto a + x$ . Jam cum AC multiplicatâ per CB proveniat  $aa - xx$ , pro rectangulo ACB; hocque ex data proprietate æquetur quadrato ex CD: erit  $aa - xx \propto yy$ . Deinde, quoniam, lineâ CD perpendiculari existente super AB, quadratum ex ED, per 47 Primi Elementorum Euclidis, est æquale duobus quadratis ex EC & CD: erit quadratum ex ED  $\propto xx + yy$ . Ac proinde si in hac summa pro  $yy$  subrogetur  $aa - xx$ , habebitur quadratum ex ED  $\propto aa$ , hoc est, ED  $\propto a$ . Id quod ostendit, rectis AE, ED, & EB singulis ipsi  $a$  æqualibus existentibus, lineam ADB esse circulum, cujus centrum E, ac idcirco proprietatem allegatam cum circulo esse reciprocâ. Quod ipsum & hoc modo cognosci potest. Advertendo scilicet, utrum proprietas proposita sine necessariâ subiecti inclusione demonstrari possit nec ne. Si enim ea absque necessariâ subiecti inclusione demonstrari nequeat, proprietas erit reciproca; sin secus, proprietas communis.



Ut ad intelligendum, num proprietas hæc cum triangulo rectangulo sit reciproca, nimirum: tres angulos simul sumptos æquales esse duobus rectis: advertendum tantummodo est, utrum demonstratio illius triangulum rectangulum præsupponat nec ne; ac proinde cum ipsa absque ulla discretione in quolibet triangulo locum obtineat, concludendum est



est eandem non nisi pro communi trianguli rectanguli proprietate esse habendam.

Ita etiam considerando demonstrationem supradictæ proprietatis circuli, quoniam ipsa radiorum æqualitatem, in quâ circuli natura consistit, omnino exposcit, convincitur eandem proprietatem soli circulo competere ac cum eodem reciprocari.

Similiter, si quis naturam demonstrationis perpendat, quâ ostenditur, quadrata ordinatim applicatarum inter se esse, sicut rectangula sub segmentis diametri: comperietur, eandem demonstrationem radiorum æqualitatem non includere, adeoque proprietatem hanc non nisi communem proprietatem circuli existere: quandoquidem & Ellipsi, cujus Circulus non nisi speciem refert, omnino convenit.

Sed & usum horum perpendere, cum in universa Mathesi haud exigui sit momenti, non inutile fuerit sequentia, quibus eundem quadantenus indicasse existimamus, in medium afferre.

Primo itaque, postquam in quærenda æquatione proprietas reciproca adhibita fuit, certi sumus totam subjecti naturam hæc ratione in ea esse inclusam; adeoque, ad aliam adhuc æquationem à præcedenti diversam obtinendam, non licere ut ad id alia ejusdem subjecti proprietas adhibeatur, nisi accedat aliquid, quod in præcedenti æquatione nondum sit involutum: quandoquidem sic circulum committi manifestum est.

2<sup>do</sup>, Theoremata omnia, quæ necessitatem subjecti inferunt ex proprietate jam ostensâ, (ut, verbi gratiâ, Prop. 48 primi libri Elementorum) quæque ut plurimum indirectè per deductionem ad absurdum demonstrari solent, possunt directè demonstrari, dummodo ostendatur, proprietatem illam cum subjecto suo esse reciprocam.

3<sup>io</sup>, Si quis ad solvenda Problemata naturam subjecti retinere velit, commodissimè id præstare poterit, retinendo tantum proprietatem aliquam, cum eodem subjecto reciprocam, quæ aut omnium facillimè memoriæ mandari queat aut etiam simplicissima existat: cum minimè necessum sit, ut is retinendis omnibus illius Theorematis aggravetur, quippe quæ omnia Geometriæ hujus Methodo certâ arte ex hujusmodi proprietate deducuntur.

4<sup>to</sup>, Hinc etiam perspicuum est, quàm parùm necesse sit, libros, qui Theorematis referti sint, conscribere, quæ aut usum nullum

lum habent, aut difficulter retineri possunt, aut etiam beneficio alicujus facilioris sive simplicioris proprietatis reciproca è natura subiecti sui nullo negotio eruuntur.

Nimirum si latus hocce rectum statuatur  $\sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$ , D  
 transversum erit  $\sqrt{\frac{aaomm}{ppqq} + \frac{4aam^3}{pqq}}$ .] Qui termini hoc  
 etiam pacto scribi possunt  $\frac{z}{a} \sqrt{00 + 4mp}$ , &  $\frac{am}{p} \sqrt{00 + 4mp}$ ,  
 quemadmodum postea in demonstratione pag. 33 à Domino des  
 Cartes sunt assumpti. Similiter, si habeatur, ut paulò superius,  
 $\sqrt{\frac{00zz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$ : poterit ejus loco scribi  $\frac{z}{a} \sqrt{00 - 4mp}$ . Eo-  
 dem modo cum habetur  $\sqrt{\frac{4a+m^4}{ppqq} - \frac{a^4omm^3}{p^3q^4}}$  (ut paulò post pa-  
 gin. 31): possumus ejus loco scribere  $\frac{am}{p} \sqrt{4mm - \frac{4omm}{p}}$ , tol-  
 lendo scilicet ex signo radicali quicquid est rationale. Haud secus  
 fit, cum pro  $\sqrt{\frac{3a}{bb}}$  scribitur  $\frac{a}{b} \sqrt{3}$ . Quæ scribendi ratio non in-  
 eptè quoque ad radicum commensurabilium species sive opera-  
 tiones adhiberi potest. Ut, ad addendum  $\sqrt{27}$  ad  $\sqrt{75}$ : quoniam  
 $3\sqrt{3}$  idem est quod  $\sqrt{27}$ , &  $5\sqrt{3}$  idem quod  $\sqrt{75}$ , hinc sum-  
 ma earum erit  $8\sqrt{3}$ , & differentia  $2\sqrt{3}$ , productum verò multi-  
 plicationis  $15, 3$  seu  $45$ ; & quotiens ex divisione majoris per mi-  
 norem  $\frac{1}{3}$  seu  $1\frac{2}{3}$ . Sic ad multiplicandum  $\frac{8}{27\sqrt{3}}$  per  $3\sqrt{3}$ , divido  
 $27\sqrt{3}$  per  $3\sqrt{3}$ , seu, quod idem est,  $27$  per  $3$ , & fit productum  $\frac{8}{9}$ .  
 Similiter ad dividendum fractiones  $\frac{2}{3}$ ,  $1$ , &  $\frac{1}{3}$  per  $\sqrt{3}$ , multiplico  
 earum denominatores per  $\sqrt{3}$ , & fiunt quotientes  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , &  
 $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ , seu  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ,  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ , &  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ , perinde enim est sive hoc sive illo  
 modo scribantur. Idem de sequentibus formulis, quas hic sub-  
 jungere visum fuit, intellige. Ut si habeatur  $\sqrt{ac}$ , ejus loco scri-  
 bere possumus  $a\sqrt{\frac{c}{a}}$ , vel  $c\sqrt{\frac{a}{c}}$ . Et si habeatur  $\frac{ab}{\sqrt{ac}}$ , scribi ejus  
 loco potest  $b\sqrt{\frac{a}{c}}$ ; adeò ut, si habeatur  $\frac{acc+aa^3}{2\sqrt{aa+cc}}$ , ejus loco sub-  
 stitui possit  $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$ . Ita pro  $b\sqrt{\frac{ac}{bb}}$  ponere licet  $\sqrt{ac}$ , nec  
 non

Vide pag.

75. lin.

penult. &  
ult.

Vide pag.

76. lin. 7.

Vide pag.

82. lin. 18



non pro  $2b\sqrt{\frac{cbb}{a}}$  reponere  $\frac{2bb}{a}\sqrt{ac}$ . Similiter pro  $d + \frac{bb-bd}{b+d}$  scribi potest  $\frac{dd+bb}{b+d}$ . Sic etiam loco  $d + \frac{bb}{b+d}$  scribi potest  $b + \frac{dd}{b+d}$ : cum sub eodem denominatore reducti faciant  $\frac{bb+bd+dd}{b+d}$ . Et denique pro  $\frac{c}{\sqrt{c}} - \frac{a}{\sqrt{a}}$  scribere possumus  $\frac{c-a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$  vel  $\sqrt{c} - \sqrt{a}$ . Et sic de aliis, ut passim in hisce commentariis est videre.

E *Sed si sectione Hyperbolæ existente &c.*] Notandum hîc, applicatam esse Hyperbolam ei linearum positioni, cui postea Circulum quadrare ab Authore ostenditur. Quod tam perspicuitatis quàm brevitatis studio factum; quandoquidem ea, cum literæ A, B, C, D, &c. in iisdem omnium figurarum locis reperiuntur, quæ ibidem scripsit, sic facilius intelligi possunt, quàm si nunc in uno, nunc in alio essent quærendæ.

Etenim cum requiritur, ut productum, quod oritur ex multiplicatione CB per CF, æquale sit ei, quod fit ex ductu CD in CH, oportet lineam illam curvam transire per quatuor intersectionum puncta datarum linearum: nimirum, per intersectionem A, linearum DA, AB (quoniam eo casu lineæ BC & CD nullæ sunt, ac proinde singulæ, in singulas ex reliquis ductæ, nihil producunt), & per intersectionem G linearum AB, GH, (quo casu lineæ CH & CB nullæ sunt): nec non per utramque reliquam, utpote ipsarum FE, GH (quo casu CF & CH nullæ sunt), & ipsarum DA, EF (quo casu CD & CF nullæ sunt), quæ in hac figura non sunt expressæ, sed in Circulo observatæ apparent. Unde, cum D<sup>nus</sup> des Cartes, brevitati studens, referre voluerit casus omnes ad unum exemplum, figuræ nempe pag. 12. mirum videri non debet, quòd, postquam hujus exempli locum Circulum esse ostendit, nec in quæstione quicquam mutavit, eidem linearum positioni non Hyperbola sicut Circulus responderit. Nec etiam hinc ullus sequitur error, quandoquidem tota quæstio nondum determinata existit, sed pagin. 33 primò determinatur. Quippe fieri potest, ut, paucis in ea mutatis, eidem linearum positioni, cui Circulus competit, quadret Hyperbola; & quidem Hyperbola, quæ non transeat per ulla datarum linearum intersection-

sectiones. Ut, exempli causâ, si rectangulum ex FC in CD debeat esse majus, quàm rectangulum ex CB in CH, datâ quâdam quantitate, vel aliud quid simile: sequitur eam sic applicari posse, ut, manentibus literis I, K, L, B, C, D, &c. suis locis, ea pauca, quæ de Hyperbola asserre voluit, facilius intelligantur, quàm si figura mutata fuisset.

Ejusdem brevitatis studio nulla etiam hic mentio fit oppositarum Hyperbolarum, non quòd ab Authore ignorentur, utpote qui paulò post pag. 37. quatuor lineas Hyperbolæ affines, inter se oppositas, exhibuit: Sed quòd faciliora ferè semper in hac Geometria neglexerit. In difficilioribus certè, quæ tractanda suscepit, nihil omisit. Atque idcirco hic maluit eam linearum positionem exhibere, cui conveniret Circulus, quam cui competere Ellipsis, aut Hyperbola, quia ejus inventio peculiarem habet difficultatem.

*Quippe hæc loca nihil aliud sunt, quàm cum in questione aliqua est inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipsa prorsus sit determinata.* ] Nimirum, ubi ad inveniendum illud punctum duas supponere oportet lineas incognitas, & materia tantum pro una æquatione suppetit. Ut in hoc exemplo, ubi ad determinandum punctum C, duæ supponendæ sunt incognitæ lineæ AB & BC; quarum una ostendat, ad quod punctum lineæ AB duci debeat recta BC in dato angulo; & altera, ubi nam illud ipsum in eadem recta sit sumendum. Ubi porro, postquam conditiones omnes sunt adimpletæ, inventa est æquatio

$$xy - \frac{dckzx}{+efglz} y - \frac{dezzx}{+efgzx} y + \frac{bcfglx}{-bcfgxx} = 0$$

rates incognitas  $x$  &  $y$ . Adeò ut, cum in ipsâ una deficit conditio ut sit prorsus determinata, quantitatem aliquam cognitam pro arbitrio assumere liceat pro incognita  $x$ , cui non respondet aliqua æquatio, atque tot inde invenire puncta C, quot ipsi radici  $x$  tribuerimus diversos valores.

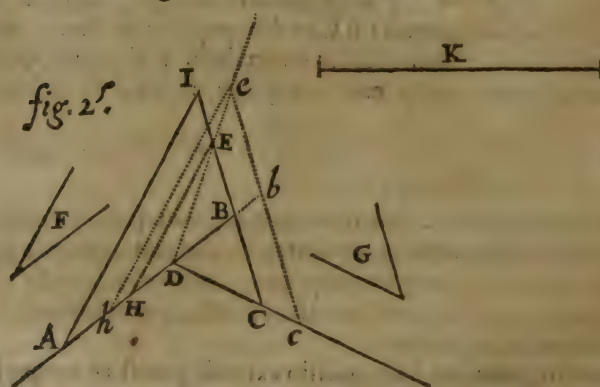
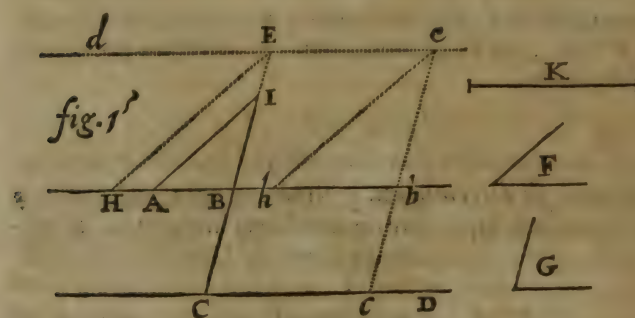
Cæterum quoniam hæc questio extendi potest ad omnes lineas curvas, quæ sub calculum cadunt, atque in Geometriam recipi possunt: ita ut nulla sit linea curva primi generis, quæ ad illam non sit utilis, quando in quatuor lineis proponitur: nec ulla



secundi, quando in 8 lineis: nec ulla tertii, quando in 12 lineis est proposita, atque ita porro: placuit hic quoque subungere casum, quando in duabus tantum lineis est proposita, qui quidem omnium simplicissimus existit.

*Locus ad  
duas lineas.*

Datis positione duabus rectis lineis  $AB$ ,  $CD$ , inter se parallelis, aut concurrentibus in puncto  $D$ ; punctum extra ipsas invenire, ut  $E$ , à quo si in datis angulis  $F$  &  $G$  ad positione datas  $AB$ ,  $CD$ , duæ ducantur rectæ lineæ  $EH$ ,  $EC$ , ipsæ datam inter se habeant rationem  $r$  ad  $f$ .



Supponantur anguli  $BAI$ ,  $DCB$  æquales angulis  $F$ ,  $G$ ; & con-

concurrant rectæ  $AI$ ,  $CB$ , (ubique hosce æquales angulos ad positione datas constituentes) in punctum  $I$ . Deinde ratio, quam  $HE$  ad  $EC$  servare debet, detur ut  $AI$  ad  $K$ , vel si non ita detur, ad hanc formam reducatur.

*Resolutio.* Puta factum esse, quod quæritur, ponaturque  $BC \propto q$ ,  $AI \propto r$ ,  $K \propto f$ ,  $BI \propto t$ , &  $BE \propto x$ . Unde, cum propter triangulorum  $BIA$ ,  $BEH$  similitudinem,  $BI$  sit ad  $IA$ , hoc est,  $t$  ad  $r$ , sicut  $BE$  seu  $x$  ad  $EH$ , erit  $EH \propto \frac{rx}{t}$ . Deinde quoniam  $AI$  est ad  $K$ , hoc est,  $r$  ad  $f$ , sicut  $HE$  ad  $EC$ , sive  $\frac{rx}{t}$  ad  $q + x$ : erit productum sub extremis  $rq + rx$ , æquale producto sub mediis  $\frac{r^2x}{t}$ .

Ac proinde si utrinque dividatur per  $r$ , atque multiplicetur per  $t$ , æquatio erit  $fx - tx \propto tq$ . Hoc est, revocatâ æqualitate ad proportionem, erit ut  $f - t$  ad  $t$ , ita  $q$  ad  $x$ . Unde talis emergit *Constructio*. Fiat, ut excessus, quo  $K$  excedit  $BI$ , ad  $BI$ ; ita  $BC$  ad  $BE$ . Tum per  $E$  ducatur  $Ed$  ipsi  $AB$  seu  $CD$  parallela (ut in prima fig.); aut ex  $D$  per  $E$  agatur recta  $DE$  indefinite (ut in secunda fig.): Dico si ex quolibet ejus puncto, ut  $e$ , ad positione datas  $AB$ ,  $CD$ , dux ducantur rectæ lineæ  $eh$ ,  $ec$  in datis angulis  $F$  &  $G$ , hoc est, ipsis  $AI$ ,  $IC$  parallelæ, dictas lineas datam inter se rationem servaturas, hoc est,  $he$  fore ad  $ec$ , sicut  $AI$  ad  $K$ , seu  $r$  ad  $f$ .

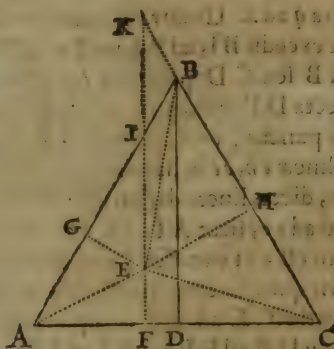
*Demonstratio.* Quoniam enim est, ut excessus, quo  $K$  excedit  $BI$ , ad  $BI$ , ita  $BC$  ad  $BE$ : erit quoque componendo  $K$  ad  $BI$ , sicut  $CE$  ad  $EB$ . Unde cum ratio  $CE$  ad  $EB$  composita sit ex ratione  $CE$  ad  $EH$ , & ex ratione  $HE$  ad  $EB$  seu  $AI$  ad  $IB$ : erit quoque ratio  $K$  ad  $BI$  ex eisdem rationibus composita. Eodem modo, quoniam item ratio  $K$  ad  $BI$  componitur ex ratione  $K$  ad  $AI$ , & ex ratione  $AI$  ad  $IB$ : erit ratio composita ex ratione  $CE$  ad  $EH$ , & ex ratione  $AI$  ad  $IB$ , eadem cum ratione, quæ componitur ex  $K$  ad  $AI$ , & ex  $AI$  ad  $IB$ . Quare si communis auferatur ratio  $AI$  ad  $IB$ , erit quoque reliqua ratio  $CE$  ad  $EH$  eadem reliquæ rationi  $K$  ad  $AI$ , seu  $f$  ad  $r$ . Quod erat faciendum. Eadem est ratio ubicunque tandem in recta  $dE$  punctum  $e$  assumatur. Unde manifestum fit, punctum quæsitum  $e$  rectam lineam contingere  $DE$ , positione datam, ac proinde in loco plano esse. Omitto reliquos hujus quæstionis casus, cum à quovis ad horum imitationem facile construi possint.



**G** At verò duabus conditionibus deficientibus ad huius puncti determinationem, locus, in quo illud reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut Sphærica, aut magis composita esse potest. ] Quæ verba, ut rectè intelligantur, exemplis sequentibus illustrare conabimur.

Locus ad  
Superficiem.

Dato triangulo æquilatèro ABC, à cuius vertice B ad basin AC demissa sit perpendicularis BD: oporteat intra ipsum invenire punctum, ut E, à quo si ad opposita latera deducantur perpendiculares EF, EG, & EH, ipsæ simul sumptæ æquantur perpendiculari BD.



Factum jam sit, & producta FE, usque dum fecerit latus AB in I, BC verò productum in K; ponatur AD seu DC  $\propto a$ , DB  $\propto b$ , AF  $\propto x$ , & FE  $\propto y$ . Hinc cum similia sint triangula ADB, & AFI, erit sicut AD ad DB, hoc est,  $a$  ad  $b$ , ita AF seu  $x$  ad FI; quæ ideo erit  $\frac{bx}{a}$ . E qua si auferatur FE  $\propto y$ , relinquetur EI  $\propto \frac{bx}{a} - y$ . Si-

militer, quoniam similia sunt triangula CDB & CFK, erit CD ad DB, hoc est,  $a$  ad  $b$ , ut CF seu  $2a - x$  ad EK; quæ ideo erit  $2b - \frac{bx}{a}$ . E qua si auferatur FE  $\propto y$ , restabit EK  $\propto 2b - \frac{bx}{a} - y$ . Eodem modo cum, propter similitudinem triangulorum ADB, EGI, AB sit ad AD, hoc est,  $2a$  ad  $a$ , seu  $2$  ad  $1$ , sicut IE seu  $\frac{bx}{a} - y$  ad EG; erit EG  $\propto \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$ . Non secus, cum similia sint triangula EKH & DBC, erit ut BC ad CD, hoc est,  $2a$  ad  $a$ , seu  $2$  ad  $1$ , ita EK seu  $2b - \frac{bx}{a} - y$  ad EH; quæ ideo erit

erit  $b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$ . Adeoque si addantur perpendiculares inventæ EF, EG, & EH, erit earum summa  $b$ , æqualis  $b$ , perpendiculo trianguli ABC.

Ubi patet, quod, postquam incidimus in æquationem, in qua ab utraque parte reperitur eadem quantitas, quæstio proposita non sit Problema, sed Theorema; seu quod conditio, ex qua hæc æquatio deducta fuit, in quæstionis datis sit comprehensa, neque unquam sine hac conditione esse possit: Atque adeo, duas in ea conditiones desiderari, ad dicti puncti determinationem; unam, ad æquationem pro  $x$  inveniendam, quâ innotescat, ad quod punctum lineæ AC duci debet perpendicularis EF; atque alteram, ad æquationem pro  $y$  inveniendam, quâ cognoscatur, ubinam illud ipsum in hac perpendiculari sit sumendum: quibus mediantribus quæstio penitus determinata reddatur. Quare, *Vide ea, quæ postquam conditiones in quæstione præstanda exsecuta sunt, & habentur* neutri linearum incognitarum AF, FE æquatio responderet, poterunt illæ ad arbitrium accipi, atque idcirco quæsitum punctum E ubique intra triangulum ABC assumi. Cujus demonstratio facilis est. *pag. 4.*

Ducantur enim rectæ AE, EB, & EC, ut constituentur tria triangula AEC, AEB, & BEC.

Quoniam igitur horum triangulorum bases sunt æquales, ac quælibet ex ipsis æqualis basi trianguli ABC; habebunt ipsa ad triangulum ABC eandem rationem, quam perpendicula FE, EG, & EH. Quare cum triangula AEC, AEB, & BEC simul sumpta ipsi triangulo ABC sint æqualia: erunt quoque perpendiculares EF, EG, & EH simul sumptæ ipsi perpendiculari BD æquales. Quod erat demonstrandum.

Porro notandum est, quod, quemadmodum punctum E, intra triangulum ABC assumptum, exhibet semper eandem summam perpendicularem EF, EG, & EH, quæ ab eo ad trianguli latera deducuntur, & æqualem perpendiculari BD, ita contra, si sumatur extra triangulum ABC, atque ab eo ad singula ejus latera, si opus est, producta perpendiculares demittantur, obtineatur semper eadem perpendicularem differentia, quæ rursus perpendiculari BD sit æqualis. Oportet autem perpendicularem, quæ ducitur in latus subtensum angulo, intra quem punctum sumptum

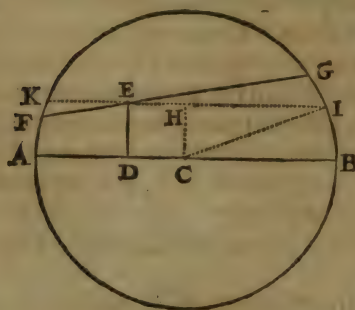
Ff 3

erit.



erit, auferre ex summa duarum reliquarum. Quæ simili ratione aliis quoque figuris rectilineis ordinatis competunt, cum eadem in omnibus sit demonstratio.

Alterum exemplum, quod hîc afferendum duxi, desumpsi ex inventis Nobilissimi & præclari Juvenis D: Christiani Hugénii, quibus sibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non nisi magna quæque ab eo expectanda esse affirmare non veriti fuerint.



Dato Circulo A G B, dataque positione diametro A B: invenire extra ipsam punctum E, à quo si ad A B demittatur perpendicularis E D, & per idem punctum agatur recta quædam linea F G utrinque à circumferentiâ terminata, ut rectangulum F E G, sub segmentis ejus F E, E G comprehensum, unâ cum quadrato perpendicularis demissæ E D, æquetur rectangulo A D B, sub segmentis diametri A D, D B.

Ductâ per E rectâ K I parallelâ ipsi A B, deducatur ex centro C in eam perpendicularis C H, jungaturque C I. Positâ igitur A C vel C B  $\propto a$ , C D  $\propto x$ , & D E  $\propto y$ : erit H I  $\propto \sqrt{aa - yy}$ , E I  $\propto \sqrt{aa - yy} + x$ , & E K  $\propto \sqrt{aa - yy} - x$ . Unde si multiplicaverit E K  $\propto \sqrt{aa - yy} - x$  per E I  $\propto \sqrt{aa - yy} + x$ , fiet rectan-

COMMENTARIJ IN LIBRUM II. 231

rectangulum KEI seu FEG  $\propto aa - yy - xx$ . Cui si addatur <sup>35 Terti</sup>  
 quadratum ex ED  $\propto yy$ , erit summa  $aa - xx \propto aa - xx$ , re- <sup>Elem.</sup>  
 ctangulo ADB, utpote  $\propto$ qualis ei, quod sit ex  $a - x$  in  $a + x$ .

Quia igitur hic utrinque eadem reperiuntur quantitates, &  
 adimpletis omnibus conditionibus nulla amplius inveniri potest  
 $\propto$ quatio, quâ innotescat utraque incognita quantitas  $x$  &  $y$ : li-  
 quet eas ad arbitrium sumi posse, atque Problema propositum esse  
 Theorema. Defectus itaque duarum in hac quaestione conditio-  
 num, ad determinandum punctum E, ostendit, illud ubique extra  
 diametrum, intra circulum cadere posse, & locum ejus esse ad su-  
 perficiem Circuli. Id quod facillè demonstrari potest.

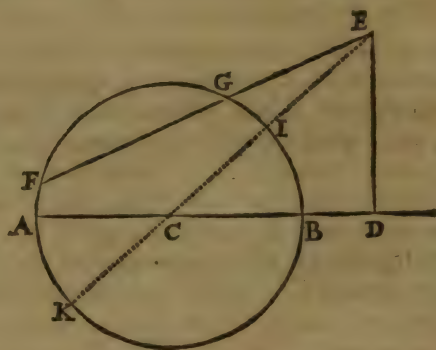
Quoniam enim CH perpendicularis est ad KI, secabit re- <sup>3 Terti</sup>  
 ctam KI bifariam in H. Unde cum in E quoque in $\propto$ qualiter sit <sup>Elem.</sup>  
 secta, erit rectangulum KEI, sub in $\propto$ qualibus segmentis com- <sup>5 Secundi</sup>  
 prehensum, seu, quod idem est rectangulum FEG, unâ cum <sup>Elem.</sup>  
 quadrato segmenti intermedii EH,  $\propto$ quale quadrato dimidia li- <sup>35 Terti</sup>  
 neæ HI. Eodem modo, quoniam recta AB bifariam divisa est <sup>Elem.</sup>  
 in C, & non bifariam in D: erit rectangulum ADB unâ cum  
 quadrato intersegmenti DC,  $\propto$ quale quadrato ex CB seu CI.  
 Quare cum quadratum CI  $\propto$ quetur quoque quadratis CH, HI,  
 quorum quidem quadratum HI  $\propto$ quale est ostensum rectangulo  
 FEG, unâ cum quadrato EH: sequitur rectangulum ADB unâ  
 cum quadrato DC seu EH  $\propto$ uari rectangulo FEG unâ cum  
 duobus quadratis CH, EH. Ac proinde, dempto communi qua-  
 drato EH, remanebit rectangulum ADB  $\propto$ quale rectangulo  
 FEG, unâ cum quadrato CH seu ED. Quod erat demonstnan-  
 dum. Non secus demonstrabitur, omne aliud punctum, intra Cir-  
 culum extra diametrum AB assumptum, præstare id quod quaeri-  
 tur: Quocirca, Si in Circulo extra diametrum, sumatur  
 aliquod punctum, à quo ad diametrum demittatur per-  
 pendicularis, & per idem punctum agatur recta linea à  
 circumferentia utrinque terminata: erit rectangulum  
 sub segmentis hujus rectæ comprehensum, unâ cum  
 quadrato perpendicularis demissæ,  $\propto$ quale rectangulo  
 sub segmentis diametri. Idem ferè contingit si extra Circu-  
 lum acceptum fuerit punctum.

Etenim,



Etenim,

Assumpto extra Circulum puncto quolibet, ut E, ab eoque ad diametrum A B, ipsamve productam, si opus est, deductâ perpendiculari E D, tum verò rectâ E F, Circulum utcunque in F & G secante: erit rectangulum A D B, unâ cum quadrato rectæ D E, æquale rectangulo F E G. Quod similiter ut supra experiri licet, atque demonstrare.



Porro sicut in allatis exemplis loca quæsitum punctorum fuerunt ad superficies planas, easque terminatas, vel in infinitum extensas; ita quoque inveniuntur loca punctorum, quæ sunt ad superficies curvas, & quidem vel terminatas, vel in infinitum extensas.

Si enim, exempli causâ, in figura pag. 123 manente rectâ AB, & in ea punctis A & B, circumvolvatur semicirculus FDE, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat, describetur superficies Sphærica, in qua si quodlibet punctum accipiat, ut D, ab eoque ad puncta A & B rectæ agantur DA, DB: habebunt ipsæ datam inter se rationem, hoc est, eandem, quam PH ad MN. Ita ut punctum D sit ad superficiem curvam terminatam, utpote ad superficiem Sphæricam, conversione semicirculi FDE descriptam. Eâdem ratione, si à duobus datis punctis duæ inflectantur rectæ

rectæ linear in data differentia : punctum ad inflexionem erit ad superficiem Hyperbolicam, positione datam. Etenim si in plano quocunque, quod per data puncta transit, describatur Hyperbola, cujus foci hæc puncta existant, & axis transversus differentia data: & manentibus punctis Hyperbola circa axem circumvertatur, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat; describetur superficies curva, quæ in infinitum extenditur, & Hyperbolica dicitur (quippe Hyperbolâ in infinitum extensâ), in qua si ad libitum sumatur punctum, à quo ad data puncta agantur duæ rectæ linear, servabunt illæ inter se differentiam datam.

Atque sic progrediendo curvæ superficies ostendi possunt, in infinitum magis magisque compositæ, quæ quæsitorum punctorum determinationi inserviunt. Verum cum sufficiat nobis per exempla aliquot modum explicuisse, quo hæc loca per calculum detegantur, & à locis planis, solidis, aliisque magis compositis discernantur: ulteriori explicationi supersedebimus.

Cæterum, ne quid, quod ad hanc materiam spectare possit, desideretur, sed Geometria omnibus numeris sit absoluta, paucis subjiciam, quomodo cognosci possit, quando locus alicujus puncti est ad solidum: cum id neque ab Antiquis, neque à Recentioribus (quod sciam) hæcenus sit deprehensum.

Tribus igitur conditionibus deficientibus, ad puncti alicujus determinationem, locus, in quo illud reperitur, Solidum est: & vel planis constans superficiebus, vel Sphæricâ, vel aliâ magis compositâ, vel denique mixtis ex planis & curvis. Solida autem hæc vel sunt terminata, vel indefinitè extensa.

Ut, si intra Tetraëdram, inveniendum sit punctum, ita ut summa perpendicularium, ab eo in quatuor ejus plana, quibus constat, demissarum, æquetur perpendiculari Tetraëdri: cadet illud quovis loco intra Tetraëdram, ita ut nullum intra ipsum punctum assumi possit, quod quæsito non satisfaciatur. Quod eodem modo indagatur & demonstratur, atque superius in triangulo æquilatèro est ostensum. Nam, cum ad hujus puncti determinationem tres requirantur radices seu incognitæ quantitates (quarum una inservit determinandæ longitudini perpendicularis, quæ

Gg

Locus ad  
Solidum.



quæ à quæsito puncto cadit supra unum ex planis, & reliquæ duæ, ad locum hujus perpendicularis in eodem plano determinandum), & adimpletis conditionibus omnibus tandem in æquationem incidamus, ubi utrinque eadem occurrunt quantitates: indicio est, incognitas quantitates ad libitum sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Nihil igitur refert quodcunque intra Tetraëdram assumatur punctum, cum omnia quæsito satisfaciant.

Non dissimili ratione demonstrare possumus: Si extra Tetraëdram sumatur punctum, à quo ad singula ejus plana demittantur perpendiculares, earum differentiam æquari perpendiculo Tetraëdri. Adeò ut, si quæstio fuerit de inveniendò puncto, à quo demissæ perpendiculares simul collectæ, æquantur Tetraëdri perpendiculo, punctum illud futurum sit in solido terminato, utpote ubique intra Tetraëdram; si verò postuletur, ut differentia ipsarum eidem perpendiculo sit æqualis, reperiatur punctum illud in solido indefinitè extenso, atque sumi poterit extra Tetraëdram, ubicunque libuerit. Idem de aliis figuris ordinatis, planisque superficiebus contentis, dici & demonstrari posse, perspicuum est.

Alterum exemplum, quod hic adducemus, ex Hugenario Problemate deduci potest, quemadmodum præcedens Tetraëdri ex triangulo æquilatèro deduximus, & est hujusmodi: Si Sphæra plano per centrum secetur, sumatur autem extra planum quodlibet punctum intra Sphæram, ab eoque ad planum demittatur perpendicularis, & per subjectum punctum in eodem plano utcunque ducatur recta linea, utrinque à Sphære superficie terminata: erit rectangulum, sub segmentis hujus rectæ comprehensum, æquale rectangulo sub segmentis rectæ, utcunque per assumptum punctum ad Sphære superficiem ductæ, unà cum demissæ perpendicularis quadrato. Idem fermè contingit si punctum sumatur extra Sphæram.

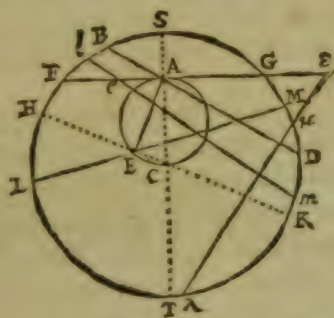
His adde sequens Problema, quod occasione istius Hugeniani sibi ante tres annos è vestigio inquirendum proposui. Vir Celeber-

berrimus atque undequaque Doctissimus D. Johannes Wallisius, S.T.D., & in Academia Oxoniensi Geometriæ Professor SAVILIANUS. Estque hujusmodi:

In circulo, cujus centrum C, assignato ubivis puncto A, per quod ducta recta peripheriæ occurrat in punctis B, D: inveniantur alia quotlibet puncta, ita ut, si per quodvis eorum ducatur recta peripheriæ occurrens in punctis L, M, quadratum distantiae AE æquetur vel differentiæ vel summæ rectangulorum LEM, BAD.

$$\text{Puta } \square AE \propto \begin{cases} \square LEM - \square BAD. \\ \square BAD - \square LEM. \\ \square BAD + \square LEM. \end{cases}$$

Diametro AC describatur circellus, quem contingat recta infinita FAG. Dico, singula puncta in peripheria circelli præstare



primum quæsitum: quæ verò in recta FG intra circulum, secundum: quæ denique in eadem continuata extra circulum, tertium.

Nam 1<sup>o</sup>, si sit E in peripheria circelli, (ductis diametris SACT, HECK,) erit \*  $\square BAD \propto \square SAT \propto \square \text{Radii}$  \* per 3<sup>o</sup> Tertis Elem. ( $-\square AC \propto$ )  $-\square EC - \square AE$  \*. Et  $\square LEM \propto \square HEK$  \* per 5<sup>o</sup> Secundi Elem.  $\propto \square \text{Radii} - \square EC$ . Ergo  $\square LEM - \square AE \propto \square BAD$ , vel  $\square LEM - \square BAD \propto \square AE$ .

2<sup>o</sup>. Si in recta FG intra circulum sumatur E vel e: erit  $\square BAD \propto \square FAG \propto \square FA \propto \square FeG + \square Ae$ . Et  $\square lem \propto \square FeG$ . Ergo  $\square BAD - \square lem \propto \square Ae$ .

Gg 2

3<sup>o</sup>.

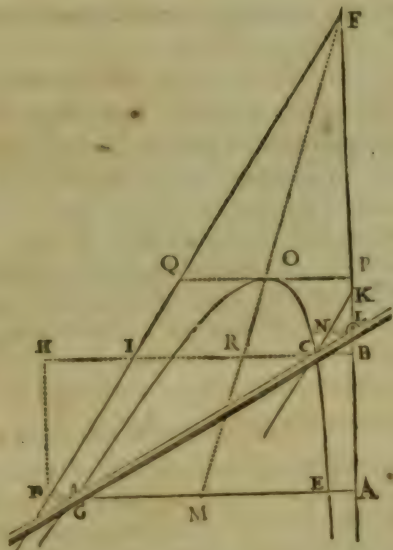


3<sup>tiò</sup>. Si in FG continuatâ sumatur  $e$  vel  $\epsilon$  extra circulum, e-  
 rit \*  $\square \lambda \epsilon \mu \infty \square F \epsilon G \infty \square A \epsilon (- \square F A \infty) - \square B A D$  \*.  
 \* per 36. Ergo  $\square B A D + \square \lambda \epsilon \mu \infty \square A \epsilon$ . Quod erat faciendum. Idem,  
 Tertii Elem. mutatis paucis, procederet pariter, etiamsi punctum A extra cir-  
 \* per 6 Se- culum assignaretur.  
 cundi Elem.

Quoniam igitur assumpto puncto A ceu dato, puncta invenien-  
 da E cadunt in locum planum, utpote in peripheriam circelli,  
 aut in rectam FG intra circulum, aut denique in eandem extra  
 circulum continuatam: patet, si in locum horum circulorum ac-  
 cipiantur duæ sphæræ, quod similiter hæc puncta E ubique pro-  
 lubitu sumi possint in superficie convexa sphæræ A E C, aut in  
 superficie plana circuli, cujus diameter FG, aut denique in eo-  
 dem plano, extra hujus circumferentiam in infinitum extenso,  
 prout scilicet, ut ante, dictorum rectangulorum vel differentia  
 vel summa quadrato distantiarum horum sumendorum punctorum  
 E à puncto A requiritur æqualis. Quod si verò idem punctum A  
 non unum locum obtineat, sed ubivis intra circulum S L T affig-  
 netur, quod tunc quidem locus puncti E ubique in solido intra  
 vel extra superficiem sphæræ S L T, pro diversa quaesiti ratione,  
 sit futurus. Atque ita de aliis.

H *Iam verò ex hoc solo, quod scitur relatio, quam omnia linea  
 curvæ puncta habent ad puncta omnia linea rectæ, modo illo,  
 quem supra explicavi; facile quoque est invenire relationem,  
 quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque ex-  
 inde cognoscere diametros, axes, centra, aliasq; lineas, & pun-  
 cta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit specia-  
 liorem vel simpliciore, quàm ad alia: atque ita imaginari di-  
 versos modos illas describendi, ex quibus faciliores eligi possunt.]*  
 Ita, cum relatio, quam habent puncta lineæ CE, per motum re-  
 gulæ GL & plani rectilinei CNKL descriptæ, (quam superius  
 Hyperbolam esse ostendimus) ad puncta lineæ rectæ AB expri-  
 matur per æquationem  $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$ ; prout nimi-  
 rum in ea assumitur punctum A, tanquam certum ac determina-  
 tum, à quo calculus incipiat: facile quoque est invenire relatio-  
 nem, quam habent ad puncta ejusdem AB, quando in ea, loco  
 puncti A, assumitur aliud punctum nempe F, à quo calculus ini-  
 tium

DA seu  $a + c$  ad AF, erit ipsa  $\propto \frac{ab}{c} + b$ . E qua si dematur AB



$xx$ , relinquetur  $BF \propto \frac{a^2}{c} + b - x$ . Hinc si in æquatione inventa  
 $xy \propto cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$  loco  $x$  substituamus  $\frac{a^2}{c} + b - x$ : in-  
 veniemus æquationem  $yy \propto \frac{cx}{b} y - ac$ , quâ ostenditur relatio,  
 quam habent puncta Hyperbolæ CE ad puncta rectæ BA, respec-  
 tu puncti F. Quæ æquatio, cum præcedenti sit simplicior, ar-  
 guit, Hyperbolæ puncta ad puncta rectæ BA specialem seu  
 simpliciore habere relationem, quando in AB punctum F  
 pro certo & determinato assumitur, quàm cum in ea accipitur  
 punctum A.

Cæterum relationem, quam Hyperbolæ puncta servant ad omnia alia puncta & lineas datas, cognosces ex pag. 177. Ubi ex relatione, quam habent puncta aliqujus curvæ ad puncta rectæ

Gg 3

posi-



positione data, datus est modus inveniendi relationem eorundem punctorum ad puncta alterius cujuscvis rectæ positione data. Adeoque tot inventis æquationibus diversis, ad quot diversas rectas curva illa fuerit relata, atque ex iis juxta æquationum regulas extractis radicibus: constabunt totidem modi eam describendi, ex quibus faciliores seligi poterunt.

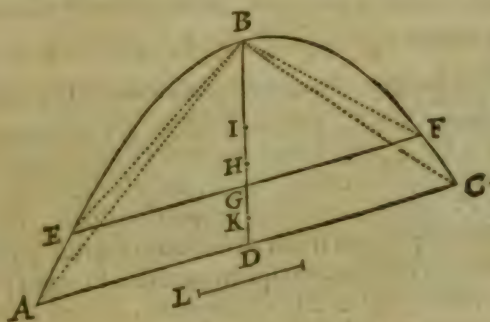
I Immo verò, potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spaciū, quod comprehendunt, magnitudinem spectat: ita ut non opus sit de his agere apertius.] Sic ad comparandam Ellipsin cum Circulo, atque ad inveniendam relationem, quam inter se habent, prout circa eundem axem sunt descriptæ: Esto axis  $\propto q$ , latus rectum pertinens ad axem  $\propto r$ , segmentum axis inter verticem & utriusque ordinatam interceptum  $\propto x$ , ipsa verò adplicata  $\propto y$ . Hinc cum in Circulo latus transversum sive diameter æquale sit lateri recto, & æquatio exprimens relationem punctorum Circuli ad puncta diametri vel axis sit  $yy \propto qx - xx$ ; at verò quæ relationem exprimit punctorum Ellipsis ad puncta axis sit  $yy \propto rx - \frac{rxx}{q}$ : quæ inter se sunt ut  $q$  ad  $r$ , hoc est, ut axis ad latus rectum pertinens ad eundem axem; quæ quidem ratio duplicata est rationis, quam habet hic axis ad axem secundum, sequitur Circulum ad Ellipsin esse, ut axis primus ad axem secundum. Id quod demonstratum est ab Archimede prop<sup>ne</sup> 5<sup>ta</sup> libri de Conoïdibus & Sphæroïdibus, ut & à nobis cap. 2<sup>do</sup> tractatus de organica Conicarum Sectionum in plano descriptione.

Porro extendi potest hoc ipsum ad cognoscendam quoque relationem, quam habet Sphæra ad Sphæroïdes, prout eundem habent axem.

Etenim, cum ostensum sit, quadrata ordinatim adplicatarum utriusque curvæ esse inter se, sicut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem; & quadrata illa ad se invicem sint ut Circuli, qui ab ipsis tanquam radiis conversione semicirculi & semi-ellipsis sunt & utramque figuram describunt: pater Sphæram ad Sphæroïdes esse, ut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem: vel, ut quadratum ejusdem axis ad quadratum axis minoris. Quod & ab Archimede ostensum.

Adeo ut non modò ex hoc solo inveniri propemodum possit omne

Cæterum cum ex hac spaciū aut solidi magnitudine deinceps facile sit invenire ejusdem centrum gravitatis, non abs re fuerit si hic similiter modum, quo id investigari possit, uno atque altero exemplo exponam.



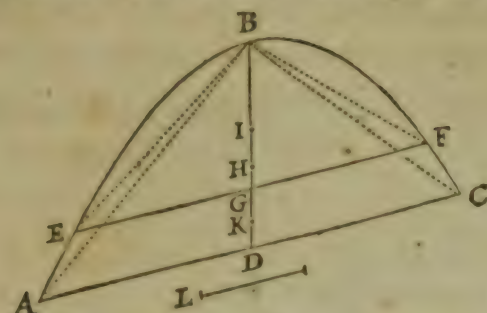
Igitur ad inveniendum, exempli causâ, gravitatis centrum  
Parabolæ  $ABC$  ac ejus portionis  $A E F C$ , abscissæ videlicet per  
rectam  $E F$  ipsi  $A C$  parallelam: suppono centrum totius  $ABC$   
esse  $H$ , Parabolæ autem  $E B F$  centrum esse  $I$ , & centrum portio-  
nis  $A E F C$  esse  $K$ . Deinde factâ  $B D \propto a$ ,  $A D$  vel  $D C \propto b$ ,  $E G$   
vel  $G F \propto c$ ,  $B H \propto x$ , &  $H K \propto y$ , jungo  $A B$ ,  $B C$ ,  $E B$ , &  $B F$ .  
Quibus positis, quero rationem, quæ est inter triangulum  $A B C$   
& triangulum  $E B F$ . Hinc cum ex natura Parabolæ quadratum  
ex  $A D$  seu  $b b$  sit ad quadratum ex  $E G$  seu  $c c$ , sicut  $D B$  seu  $a$  ad  
G B:



GB: erit  $GB \propto \frac{acc}{bb}$ . Ac proinde cum AD multiplicata per DB producat  $ab$ , at EG multiplicata per GB producat  $\frac{acc^3}{bb}$ , erit ratio trianguli ABC ad triangulum EBF quæ  $ab$  ad  $\frac{acc^3}{bb}$  seu  $b^3$  ad  $c^3$ . Hæc autem cum eadem sit rationi, quam inter se habent Parabolæ ABC & EBF (siquidem Parabola quælibet trianguli sibi inscripti maximi est sesquitertia): sequitur rationem portionis A E F C ad Parabolam EBF eandem fore quam  $b^3 - c^3$  ad  $c^3$ . Porro cum eadem sit situs ratio centri I in Parabola EBF, quæ centri H in Parabola ABC: erit DB seu  $a$  ad BH seu  $x$ , sicut GB seu  $\frac{acc}{bb}$  ad BI  $\frac{ccx}{bb}$ . Quâ subductâ ex BH seu  $x$ , relinquitur IH  $\propto \frac{bbx - ccx}{bb}$ . Denique cum IH ad HK, hoc est,  $\frac{bbx - ccx}{bb}$ , ad  $y$ , eandem habere debeat rationem, quam portio A E F C ad Parabolam EBF seu  $b^3 - c^3$  ad  $c^3$ , fiet, abbreviando primum & tertium terminum per  $b - c$ , ac deinde multiplicando extremos tum medios,  $\frac{bc^3x + c^4x}{bb} \propto bby + bcy + ccy$ , vel

$\frac{bc^3x + c^4x}{b^4 + b^3c + b^2cc + bcc^2 + c^4} \propto y$ . E quibus liquet, invento H, centro gravitatis Parabolæ ABC, ad inveniendum K, centrum gravitatis portionis A E F C, faciendum esse, ut BH seu  $x$  sit ad HK seu  $y$ , sicut  $b^4 + b^3c + b^2cc + bcc^2$  ad  $bc^3 + c^4$ ; hoc est, inventis in ratione AD ad EG quinque continuè proportionalibus, erit BH ad HK, ut summa priorum trium ad summam duarum posteriorum. Ubi demum, ad obtinendum ipsum punctum H, opus tantum est concipere rectas AD & EG esse æquales, hoc est,  $b \propto c$ , ita ut EGF coincidat cum ADC, quo casu & punctum I in punctum H cadet, & K in D, lineaque DH seu  $y$  æqualis fiet  $\frac{2}{3}x$ , hoc est, duabus tertiis ipsius HB. Quod ipsum monstrat, sectâ diametro BD in 5 æquales partes, pro linea BH seu  $x$  tunc earundem sumendas esse tres. Id quod aliter quoque à nobis est ostensum in Exercitationibus nostris Mathematicis libr. 5. sectione 19.

Eodem modo si in Conoide Parabolico ABC & ejusdem portione A E F C centra gravitatum H & K invenire velimus, oportet, iisdem quæ supra positis, quærere rationem, quæ est inter Conum ABC & Conum EBF: inveniaturque ut  $b^4$  ad  $c^4$ . Hæc enim



enim cum eadem quoque sit rationi, quæ est inter duos Conoïdes ABC & EBF (quandoquidem per 23 Prop. de Conoïdibus & Sphæroidibus Archimedis Conoïd quilibet Parabolicus sesquialter esse probatur Coni, qui eandem habet basin eundemque axem cum Conoïde): patet portionem AEF C ad Conoïdem EBF fore, ut  $b^2 - c^2$  ad  $c^2$ . E quibus porro, ut supra, invenitur  $y \propto \frac{c^2 x}{b^2 + b b c c}$ , hoc est, invento H, centro gravitatis Conoïdis ABC, ad obtinendum K, centrum gravitatis portionis AEF C, faciendum esse ut BH sit ad HK, sicut  $b^2 + b b c c$  ad  $c^2$ , seu, quod idem est, ad DB & GB quærendam esse tertiam proportionalem L, atque deinde faciendum ut BH sit ad HK, sicut summa ipsarum DB, GB ad tertiam L. Ubi tandem, si ad ipsum punctum H habendum statuamus, ut ante,  $b \propto c$ , invenietur  $y \propto x$ . Quod ipsum docet diametrum BD in 3 æquales partes esse dividendam, atque pro BH earundem sumendas esse duas. Atque ita de aliis.

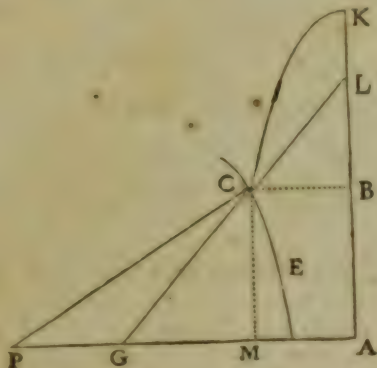
*Sit CE linea curva, oporteatque per punctum C, &c.] K*  
 Quæ hæc lineâ & sequentibus usque ad paginæ sequentis lineam 25 continentur, in genere referri debent ad illa, quæ deinceps ab Authore afferuntur usque ad pag. 44. quibus in specie agit de natura quarundam curvarum, quas, postquam ad æquationes reduxit, deinde hæc æquationes cum alia comparat, nempe  $yy - ey + ee \propto 0$  aut  $xx - fx + ff \propto 0$ , aliæque quæ ex hac vel illa sit composita, ut inveniantur tandem quantitas incognita v.

*Quemadmodum si CE est Ellipsis, in qua MA sit segmentum diametri, ad quam CM sit ordinatim applicata, quodq;*  
 H h pro





Conicorum Apollonii, in Parabola C K rectangulum sub dia-



cetur  $\frac{cb - cy + xy}{b - y}$  per  $d$ ,

$$yy \propto \frac{dcb - dcy + dxy}{b - y}.$$

Unde multiplicando utrinque per  $b - y$ , fiet  $dc b - dcy + dxy \propto byy - y^3$ . Factaque transpo-

sitione, ut  $dx y$  unam teneat æquationis partem, erit  
 $dx y \propto dcy - dcb + byy - y^3$ . In qua si pro  $x$  ponatur summa  
 ipsi æqualis, habebitur  $dy \sqrt{ss - vv + v y - yy}$ , seu  
 $\sqrt{d d s s y y - d d v v y y + d d v y^3 - d d y^4} \propto dcy - dcb$   
 $+ byy - y^3$ . Ut autem æquatio ab asymmetria liboretur, qua-  
 dretur utraque pars, fiatque transpositio ut quantitates omnes ab  
 una parte habeantur, inveniaturque

$$y^4 = b^4; \left. \begin{array}{l} + \frac{bb}{dc} \\ + \frac{dd}{dc} \end{array} \right\} y^3 + \left. \begin{array}{l} + \frac{bcd}{ddv} \\ + \frac{ddv}{dcbb} \end{array} \right\} y^2 + \left. \begin{array}{l} + \frac{ddcc}{ddvv} \\ + \frac{ddcc}{dcbb} \\ + \frac{ddss}{ddss} \end{array} \right\} y - \frac{ddccby}{ddccbb} + \frac{ddccbb}{ddccbb} \infty.$$

Reliqua huc spectantia inveniuntur à lin. 9. pag. 46. usque ad lineam ultimam paginæ sequentis, quæ explicatione non indigent.

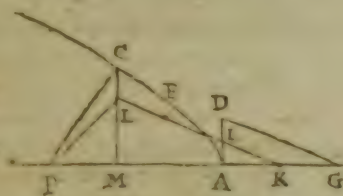
Quoniam autem inventio harum linearum non solum elegans ac subtilis, verum etiam per se jucunda atque utilis existit: non ingratum futurum confido, quibus hæc exercere volupe est, si ostendero quo pacto in Hyperbola & Parabola nec non in Conchoide sint inveniendæ.





Deinde, ad inveniendam quantitatem quaesitam  $v$ , comparetur æquatio inventa cum æquatione ejusdem formæ  $yy - e y + r e = 0$ , ubi  $y$  æquatur  $e$ . Quare cum utriusque primus terminus planè sit idem, comparetur secundus cum secundo, nempe,  $+ q r - e q v$  cum  $- e y$ , vel, quod idem est,  $\frac{+ q r - e q v}{q + r}$  cum  $- e$ : ac idcirco multiplicetur utrinque per  $q + r$ , & fiet  $+ q r - e q v = - e q - e r$ . Postea translato  $r e$  ad alteram partem, dividatur utrinque per  $q$ , fietque  $\frac{1}{2} r + e + \frac{r e}{q} = v$ , vel  $v = y + \frac{r y}{q} + \frac{1}{2} r$ , quandoquidem  $e$  ipsi  $y$  supposita est æqualis.

Ex quibus patet, ad inveniendam rectam  $P C$ , latus rectum  $A D$  secundum esse bisariam in  $I$ , & rectam  $P M$  ipsi  $I F$  sumendam esse æqualem. Quod in Elliptici quoque est observandum.



His adde sequentem constructionem, quam Vir insignis ac Geometra præstantissimus D. Auzotius utrique huic sectioni pariter convenientem invenit, ejusque me quinquennio abhinc per literas participem fieri voluit, & talis est.

Existente  $A D$ , ut ante, latere recto, &  $A G$  latere transverso, ad inveniendam  $P C$ , ductis  $C M$ ,  $A D$  ordinatim ad  $A G$ , junctâque  $G D$ , agatur per centrum

sectionis  $K$  eidem parallela  $K I$ , secans  $C M$  in  $L$ . Dein assumptâ  $P M$  æquali  $M L$ , jungatur  $P C$ , eritque secans quaesita.

Quod ita patet.

Est enim propter similitudinem triangulorum  $G A D$ ,  $K M L$ , ut  $G A$  ad  $A D$ , hoc est,  $q$  ad  $r$ , ita  $K M$ , hoc est,  $\frac{1}{2} q$  ad  $M L$ , hoc est,  $\frac{r y}{q}$ . Unde cum  $A P$  inventa sit  $= y + \frac{r y}{q} + \frac{1}{2} r$ , adcoque  $P M = \frac{1}{2} r + \frac{r y}{q}$ , liquet  $P M$  &  $M L$  esse æquales. Quemadmodum fuerunt assumptæ.

Hh 3

Ubi



Ubi porro animadvertere licet, si ex puncto P ceu dato recta PC sit ducenda, quæ utramque sectionem vel earum contingentes ad rectos angulos secet, siue ut circulus, qui ex P ejus intervallo describitur, utramque curvam tangat, opus tantum esse ducere PL, ita ut angulus APL sit semissis anguli AMC: si enim per L, ubi hæc recta ipsi KIL occurrit, ducatur MLC ordinatim ad AG, hoc est, ipsi AD parallela, erit juncta PC secans quæsitæ, siue circulus ex P intervallo PC descriptus utramque curvam in C continget, ut requirebatur.

In Parabola.

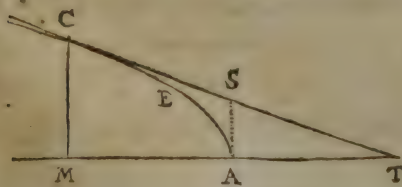
Sit latus rectum AD  $\propto r$ , CM vel AB  $\propto x$ , MA vel BC  $\propto y$ , PA  $\propto v$ , & PC  $\propto s$ . Quoniam igitur per 11<sup>am</sup> Prop<sup>tem</sup> 1<sup>mi</sup> libri Conicorum Apollonii rectangulum sub segmento diametri MA & latere recto AD æquatur quadrato ordinatim applicatæ CM: erit  $ry \propto xx$ , vel

$ry \propto ss - vv + ^2vy - yy$ , substituendo nempe  $ss - vv + ^2vy - yy$  in locum  $xx$ . Deinde quantitatis omnibus ab una parte in alteram translatis, ut  $yy$  sit adfecta signo +, habebitur æquatio

$$yy + ^2ry + ^2vv \propto ss$$

Quam si porro compares cum æquatione  $yy - ^2ey + ee \propto 0$ , ubi  $y$  &  $e$  sunt æ-

quales, conferendo nempe singulos terminos unius cum singulis alterius: nimirum, secundum  $+r - ^2v$  cum secundo  $-^2e$ , inveniatur  $v \propto e + \frac{1}{2}r$ , vel  $v \propto y + \frac{1}{2}r$ . E quibus manifestum fit, ad ducendam rectam PC, opus tantum esse, dividere latus rectum AD bifariam in puncto I, atque deinde assumere PM ipsi AI seu ID æqualem.



Quod si verò ipsa tangens CT sit investiganda, poterimus, ut ante, supponendo latus rectum  $\propto r$ , CM  $\propto x$ , & MA  $\propto y$ , quærere AT  $\propto v$ , & AS  $\propto s$ , hoc pacto:

Fiat

Fiat propter similitudinem triangulorum A S T & M C T, ut A T ad A S, hoc est,  $y$  ad  $s$ , sic M T, hoc est,  $y + v$ , ad M C. Quare ideo erit  $\frac{y + v}{y} = \frac{M C}{s}$ . Unde cum & M C sit  $\propto x$ , erit  $\frac{y + v}{y} \propto x$ .

Hoc est, ductâ utraq; parte in se quadratè, habebitur

$$\frac{(y + v)^2}{y^2} \propto x^2. \text{ Quoniam autem, multiplicatâ M A}$$

per latus rectum, rectangulum  $ry$ , quod inde fit, similiter ipsi  $xx$ , hoc est, quadrato ex M C est æquale: erit pariter

$$\frac{(y + v)^2}{y^2} \propto ry. \text{ Unde ordinatâ æquatione, terminif-}$$

que omnibus ad unam partem transpositis, fit  $yy - \frac{v^2}{s} y + vv$

$\propto 0$ . Quam si porrò compares cum æquatione  $yy - \frac{v^2}{s} y + ee$   $\propto 0$ , conferendo singulos terminos unius cum singulis alterius, tertium videlicet cum tertio, obtinebitur  $v \propto ee$ , hoc est,  $v \propto e$ . Ac proinde  $e$  in locum  $e$  substituatur  $y$ : fiet  $v \propto y$ . Id quod ostendit, ad ducendam rectam C T ad datum punctum C, opus tantummodo esse assumere A T æqualem A M, atque connectere puncta C & T.

Quòd si autem quærat A S, poterimus secundum terminum cum secundo comparare, subrogando  $y$  in locum  $v$ , ut &  $y$  in locum  $e$ : inveniaturque  $s \propto \frac{v^2}{y}$ .

Eodem modo procedendo in binis reliquis sectionibus, inveniatur in Ellipsi  $v \propto \frac{qy}{q - y}$ , &  $s \propto \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q^2 y^2}{q - y}}$ ; at in Hyperbola  $v \propto \frac{qy}{q + y}$ , &  $s \propto \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q^2 y^2}{q + y}}$ .

Porrò ut appareat, quo pacto è puncto T, in axe vel diametro dato, recta T C sit ducenda: oportet duntaxat, assumptâ quantitate  $v$  ceu datâ, quærere  $y$ , reliquis inagentibus invariantis. Ac proinde, cum in Parabola  $v$  &  $y$  æquantur, opus tantum erit accipere M A æqualem A T, & ductâ M C ordinatim adplicatâ ad M A, jungere deinde puncta C & T, ut habeatur tangens quæsita.

Quoniam vero in Ellipsi  $v$  æquatur  $\frac{qy}{q - y}$ , multiplicando utrinque per  $q - y$ , fiet  $qv - y^2 \propto qy$ , seu  $qy + y^2 \propto qv$ . Adeoque si dividatur utrobique per  $q + y$ , inveniatur M A  $\propto y$

$$\propto \frac{qv}{q + y}$$

Pari









ctum in recta AB, per quod quæsitæ linea CP transire debet, calculus occurrat nullo antecedentium brevior, licet constructio sit valde brevis. *Oportet enim tantum in recta CG sumere CD, æqualem CB, quæ perpendicularis est ad AB; & deinde ex puncto D rectam ducere DF, parallelam ipsi AG, atque æqualem GL: habebiturque hæc ratione punctum F, per quod quæsitæ linea CP erit ducenda.* Quoniam autem in hoc exemplo calculus multò est brevior, si in recta AG quæratur punctum P, per quod linea quæsitæ CP transire debet, quàm si quæratur in recta AB, atque etiam constructio allata ex illo faciliùs potest ostendi: visum fuit breviorẽ hinc subungere, atque constructionem ex eo patefacere.

Esto ergo  $GA \propto b$ ,  $AE$  vel  $LC \propto c$ ,  $CM$  vel  $AB \propto x$ ,  $MA$  vel  $BC \propto y$ ,  $AP \propto v$ , &  $PC \propto s$ ; eritque tota  $PM \propto v + y$ . Cujus quadratum  $v^2 + 2vy + yy$  si subtrahatur à quadrato rectæ  $PC \propto ss$ , relinquetur quadratum rectæ  $CM \propto ss - vv - 2vy - yy$ . Unde cum  $CM$  sit  $\propto x$ , & quadratum ejus  $\propto xx$ : erit  $xx \propto ss - vv - 2vy - yy$ .

Eodem modo, si in triangulo rectangulo BCL à quadrato ex  $LC \propto cc$  auferatur quadratum rectæ  $BC \propto yy$ , relinquetur quadratum rectæ  $BL \propto cc - yy$ : adeoque ipsa  $BL \propto \sqrt{cc - yy}$ : quâ ab  $AB \propto x$  sublatâ, restabit  $AL \propto x - \sqrt{cc - yy}$ .

Jam verò, cum, propter similia triangula GMC & GAL, GM sit ad MC, hoc est,  $b + y$  ad  $x$ , sicut GA ad AL, hoc est,  $b$  ad  $x - \sqrt{cc - yy}$ : erit rectangulum sub extremis æquale rectangulo sub mediis, nimirum

$$bx + xy - \sqrt{bbcc + 2bccy + ccyy - 2by^3 - y^4} \propto bx. \text{ \& deletis utrobique } bx, \text{ ordinataque æquatione:}$$

$xy \propto \sqrt{bbcc + 2bccy + ccyy - 2by^3 - y^4}$ . Deinde ut evanescat signum radicale, ducatur utraque pars in se quadratè, atque ad tollendum  $xx$  substituatur ejus loco  $ss - vv - 2vy - yy$ , fietque æquatio  $ssyy - vvy - 2vy^3 - y^4 \propto bbcc + 2bccy + ccyy - 2by^3 - y^4$ . Ubi si utrinque auferatur  $y^4$ , & fiat transpositio ut quantitates in  $y^3$  ductæ unam obtineant æquationis partem,

tem, reliquæ verò alteram, ac demum utraque pars dividatur per  $v - b$ , orietur æquatio talis:

$$\begin{array}{r} +bb \\ y^3 \infty \frac{+cc}{+ff} yy - bccy - bbcc \\ -vv \end{array}$$


---

$v - b$

Hoc est, translatis quantitibus omnibus ad unam partem, erit:

$$\begin{array}{r} -bb \\ y^3 \frac{+cc}{-ff} yy + bccy + bbcc \infty 0 \\ +vv \end{array}$$


---

$v - b$

Quæ æquatio relationem ostendit, quam puncta Conchoïdis CE habent ad puncta lineæ rectæ BA. Quare, postquam in ipsa quantitas  $y$  est data, quandoquidem punctum C datum est, superest ut inveniamus quantitates  $v$  &  $f$ , determinantes punctum quæsitum P. Hunc in finem aliam æquationem instituo, quæ æquæ multas habeat dimensiones, & in qua  $y$  duas valeat quantitates, quæ sibi invicem sint æquales. Ideoque supponendo  $y \infty e$ , sive  $y - e \infty 0$ : duco  $y - e$  in se, & fit  $yy - ey + ee \infty 0$ . æquatio duas habens radices æquales. Hanc porro multiplico per  $y + f$ , ut ascendat ad aliam trium dimensionum, ejusdemque formæ cum præcedente, & provenit æquatio  $y^3 \frac{+f}{-f} yy - ey + ee \infty 0$ . Cujus terminos separatim conféro cum terminis præcedentis

$$\begin{array}{r} -bb \\ y^3 \frac{+cc}{-ff} yy + bccy + bbcc \infty 0 \\ +vv \end{array}$$


---

$v - b$

Unde cum primus terminus in utraque æquatione sit idem, comparo secundum cum secundo, ac reliquos cum reliquis. Adeo ut, si statuamus  $\frac{bbcc}{v - b} \infty eef$ , & utrinque dividamus per  $ee$ , orietur  $f \infty \frac{bbcc}{ve - b}$ . Pari ratione, si  $\frac{+bccy}{v - b} \infty +efy$ , seu  $\frac{bbcc}{v - b} \infty -ef + ee$ , in locum  $f$  subrogetur valor ejus inventus





erit  $LH \propto \frac{b^2 c^2}{y^2}$ . Denique, cum, ob similia triangula  $CDE, HIP$ ,  
 $CD$  sit ad  $DF$  seu  $GL$ , hoc est,  $y$  ad  $\frac{b^2 c^2}{y^2}$ , sicut  $HI$  seu  $GL$ , hoc  
 est,  $\frac{b^2 c^2}{y^2}$ , ad  $IP$ : erit  $IP \propto \frac{b^2 c^2}{y^2}$ . Quare si ducatur recta  $GC$ , in  
 eaque assumatur  $CD$  æqualis  $CB$ , ac deinde ex puncto  $D$  recta  
 agatur  $DF$  æqualis  $GL$ , & parallela  $AG$ : manifestum est, re-  
 ctam, quæ puncta  $F, C$  connectit, esse lineam quæsitam, quippe  
 quæ Conchoïdem secat ad angulos rectos. Quandoquidem, si  
 producat ad  $P$ ,  $GI$  sit  $\propto \frac{b^2 c^2}{y^2}$ ,  $IP \propto \frac{b^2 c^2}{y^2}$ , atque adeò tota  $AP \propto$   
 $b + \frac{b^2 c^2}{y^2} + \frac{b^2 c^2}{y^2}$ . Quod erat faciendum.

Porro, ut constructio adhuc brevior evadat, operæ pretium  
 est considerare, rectam ab  $H$  ad  $G$  ductam ipsi  $GC$  esse perpen-  
 dicularem. Id quod, ab acutissimo nostro Hugenio primum ob-  
 servatum, deinde sic verum deprehendi:

Quoniam enim  $LH$  ipsi  $AG$  est parallela, erit angulus  $HLC$   
 æqualis angulo  $LGA$ . Deinde, quoniam  $GA \propto b$  multiplicata  
 per  $LH \propto \frac{b^2 c^2}{y^2}$  facit  $\frac{b^2 c^2}{y^2}$ , quadratum ipsius  $GL$ , quæ est  $\frac{b^2 c^2}{y^2}$ : erit  
 $AG$  ad  $GL$ , sicut  $GL$  ad  $LH$ . Unde cum in triangulis  $AGL$ ,  
 $LGH$  latera circa æquales angulos ad  $G$  &  $L$  sint proportiona-  
 lia, erunt itidem anguli  $GAL$  &  $LGH$  æquales. Est autem  
 $GAL$  rectus. Quare &  $LGH$  rectus erit.

Hinc talis emergit constructio:

Ducta  $CG$ , secante  $AB$  in  $L$ , agatur ex  $L$  ipsi  $AG$   
 parallela  $LH$ , donec occurrat perpendiculari  $GH$  in  
 $H$ : eritque recta  $HC$ , quæ ex  $H$  per  $C$  ducitur, secans  
 quæsitam.

Non dissimili ratione invenire licet constructionem exempli  
 pag. 47.

Verum enimverò quoniam lineæ  $CP$  alio quoque modo inve-  
 stigari queunt, beneficio Methodi de Maximis & Minimis, cujus  
 Author est Vir Clarissimus D. de Fermat, in Parlamento Tolo-  
 sano Consiliarius, quam Herigonius in supplemento Cursus sui  
 Mathematici exemplis aliquot illustravit, atque ibidem etiam ad  
 inveniendas tangentes adhibere docuit: haud abs re fore duxi, si



254 FRANCISCI à SCHOOTEN

hoc loco viam, quâ lineæ CP ope ejusdem Methodi sint inve-  
niendæ, sequenti calculo exposuero.

Esto, ut supra, GA  $\propto b$ , AE vel LC  $\propto c$ , AM  $\propto y$ , & PA  $\propto v$ :  
eritque GM  $\propto b+y$ , & PM  $\propto v+y$ . Deinde quæro quadra-  
tum ex PC, supponendo illud esse minimum quadratorum o-  
mnium, quæ fiunt à lineis ex P ad Conchoïdem ductis. Hoc pa-  
cto:

$$\begin{array}{l} \text{AM} \quad \text{LC} \quad \text{GM} \quad \text{GC} \\ y \text{ --- } c \text{ --- } b+y, \text{ ad } \frac{bc+cy}{y} \\ \text{subtr. } \left\{ \begin{array}{l} \square \text{GC. } \frac{bbcc+^2bccy+ccyy}{yy} \\ \square \text{GM. } bb+^2by+yy \end{array} \right. \\ \square \text{MC. } \frac{bbcc+^2bccy+ccyy}{yy} - bb - ^2by - yy \\ \text{add. } \square \text{PM. } vv+^2vy+yy \\ \text{fit } \square \text{PC. } \frac{bbcc+^2bccy+ccyy}{yy} - bb - ^2by + vv + ^2vy. \end{array}$$

Hoc autem ut sit minimum, positâ jam AM  $\propto y+e$ , quærat  
rursus, ut ante, quadratum ex PC, quò obtineatur æquatio inter  
id ipsum bis inventum, quâ innotescat quæsitâ quantitas  $y$ , sup-  
ponendo  $e$  esse  $\propto o$ .

$$\begin{array}{l} \text{AM} \quad \text{LC} \quad \text{GM} \quad \text{GC} \\ y+e \text{ --- } c \text{ --- } b+y+e, \text{ ad } \frac{bc+cy+ce}{y+e} \\ \text{subtr. } \left\{ \begin{array}{l} \square \text{GC. } \frac{bbcc+^2bccy+ccyy+^2bccc+^2cccy+ccce}{yy+^2ey+ee} \\ \square \text{GM. } bb+^2by+yy+^2be+^2ey+ee \end{array} \right. \\ \square \text{CM. } \frac{bbcc+^2bccy+ccyy+^2bccc+^2cccy+ccce}{yy+^2ey+ee} - bb - ^2by - yy - ^2be - ^2ey - ee. \\ \text{add. } \square \text{PM. } vv+^2vy+yy+^2ve+^2ey+ee \\ \square \text{PC. } \frac{bbcc+^2bccy+ccyy+^2bccc+^2cccy+ccce}{yy+^2ey+ee} - bb - ^2by - ^2be + vv + ^2vy + ^2vs. \end{array}$$

Hinc

Hinc dempto utrobique  $-bb - ^2by + vv + ^2vy$ , remanebit

$$\frac{bbcc + ^2bccy + ccy^2}{yy + ^2ey + ee} - \frac{^2bcc + ^2cccy + cce}{yy + ^2ey + ee} - ^2be + ^2ve, \text{ seu}$$

$$\frac{bbcc + ^2bccy + ccy^2 + ^2bcc + ^2cccy + cce}{yy + ^2ey + ee} - \frac{^2bcc + ^2cccy + cce}{yy + ^2ey + ee} - ^2be + ^2ve + ^2esv$$

Hoc est, multiplicato per crucem, erit  $bbccyy + ^2bccy^2 + ccy^3 + ^2bbccyy + ^2bccyy^2 + ccy^3 + bbccce + ^2bcccey + cccyy$   
 $\infty bbccyy + ^2bccy^2 + ccy^3 + ^2bccyy + ^2cccy^2 + cccy - ^2bey - ^2beey - ^2be^2yy + ^2ey^2 + ^2eevy + ^2e^2vyy$ . Ac  
 proinde sublati utrinque æqualibus, restabit  $^2bbccyy + ^2bccyy + ^2bbccce + ^2bcccey \infty - ^2bey - ^2beey - ^2be^2yy + ^2ey^2 + ^2eevy + ^2e^2vyy$ . Diviso jam ubique per  $e$ , reserventur quan-  
 titates in  $v$  ductæ ad unam partem, fietque, translatis reliquis,  
 $^2vy + ^2evy + ^2eevy \infty ^2bbccy + ^2bccy + ^2bbccce + ^2bcccey$   
 $+ ^2by + ^2bey + ^2beey$ . Unde neglectis iis, quæ in  $e$  aut  $ee$  ductæ  
 sunt, obtinebitur  $^2vy \infty ^2bbccy + ^2bccy + ^2by$ . Et fit, dividen-  
 do utrinque per  $^2y$ ,  $v \infty \frac{bbcc}{y} + \frac{bcc}{y} + b$ . ut ante. Ubi sciendum,

calculus multo abbreviari posse, si in secunda hac operatione mul-  
 tiplicationes, quibus ad  $e$  aut  $e^2$  ascenditur, continuè omittantur.

Atq; hæc quidem via est, quam & Hugenum secutum fuisse con-  
 fido, prout tangentes curvarum linearum se aliter quàm Fermatius  
 ope hujus ipsius Methodi quævisse mihi asseveravit. Quam  
 viam ut omnium maximè contrahamus, poterimus, invento, ut  
 priùs, quadrato ex  $PC$ , cum subtilissimo ac sæpiùs laudato nostro  
 Huddenio secundam hanc operationem omnino insuper habere,  
 atque rejectis quantitibus  $cc$ ,  $bb$ ,  $vv$ , &  $ss$  reliquis per ipsius  
 $y$  dimensiones multiplicare, invertendo porrò signa  $+$  &  $-$  quan-  
 titatum, per  $y$  &  $yy$  divisarum. Perinde, ut hîc videre est.

$$\square PC. \frac{bbcc}{yy} + \frac{^2bcc}{y} + cc - bb - ^2by + vv + ^2vy \infty ss$$

$$\text{Mult. per } \frac{yy}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1}$$

$$\frac{^2bbcc}{yy} - \frac{^2bcc}{y} - ^2by + ^2vy \infty 0$$

$$^2vy \infty \frac{^2bbcc}{yy} + \frac{^2bcc}{y} + ^2by$$

$$\text{Et fit } v \infty \frac{bbcc}{y} + \frac{bcc}{y} + b. \text{ ut ante. Atque ita de aliis.}$$

Cate-



Cæterum quod ad alias Methodos attinet, quibus tum Maximi & Minimi determinatio, tum tangentium sive secantium harum inventio, tum etiam infinitorum aliorum difficiliorum Problematum solutio obtineri queunt, poteris eas ab eodem Huddenio expectare; qui adeo multa ac præclara circa hæc invenit, ut neminem putem repertum iri, qui cum eo in his sit æquiparandus. quippe is non tantum Maximi aut Minimi determinationem, cum quaestio non nisi unum tale agnoscit, exhibere valet; sed etiam, quando complura nec non vario modo infinita Maxima aut Minima admittit, viâ omnium simplicissimâ elicere novit.

Ad hæc si superiori modo ipsam tangentem Conchoïdis C T investigare lubeat, ponatur, ut ante,  $GA \propto b$ ,  $AE$  vel  $LC \propto c$ ,  $CM$  vel  $AB \propto x$ ,  $MA$  vel  $BC \propto y$ ,  $ET \propto v$ , &  $ES \propto f$ : eritque  $ME \propto c - y$ , &  $MT \propto c - y + v$ . Tum fiat, propter similitudinem triangulorum S T E & C T M, ut T E ad E S, hoc est,  $v$  ad  $f$ , ita T M, hoc est,  $c - y + v$ , ad M C.  $\frac{cf - fy + fv}{v} \propto x$ . Hinc cum & supra inventum sit  $xy \propto \sqrt{bbcc + ^2bccy - bbyy + ccyy - ^2by^3 - y^4}$ , id est, dividendo utrinque per  $y$ ,

$x \propto \frac{\sqrt{bbcc + ^2bccy - bbyy + ccyy - ^2by^3 - y^4}}{y}$ : erit  $\frac{cf - fy + fv}{v} \propto \frac{\sqrt{bbcc + ^2bccy - bbyy + ccyy - ^2by^3 - y^4}}{y}$ . Unde quadratis singulis partibus ordinatâque æquatione invenitur

$$\begin{array}{r} y^4 \propto +^2 c f f y^3 + c c v v y y + ^2 b c c v v y + b b c c v v \\ +^2 v f f f - b b v v \\ -^2 b v v - c c f f \\ -^2 c v f f \\ - v v f f \\ \hline f f + v v. \end{array}$$

Hoc est, translatis quantitibus omnibus ad unam partem, habebitur  $y^4 - ^2 c f f y^3 - c c v v y y - ^2 b c c v v y - b b c c v v \propto 0$ ,

$$\begin{array}{r} -^2 v f f f + b b v v \\ +^2 b v v + c c f f \\ +^2 c v f f \\ + v v f f \\ \hline f f + v v \end{array}$$

Deinde, ad inveniendas quantitates  $v$  &  $f$ , positâ  $y \propto c$ , seu  $y - c \propto 0$ ,

300, multiplico  $y - e \infty 0$  per  $y - e \infty 0$ , & fit  $yy - ey + ee \infty 0$ .  
 æquatio duas habens radices æquales. Quam porro, ut ad æquē-  
 multas cum præcedente dimensiones ascendat ac ejusdem cum il-  
 la sit forma, multiplico per  $yy - fy - gg$ , & provenit  
 $y^4 - ey^3 + ee yy - eefy - eegg \infty 0$ . Cujus itaque termi-  
 -  $f$   $+^2 ef$   $+^2 e gg$   
 -  $gg$

nos separatim comparo cum terminis præcedentis. Ultimus ter-  
 minus, qui hic est quintus, dat  $gg \infty \frac{bbccvv}{eef + eevv}$ , quartus dat  
 $f \infty \frac{bbccvv + bccvv}{eef + eevv}$ , tertius dat  
 $ff \infty \frac{bbccvv + bccvv + eevv + aeevv - bccvv}{eef + eevv + eevv - e}$ , & secun-  
 dus dat  $v v \infty e^2 ff v + e^2 ff$   
 -  $e^2 ff$  Quocirca, ut obtineatur  $v$ ,

$$e^2 + be^2 + bbcc + bccc.$$

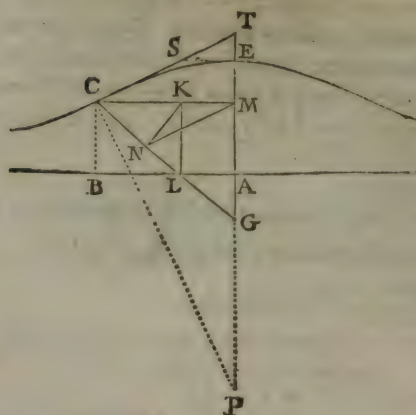
si ipsius  $ff$  valor jam inventus multiplicetur per  
 $\frac{evv + ee^2 - e^2}{e^2 + be^2 + bbcc + bccc}$ , abbreviando prius, ad facilitatem opera-  
 tionis, numeratorem prioris & denominatorem posterioris fra-  
 ctionis per  $e + b$ , ac deinde denominatorem prioris & numerato-  
 rem posterioris fractionis per  $eev + eee - e^2$ , exurget  $e^2 - be^2$   
 $+ eee + bccc \infty e^2 + e^2 v + ee^2 + bccc + bccv + be^2$ . Fiet-  
 que, ordinatâ æqualitate,  $v \infty \frac{-be^2 + bccc + eee - be^2 - ee^2}{bce + e^2}$ .  
 Seu, quia  $y$  est  $\infty e$ , erit  $v \infty \frac{-be^2 + bccv + eevv - by^2 - e^2}{bce + e^2}$ .

Denique, inventâ quantitate  $v$ , facile est invenire quantita-  
 tem  $f$ . Si enim in superiori æquatione  $\frac{ef - fy + fv}{v}$   
 $\infty \frac{vbbcc + bccv - bbyy + eevv - by^2 - e^2}{y}$  in locum  $v$  subroge-  
 tur valor ejus nunc inventus, obtinebitur

$$f \infty \frac{-bce + bccv + eevv + bbyy}{y^2 + bbyy + eevv + bccv} \sqrt{bbcc + bccv - bbyy + eevv - by^2 - y^2}.$$

Quod ad constructionem hujus attinet, quoniam ipsa, quam  
 inveni, haud inconcinna mihi est visa, placuit eam hic paucis sub-  
 necere.





Ductâ ex C super GE perpendiculari CM, agatur GC, secans AB in L; & ex L ducatur LK parallela GE, occurrens ipsi CM in K. Deinde ex K demissâ KN perpendiculari ad CG, jungatur NM: eritque CT huic parallela tangens quæsitâ.

Quibus explicatis facile etiam est hic ostendere, quoniam pacto punctum Conchoïdis C, quod duas ejus portiones, concavam & convexam, à se invicem distinguit, investigari queat. De quo egit Nobilissimus D. Hugenius ultimo Problematum Illustrium, quæ de Circuli magnitudine inventis adjecit.

Etenim inventâ ad hoc, ut ante, æquatione

$$\begin{array}{rcl}
 y^4 - 2cfsy^2 - ccvvyy - 2bccvvy - bbccvv & = & 0, \\
 - 2vff & + & bbvv \\
 + 2bvv & + & ccfs \\
 & + & 2cvff \\
 & + & vvff \\
 \hline
 & = & vv + ff
 \end{array}$$

quoniam ex puncto T, utcumque in producta GE accepto, nulla recta duci potest, Conchoïdem in aliquo puncto tangens, quæ, seu postquam est producta, hanc ipsam in alio puncto non secat, exceptâ tantum rectâ, quæ per flexus punctum ducitur: requiritur ut dicta æquatio ad puncti hujus determinationem tres admit-

tat

rat radicis valores, qui omnes inter se sint æquales. Quod ipsum ut fiat, contero æquationem superiorem cum æquatione  $y^3 - 3ey + e^3 = 0$ , in qua  $y$  tres habet valores æquales, qui singuli sunt  $\propto e$ . Hanc autem, ut ad æquæ multas dimensiones ascendat, & ejusdem cum præcedenti sit formæ, multiplico per  $y + f$ , & prodit æquatio  $y^4 - 3ey^3 + 3eey^2 - e^3y - e^3f = 0$ .

Cujus termini si cum alterius terminis comparentur, inveniuntur inde  $f \propto \frac{bbccvv}{e^3ff + e^3vv}$ ,  $ff \propto \frac{3bbccvv}{e^4} + \frac{3bccvv}{e^3} - vv$ ,  $v \propto \frac{bbcc + 3bcc + cccc}{3bcc - 3bcc} - b - c$ , &  $e^3 \propto -3bcc + 3bcc$ , seu, quia  $y$  est  $\propto e$ ,  $y^3 \propto -3byy + 3bcc$ .

Quoniam autem hæc æquatio Cubica est, neque ad Quadratam reduci potest, superest ut valorem radicis  $y$  per sectiones Conicas determinemus. At verò cum æquationes omnes inferiores construi etiam queant beneficio linearum curvarum, quæ sunt superiorum generum, non ingratum fore judicavi, si hic ulterius exponerem, quo pacto ope datæ Conchoïdis C E Problema propositum solvi possit, sic ut ad constructionem ejus non nisi regula atque circino utamur, haud secus ac si Problema foret Planum. Quemadmodum id ab eruditissimo ac præstantissimo Viro-luvene D. Henrico van Heuraet, Harlemono-Batavo, inventum fuit, mihi quæ ab eo communicatum.

Esto, ut ante,  $GA \propto b$ ,  $AE$  vel  $LC \propto e$ ,  $BC$  vel  $AM \propto y$ , &  $AT \propto z$ . Unde ut supra pro  $AP$  inveniuntur  $\frac{by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$

$$\begin{array}{r} \text{add. A M.} \quad y \\ \hline \text{P M.} \quad \frac{y^3 + by^3 + bccy + bbcc}{y^3} \\ \hline \text{M T.} \quad z - y \\ \hline \square \text{P M T.} \quad \frac{-y^4 + 3by^3 - 3bccy + bbcc}{y^3} \\ \hline \text{Est autem } \square \text{C M.} \quad \frac{-y^4 - 3by^3 + 3bccy + bbcc}{y^3} \end{array}$$





Igitur si in æquatione  $ce + be - bz = 0$  in locum  $e$  substituat hie valor inventus, habebitur:

$$\begin{array}{r} 81bbz^2 + 162b^2z - 108bbccz - 204b^3ccz - 12bbcc^2 \\ + 81b^4 - 12b^3c - 96b^2cc \\ \text{div. per } 3b: 27bz^2 + 54b^2z - 36bbccz - 68bbccz - 4b^3c^2 \\ + 27b^3 - 4c^2 - 32b^2cc \\ \text{div. per } z + b: 27bz^2 + 27bbz - 36bbccz - 32bbcc \\ - 4c^2 \\ \text{div. per } 27b: \text{Et fit } z^2 + bz - ccz - 32bbcc \\ - 4c^2 \\ 27b \end{array}$$

Jam ut æquatio hæc ope circuli ac datæ Conchoïdis solvatur, ponatur  $GA \propto b$

$AE \propto c$  Tum fiat, ut sequitur.

$AT \propto x$

$TC \propto y$

&  $AM \propto z$ , eritque  $MT \propto x - z$ .

$$\begin{array}{l} \text{Subtr. } \begin{array}{l} \square CT. yy \\ \square MT. xx - xz + zz \end{array} \quad \square CM. \text{Ex natura Conchoïdis.} \\ \quad \square CM. yy - xx + xz - zz \\ \hline yyz - xzz + xz^2 - z^3 - z^4 - bz^2 - bbz + ccz + bccz + bbcc \\ + xz^2 + yyzz - bccz - bbcc \\ + bz^2 - xxzz - bb \\ \text{div. per } x + b: -cc \\ \hline + yy \\ - xx \\ \text{Et fit } z^2 + bz - ccz - bbcc \\ - cc \\ x + b \end{array}$$

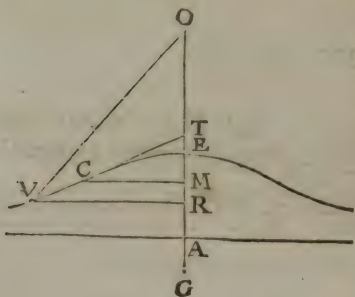
Hinc cum termini hujus æquationis cum terminis proximè antecedentis sint comparandi, & quidem ad inveniendas quantitates  $x$  &  $y$  tres essent æquationes querendæ: facio ut in eadem æquatione tertius terminus sit ad quartum, sicut tertius hujus est ad quartum. In quem finem secundum illius terminum multiplico



$$z^3 + bz^2 - \frac{4}{3}ccz - \&c. \quad \infty 0$$

$$\begin{array}{r} 966 \qquad \qquad 8164 \\ 1666 + 1cc \quad 25664 + 6466cc + 4cc \\ \hline 2^3 + 963 \qquad \qquad 2764cc \\ 1666 + 1cc \quad 22 - \quad 6464 + 1666cc + 4cc \quad 2 - 8cc. \infty 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{27b^4cc}{64b^4+16bbbcc+c^4} \propto \frac{bcc}{x+b} \\ \frac{27b^3}{64b^4+16bbbcc+c^4} \propto \frac{1}{x+b} \\ \frac{27b^3x+27b^4+16bbbcc+c^4}{x} \propto \frac{64b^4+16bbbcc+c^4}{27b^3} - b. \end{array}$$



Igitur fumendo in axe li-  
neam A O

$$\propto \frac{64b^4 + 16bbcc + c^4}{27b^3} - b,$$

eamque vocando  $x$ , si ex  
puncto  $O$  intervallo  $OV$

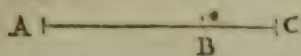
$$\propto \sqrt{\frac{9b^3x + 9b^4}{8bb + cc}} + xx + cc - bb$$

arcus Circuli describatur,  
atque ex sectionis puncto V  
ducatur ad A O perpendicu-  
laris VR: erit AT, quæ se

Unde facile est invenire lineam AM. Oñstñm enim est  $yy + 4by - 3bz = 0$ .

Denique cum inventio supponendi duas ejusdem formæ æqua-  
tiones, ad comparandum separatim omnes terminos unius cum  
omnibus terminis alterius, non tantum ad inveniendas tangentes  
aut secantes curvarum linearum, quemadmodum fuit expolitum,  
adhiberi possit; sed ipsa generalis sit atque infinitis aliis Proble-  
matibus resolvendis, ut Author asserit, inservire queat: haud inuti-  
le fuerit hic ulterius quoque exponere, quo pacto illam ad Maxi-  
mi aut Minimi determinationem applicari possit deprehendi, pro-  
ponendo in eum finem sequentia Problemata.

## Datam



Datam rectam lineam  
AC secare in puncto B,  
ut parallelepipedum,  
quod fit sub quadrato u-  
nius partis AB & altera

parte BC, sit omnium parallelepipedorum, sic facto-  
rum, maximum.

Esse AC  $\propto a$ , & AB  $\propto x$ : eritque BC  $\propto a - x$ . Deinde ma-  
ximum solidum, cui parallelepipedum quæsitum statui potest æ-  
quale, esto  $b^3$ . Quibus sic politis, si quadratum ex AB  $\propto xx$  mul-  
tiplicetur per BC  $\propto a - x$ , proveniet  $axx - x^3 \propto b^3$ , seu  
 $x^3 - axx + b^3 \propto 0$ . Jam factâ  $x \propto e$ , seu  $x - e \propto 0$ , multi-  
plico  $x - e$  per  $x - e$ , & fit  $xx - ex + ee \propto 0$ . Quam porro,  
ut ejusdem sit formæ cum præcedente, multiplico per  $x + f$ , &  
exurgit  $x^3 - exx + eex + eef \propto 0$ . Ex quarum mutua inter  
 $+f$   $-ef$

se collatione eliciuntur hæ tres æquationes  $-e + f \propto -a$ ,  $+ee$   
 $-ef \propto 0$ , &  $ee \propto b^3$ : quæ resolutæ dant  $f \propto e$ ,  $e$  seu  $x \propto \frac{2}{3}a$ ,  
&  $b^3 \propto \frac{8}{27}a^3$ . Quod ipsum docet, ad secandam lineam AC, qua-  
lis requiritur, eandem in B ita esse dividendam, ut AB ipsius AC  
contineat duas tertias partes; & maximum solidum, cui paralle-  
lepipedum quæsitum adæquari potest, esse  $\frac{8}{27}a^3$ .

Dividere  $p$  planum in tria plana proportionalia, ita  
ut solidum, quod fit ex ductu summæ duorum priorum  
in latus secundum vel duorum posteriorum in latus  
primum, sit omnium maximum.

Assumptis ad hoc  $x$  pro latere primo, &  $y$  pro latere secundo,  
sient inde proportionalia plana  $xx$ .  $1^{um}$

$xy$ .  $2^{um}$

$yy$ .  $3^{um}$

Et manifestum est,  $xx + xy$ , quod fit ex  $xx + xy$ , summâ  
duorum priorum planorum, in latus secundum  $y$ , esse æquale ei,  
quod fit ex  $xy + yy$ , summâ duorum posteriorum planorum, in  
latus primum  $x$ . Superest ut  $xx + xy$  sit omnium ejusmodi so-  
lido-



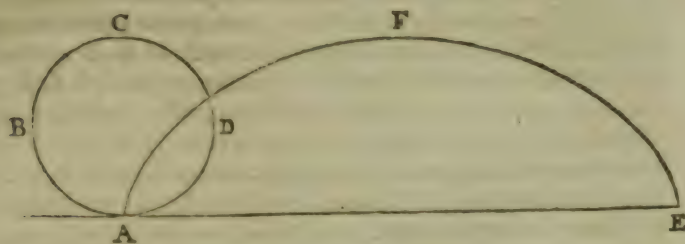
lidorum maximum. Quoniam autem  $xx + xy + yy$  est  $\propto p$   
 vel  $yy \propto p - xx - xy$   
 mult. per  $x$   $x$

vel etiam  $xyy \propto px - x^3 - xxy$ :

Hinc si pro  $xyy$  dicti solidi  $xyy + xyy$  substituantur  $px - x^3 - xxy$ , habebitur  $px - x^3$ . Quocirca ut  $px - x^3$  fiat maximum solidum, quod esse possit, intelligatur ipsum æquale solido  $q$ : eritque  $x^3 - px + q \propto 0$ . Deinde facta  $x \propto e$  seu  $x - e \propto 0$ , multiplico  $x - e$  per  $x - e$ , & fit  $xx - x^3 + ee \propto 0$ . Quam rursus, ut eandem formam habeat cum præcedenti, multiplico per  $x + e$ , & exsurgit  $x^3 - x^3 + x^2e + x^2e - x^2e + x^2e \propto 0$ . Ex quibus binis æquationibus, si singuli termini unius cum singulis terminis alterius comparentur, elicio  $x \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2}p}$ , &  $q \propto \frac{2}{3}p \sqrt[3]{\frac{1}{2}p}$ . Eodem modo invenitur  $y \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2}p}$ . Quod ipsum monstrat, ad dividendum  $p$  planum in tria plana proportionalia, maximum solidum, quod ex ductu summæ duorum priorum in latus secundum vel ex ductu duorum posteriorum in latus primum gignitur, esse illud, quod obtinetur dividendo  $p$  planum in tria plana æqualia. Et sic de aliis.

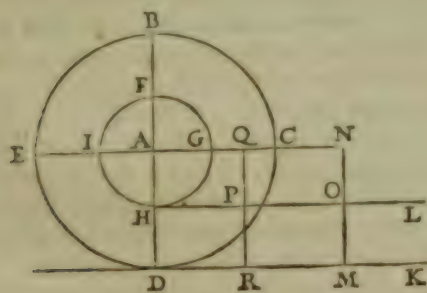
Cæterum, cum allatis exemplis satis superque sit ostensum, quâ ratione lineæ rectæ inveniri possint, secantes lineas curvas in Geometriam recipiendas in datis punctis ad angulos rectos: lubet etiam afferre modum ducendi illas in iis curvis, quas pro Geometricis pari jure habere non licet. Qualem Dominus des Cartes excogitavit, atque jam pridem ejus exemplum R. P. Mersenne per literas ostendit in curva, quæ Cycloïdes sive Trochoïdes appellatur, quam Vir Clarissimus, Evangelista Toricellius, scribit à Galilæo Galilæi, prædecessore suo, primum fuisse consideratam; cujusque ulteriori speculationi ipsum postea, ut & Virum Celeberrimum, D. de Roberval, Mathematicum in Academia Parisiensi Professore Regium, se addixisse novi. Originem autem ducit ex motu puncti, in rota sive circulo assumpti, super rectam aliquam lineam circumvoluti.

Ut



Ut si super recta linea AE circumvolvatur rota sive circulus ABCD, donec punctum ejus A, in quo dictam lineam tangit, eidem rursus occurrat in E: describet punctum A hoc motu lineam curvam AFE, quæ Trochoïdes sive Cycloïdes appellatur. Idem intellige de quovis alio puncto, extra vel intra rotam sive circumulum assumpto, excepto tantum ejus centro.

Jam ut in genere ostendatur, quâ ratione lineæ rectæ duci possint, quæ hæc curvas secant in datis punctis ad angulos rectos; non abs re fuerit cum Aristotele hic explicare, quo pacto inæquales circuli, qui circa idem centrum constituti ac conjuncti circumvolvuntur, æquales rectas lineas absolvant.



Sunto ergo duo circuli inæquales, major quidem BCDE; minor autem FGH I, idem habentes centrum A: sintque diametri majoris BD, EC; minoris verò FH & IG, sese ad angulos rectos

L I



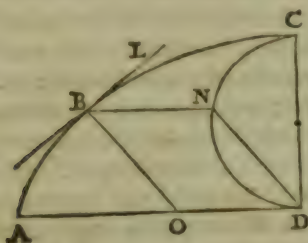
ctos secantes in A. ita ut quadrans circuli majoris sit CD; minoris verò GH. Jam igitur ut pateat ratio, quâ hi circuli, simul circumvoluti, æquales lineas absolvant; concipiatur primum majorem BCDE dextrorsum moveri super recta DK, & minorem FGHI ad motum illius describere lineam rectam ipsi DK parallelam, quæ sit HL. Unde manifestum, cum punctum C pervenerit ad M, existente arcu DC æquali rectæ DM, semidiameter quoque AC tunc fore perpendicularem super DK in M; ita ut coincidat cum MN, hoc est, punctum C cum puncto M, & punctum A cum puncto N. Ac proinde cum punctum G circuli minoris sit in recta AC: sequitur ipsum quoque post hujus quadrantis devolutionem cadere in punctum O; ita ut semidiameter AG circuli minoris transferatur in NO. Adeò ut, NO æquali existente & parallelâ ipsi AH, ipsa quoque HO sit æqualis futura ipsi AN seu DM, & singulæ rectæ DM, HO separatim ab utroque circuli quadrante eodem tempore peragrentur. Idem de integris circulis est intelligendum.

Non secus ostendetur, si moveatur circulus minor FGHI super rectam HL, secum deferens circulum majorem BCDE, sibi affixum in centro A, lineas rectas æquales absolvi. Devoluto enim circuli minoris quadrante HG super rectam HL, ab H versus L; ita ut rectam lineam HP sibi æqualem percurrat: ducatur per P recta QPR, secans rectam HL ad angulos rectos in P; sed AN & DK in Q & R. Quo facto, perspicuum est, cum punctum G est in P, punctum quoque A esse in Q, rectamque AG super rectam QP. Atque ideo, cum punctum C circuli majoris existat in linea AG producta, patet, illud post hujus quadrantis devolutionem inventum iri in puncto R, rectamque DR æqualem fore rectæ AQ seu HP, & singulas eodem temporis spatio ab utroque circuli quadrante perfici. Quod & de tota circuli circumferentia concludere licet. E quibus tandem liquet, quâ ratione circulus circumvolvi possit, ut rectam absolvat lineam, quæ circumferentiæ ejus sit vel æqualis, vel major, vel minor.

Sed de supra dicta linea AFE notandum, eam duobus motibus describi, inter se distinctis; recto nempe, quo circulus ABCD defertur ab A ad E; & circulati, quo punctum in ejus circumferentia A (quod Trochoïdem describit) rotatur circa centrum, dum movetur per lineam rectam ipsi AE æqualem & parallelam.

Qui-

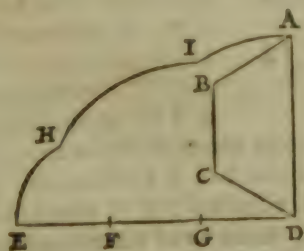
Quibus sic explicatis, ut ad propositum redeamus, atque rectam, quæ Trochoïdem in dato puncto tangat, ducamus: sciendum est, lineam rectam, transeuntem per punctum dictum, & punctum, in quo rota basin, dum punctum in Trochoïde datum describitur, contingit, secare semper tangentem quæsitam ad angulos rectos.



Ut si invenienda sit linea recta, tangens in B curvam siue Trochoïdem ABC, descriptam super basin AD per punctum aliquod circumferentiæ rotæ DNC, super basin AD circumvolutæ: oportet tantum per punctum B rectam lineam ducere BN, parallelam basi AD; & deinde ab N (ubi rotæ occurrit) ad D, (ubi rota basin tangit) rectam ND; tumque eidem parallelam BO; ac denique huic perpendiculararem BL: Quæ erit tangens quæsitæ.

Cujus rei brevem atque simplicem demonstrationem affert, ut sequitur.

Si super rectam lineam circumvolvatur polygonum aliquod rectilineum, erit linea curva, quæ per aliquod ejus punctum describitur, composita ex pluribus circulorum portionibus, quarum tangentes ad singula earum puncta normaliter secant lineas rectas, quæ ab ipsis ad puncta, in quibus polygonum, unamquamque portionem describendo, basin contingit, ducuntur.



Exempli gratiâ, si faciamus ut volvatur Hexagonum ABCD super rectam EFGD, describet punctum ejus A, lineam curvam EHIA, compositam ex arcu EH, qui describitur, dum Hexagonum hoc contingit basin in puncto F (quod ejusdem arcus est centrum); & ex arcu HI (cujus centrum est punctum G); ut

Ll 2

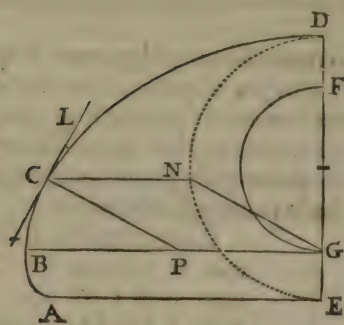
& ex



& ex arcu  $IA$  (cujus centrum est punctum  $D$ ): per quæ centra transeunt omnes rectæ, quæ dictorum arcuum tangentibus ad angulos rectos occurrunt. Quod cum accadat polygono centies millenorum millium, palàm est, idem convenire quoque Circulo.

*Verba Authoris.*

Cæterùm possem hanc tangentem alio modo, & meâ sententiâ elegantiori, magisque Geometrico demonstrare; verùm quoniam proluxior foret, & brevitati hîc mihi consulendum videtur, in præsens ei describendo superfedebo. Notandum solummodo est, cùm basis hujus Trochoïdis æqualis est circumferentiæ rotæ, quam super eandem basin ad ejus descriptionem circumvolvi imaginamur, curvam hanc, à fornice circulari non absimilem figuram, referre: hoc est, quòd tangens utriusque ejus extremi puncti ad basin sit perpendicularis. Sed cùm minor est, quòd tunc utraque extremitas introrsum sit involuta, ita ut complures revolutiones hanc repræsentent figuram



Ad cujus Trochoïdis tangentes inveniendas, atque sciendum ubi se involvere incipiat: imaginandum est, punctum  $D$ , à quo describitur, esse extra rotam. Deinde, duæ supponendæ sunt bases; una  $AE$ , supra quam Trochoïdes  $ABCD$  per punctum  $D$  est descripta; & altera  $BG$ , super quam rota  $FG$  secum deferens

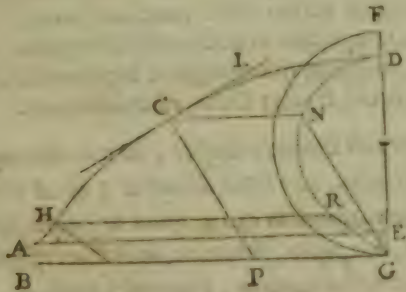
circulum  $DE$  sibi affixum circa ejus centrum est circumvoluta, cujusque semicircumferentia dimidiæ basi  $AE$  est æqualis. Ubi sciendum, tangentes inveniri per circulum  $DE$  & punctum  $G$ , ubi rota  $FG$  basin  $BG$  contingit. Adeò ut ad ducendam lineam rectam, quæ tangat hanc Trochoïdem, verbi gratiâ, in puncto  $C$ , opus tantum sit ducere  $CN$  parallelam basi  $AE$ , occurrentem circu-

circulo D E in puncto N; tum verò junc̃tæ N G parallelam C P: quæ ipsi tangenti quæsitæ erit perpendicularis. Ita ut perspicuum sit, punctum B, ubi hæc secunda basis B G Trochoïdi occurrit, fore illud, ubi ipsa se introrsum involvere incipiet: quandoquidem linea, quæ illam ibidem tangit, ad basin A E perpendicularis existit.

Denique si basis Trochoïdis major fuerit circumferentiâ circuli, qui per assumptum punctum, quod eam designat, circa rotæ centrum describitur: binæ extremitates extrorsum erunt inflexæ: ita ut complures ejusmodi linearum revolutiones hæc exhibeant figuram.

Cujus Trochoïdis tangentes ut inveniuntur, atque ſciatur ubi ſe inflectere incipiat,

imaginandum est, punctum, quod ipsam designat, esse intra rotam: adeoque secundum basin esse  $B G$ , supra quam rota  $F G$ , cujus circumferentia huic basi est æqualis, circumvolvatur, interea dum punctum  $D$ , Trochoïdem designans, super primam basin  $A E$  describit circulum  $D E$ , circa rotæ centrum. Jam ut inveniaturs linea, quæ ipsam in puncto  $C$ , utcumque in Trochoïde assumpto, tangat: ducatur  $C N$  parallela basi, occurrens circulo



DNE in puncto N. Tum ab N ad G, ubi rota FG basin suam  
contingit, ductâ rectâ NG, agatur ipsi parallela CP: eritque  
recta CL, quæ ad eam perpendicularis ducitur, tangens quadrata.  
Porro ad inveniendum punctum H, ubi Trochoïdis portio AH  
desinit

definit



definit esse concava, & HCD convexa, opus tantum est à puncto G rectam ducere GR, quæ tangat circulum DRE in puncto R; tum ab R rectam RH, parallelam basi, & occurrentem Trochoïdi in puncto H. Quod erit quæsitum.

Ubi notandum, nullam dari lineam rectam, quæ Trochoïdem hanc AHCD tangat in puncto H: quandoquidem illud ipsum duas ejus portiones, quarum una est concava, & altera convexa, distinguit.

Deinde observandum, quod ea, quæ de tangentibus Trochoïdum, per rotam circularem descriptarum, hic allata sunt, etiam omnibus aliis Trochoïdibus competant, quæ circumvolutione aliarum quarumlibet figurarum describuntur.

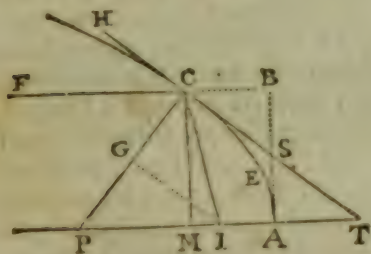
Denique, quod lineæ hæ sint Mechanicæ, & è numero earum, quæ in hac Geometria repudiantur; adeò ut nemini mirum videri debeat, quod tangentes earum non inveniantur per regulas ibi expositas, cum ad ipsas non referantur.

○ ○ *Quâ quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese interfecabunt, per quæ secunda hæc Ovalis erit ducenda.*] Notavit hic Clarissimus Hugenius, secundam hanc Ovalem (quod animadversione dignum est) uno casu Circulum perfectum evadere, cum nempe FA ad AG eandem rationem habet, quam  $\frac{5}{6}$  A ad A 6. Adeoque radios lucis, ad punctum aliquod tendentes, ope superficiei Sphæricæ ad datum aliud punctum omnes accuratè cogi posse. Quod se apertiùs in tractatu de Dioptriciis demonstraturum suscepit, in quo multa egregia ac ingeniosè à se inventa, quæ huc spectant, brevi, si volet Deus, est exhibiturus.

¶ *Et quod ex tali materia constet, ut vim horum radiorum, secundum rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonstravimus, liquet, hoc posito, futurum, ut etiam reflexionum anguli, non secus ac refractionum, inæquales existant, atque eodem modo mensurari possint.*] Hæc refer ad caput 2<sup>um</sup> Dioptricæ, ubi demonstratum est, reflexionis angulum angulo incidentiæ esse æqualem: quoniam vis alicujus radii per reflexionem non diminuitur. Sicut per refractionem vis radii, transeundo ex uno corpore pellucido in aliud, augetur aut diminuitur, ac propterea angulos

Cæterum quoniam ad radios per reflexionem ac refractionem  
diversimode detorquendos Sectiones Conicæ singularem habent  
usum, atque specula & vitra ad ipsarum figuram expolita miros  
effectus præbent: haud inopportunist fore duxi, si, tum ad peni-  
tiores intellectum eorum, quæ in Dioptrica de figura vitrorum  
ab Authore sunt ostensa, tum ad usum eorum, quæ de inveni-  
endis tangentibus aut secantibus exposita sunt, deinceps hic ad-  
jungerem, quo pacto in axe puncta investigari possint, in quibus radii  
Solis, postquam in superficiem concavam speculi Parabolici in-  
ciderunt, aut per Elliptica vel Hyperbolica vitra transierunt, re-  
flectuntur aut colliguntur.

tus rectum  $\propto r$ .  $MA \propto y$ , &  $IA \propto \tilde{x}$ . Quibus positis cum ex superioribus  $PM$  sit  $\propto \frac{1}{r}$ , &  $AT$  sit  $\propto AM$  seu  $y$ : erit  $PT \propto \frac{1}{r} + y$ , &  $PI \propto \frac{1}{r} + y - \tilde{x}$ . Quoniam autem propter aequales angulos incidentiae & reflexionis  $FCH$  &  $ICT$ , ut & rectam  $PC$  ipsi tangenti  $HT$  perpendiculararem, anguli quoque  $FCP$  &  $PCI$  sunt aequales; atque horum quidem angulus  $FCP$  angulo  $EPI$  sit aequalis: erunt pariter anguli  $PCI$  &  $CPI$  aequales; lineaque  $IG$ , ipsi  $PC$  perpendicularis, rectam  $PC$  bisariam







$xx - aa - az - zz + ay + zy - yy$ , pro quadrato BF. Hinc cum habeatur æquatio inter quadratum BF bis inventum, inveniatur, ordinatâ æqualitate,  $y \propto \frac{aa + az + zz - ax - xz}{a + z}$ .

Esto jam  $DN \propto v$ , &  $NB \propto f$ , eritque  $FN \propto v - y$ . E quibus rursus facile est invenire quantitatem  $y$ , suppositis quantitibus  $v$  &  $f$ . Si enim à quadrato BN:  $ff$  abstulero quadratum FN.  $vv - vy + yy$ , remanebit  $ss - vv + vy - yy$ , pro quadrato BF. Unde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium habebitur  $y \propto \frac{ff - vv - xx + aa + az + zz}{a + z - v}$ .

Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de  $xx$  ordinatâ, fiet  $xx \propto -avx + ssz$

$$\begin{array}{r} -^2vz \\ +^2aa \\ +^2az \\ +^2zz \\ -^2a^2 \\ -^2asz \\ -^2az^2 \\ -^2z^2 \end{array}$$

$z$ .

Porro ut inveniantur quantitates  $v$  &  $f$ , positâ  $x \propto f$ , multiplicetur  $x - f \propto 0$  per  $x - f \propto 0$ , & fit  $xx - fx + ff \propto 0$ , seu  $xx \propto fx - ff$ , æquatio ejusdem formæ cum præcedente. Unde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, emergit  $v$ , hoc est,  $DN \propto \frac{aa + az + zz - xx}{a + z}$ . Quæ à

DI seu  $a + z$  ablata relinquit  $NI \propto \frac{xx}{a + z}$ . Denique cum linea NQ vel FB & linea NM eandem inter se rationem habeant, quam lineæ, quæ refractionem vitri DBK mensurant; & quidem FB ad NM sit, ut BI ad IN: superest ut  $d$  sit ad  $e$ , sicut  $x$  ad  $\frac{xx}{a + z}$ . Et fit, multiplicando extremos, tum medios,

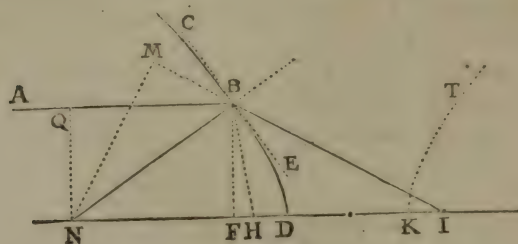
$\frac{dxx}{a + z} \propto ex$ . Unde, resolutâ æqualitate, invenitur HI seu  $z \propto \frac{ae}{d - e}$ . Cui si addantur DH & IK, hoc est,  $a$ , habebitur

Mm

DK



$DK \propto \frac{ad}{d-e}$ . Et patet  $DK$  ad  $HI$  esse, ut  $a$  ad  $e$ , hoc est, ut  $d$  ad  $e$ . Quod ipsum, cum de quovis radio  $AB$  ipsi  $DK$  parallelo similiter intelligendum sit; nos docet, ope vitri Elliptici  $DBK$ , in quo  $DK$  ad  $HI$  eandem habet rationem, quam  $d$  ad  $e$ , hoc est, eandem quam inter se servant lineæ, quæ hujus vitri refractionem metiuntur, radios, qui in aëre existentes diametro  $DK$  sunt paralleli, omnes ita detorqueri, ut, postquam superficiem ejus convexam  $DBK$  transierunt, colligantur simul in puncto  $I$ .



Denique si fuerit vitrum, habens figuram Hyperbolæ  $DB$ , cujus axis sit  $DK$ : ad investigandum, quo pacto radius  $AB$ , qui in vitro existens ipsi  $DK$  est parallelus, se inflectere debeat, postquam superficiem ejus convexam  $DB$  erit egressus, supponendo ejusdem vitri refractionem esse eam, quæ est inter lineas  $d$  &  $e$ , facio  $HD$  vel  $KI \propto a$ ,  $HI \propto z$ , &  $DF \propto y$ : eritque  $FH \propto y - a$  vel  $a - y$ , &  $FI \propto z + y - a$ . Quibus positis, si Hyperbola  $DB$  descripta intelligatur beneficio huius, quemadmodum Capite 8<sup>o</sup> Dioptrices ab Authore fuit indicatum, vel etiam à nobis libro 4<sup>to</sup> Exercitationum nostrarum Mathematicarum, erit, factâ  $BI \propto x$ ,  $BH \propto x - z + a$ . Unde jam facile est invenire quantitatem  $y$ , supponendo quippe quantitates  $x$  &  $z$  esse cognitæ. Si enim à quadrato  $BH$ .  $xx - 2xz + zz + ax - az + aa$  subducatur quadratum  $FH$ .  $yy - 2ay + aa$ , restabit  $xx - 2xz + zz - yy + 2ay + 3aa + 4ax - 4az$ , pro quadrato  $FB$ . Similiter, si à quadrato  $BI$ .  $xx$  auferatur quadratum  $FI$ .  $zz + 2zy + yy - 2az - 2ay + aa$ , relinquetur quoque  $xx - 2xz - 2zy - yy + 2az + 2ay - aa$ , pro quadrato  $FB$ . Hinc, cum habeatur æquatio

inter

inter quadratum FB dupliciter inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate,  $y \propto \frac{zx - zz - aa + 1az - ax}{-1a + 1z + 1v}$ . Esto jam DN  $\propto v$ , & NB  $\propto f$ , eritque NF  $\propto v - y$ . E quibus rursus facile est invenire quantitatem  $y$ , suppositis quantitibus  $v$  &  $s$ . Etenim si à quadrato NB.  $ss$  detrahero quadratum NF.  $vv - 2vy + yy$ , remanebit  $ss - vv + 2vy - yy$ , pro quadrato FB. Unde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium, habebitur  $y \propto \frac{-ss + vv + xx - aa + 1az - zz}{-1a + 1z + 1v}$ . Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de  $xx$  ordinatâ, fiet

$$\begin{array}{r} xx \propto +^3 \zeta \zeta x + ss \zeta \\ -^6 a \zeta - vv \zeta \\ +^4 aa -^2 v \zeta \zeta \\ +^2 v \zeta -^4 aa v \\ -^4 av +^6 av \zeta \\ - \zeta^3 \\ -^2 aa \zeta \\ +^5 a \zeta \zeta \\ +^2 a^3 \end{array}$$

$\zeta$

Porro ut innotescant quantitates  $v$  &  $f$ , positâ  $x \propto f$ , multiplico  $x - f \propto 0$  per  $x - f \propto 0$ , & fit  $xx - 2fx + ff \propto 0$ , seu  $xx \propto 2fx - ff$ , æquatio similis præcedenti. Unde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, invenitur  $v$ , hoc est, DN  $\propto \frac{zx - zz + 1az - aa}{1z - 1a}$ . Cui si addatur DI.  $\zeta - a$ , habebitur NI  $\propto \frac{zx}{1z - 1a}$ . Denique cum linea NM ad NQ vel FB eam habeat rationem, quam inter se habent lineæ refractionem vitri DB mensurantes; & quidem NM ad NQ vel FB sit, ut NI ad IB: relinquitur, ut  $d$  sit ad  $e$ , sicut  $\frac{zx}{1z - 1a}$  ad  $x$ . Et fit, multiplicando extremos, tum medios,  $dx \propto \frac{e zx}{1z - 1a}$ . Unde, resolutâ æqualitate, invenitur HI seu  $\zeta \propto \frac{aad}{d - e}$ . E qua ablatis HD & KI seu  $ae$ , erit reliqua DK  $\propto \frac{aad}{d - e}$ . Et manifestum est HI ad DK esse, ut  $ad$  ad  $ae$ , vel ut  $d$  ad  $e$ . Id quod, dum de quolibet

M in 2

radio



radio A B ipsi D K parallelo perinde est intelligendum, nobis monstrat, beneficio vitri Hyperbolici D B, in quo H I ad D K eam obtinet rationem, quam *d* ad *e*, quæ est ejusdem vitri mensura refractionis, radios, qui in vitro D B existentes axi D K sunt paralleli, egrediendo superficiem ejus convexam D B ita flexum iri, ut egressi omnes coeant in punctum I.

PP Cujus figura est A 3 Y 3, que undique est convexa; praterquam versùs A, ubi paululum concava existit, ita ut ipsa pariter atque præcedens cordi haud sit absimilis.] Ubi etiam sciendum, ex positione punctoꝝum H & F, quemadmodum Nobilissimus Hugenus notavit, contingere posse, ut versùs A convexa existat.

A R-

# A R G V M E N T V M

## T E R T I I L I B R I .

**P**ostquam primo libro exposita sunt ea, quae viam aperiunt ad Auctoris Methodum, quā in resolvendis & construendis Geometriae Problematis utitur, ibidemque simul ostensa est ratio construendi Problemata Plana, hoc est, quae reduci possunt ad aequationes Quadratas, quaeque rectarum linearum atque circuli circumferentiarum ope solvi possunt; accedit deinceps ad Solidorum & Linearum constructiones, hoc est, quae ad aequationes Cubicas altiorumve graduum adscendunt, & ad quorum constructiones, sectionibus Conicis, aliisque curvis lineis magis compositis uti necessarium est. Vbi observandum est, quod, cum peccatum sit non leve apud Geometras, Problema Planum construere per Conica aut Linearia, hoc est, ipsum per improprium solvere genus, ita quoque sit cavendum ne in constructionem ejus adhibeamus lineam aliquam curvam, quae magis sit composita, quam ipsius natura admittit.

Quocirca, postquam secundo libro ostensum est, quo pacto curva linea, mediantibus aequationibus, quae exhibent relationem, quam ipsarum puncta habent ad puncta lineae rectae, distingui possint in certa genera, atque exinde cognosci, quanam illarum magis sint compositae; superest ut explicemus, quomodo sciri possit, utrum Problema aliquod sit vel Planum, vel Solidum, vel denique Lineare. Arguitur autem Problema Planum esse, cum aequatio, ad quam perducitur, postquam ad simplicissimos terminos est reducta, atque amplius reduci nequit, Plana existit, hoc est, ut incognita quantitas ad quadratum adscendat, duasve habeat dimensiones, illaque per rectas lineas & circularum circumferentias inveniri possit, quemadmodum primo libro fuit ostensum. At verò Solidum esse, quando aequatio, quae ex eo deducitur, postquam ad simplicissimos terminos reducta est, talis existit, ut incognita quantitas ad Cubum aut Quadrato-quadratum, hoc est, ad 3 aut 4 dimensiones adscendat, ipsaque non nisi Conicam aliquam sectionem in constructionem adhibendo inveniri queat. Ac Lineare denique, ubi aequatio illa, postquam non amplius reducibilis est, plus quam Solida existit, & incognita quantitas ad 5 aut 6 dimensiones assurgit; vel etiam ad 7 aut 8; vel ad 9 aut 10 dimensiones, atque ita porro in infinitum; ipsaque non nisi per curvam secundae, aut tertiæ, aut superioris denique generis, inveniri potest.

M m 3

Ex



Ex quibus perspicuum est, quod, etiamsi lineæ curvæ omnes, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sint recipiendæ, non ideo tamen indifferenter primâ, quæ fortè occurrat, ad constructionem cujusque Problematis uti liceat; sed eligendam esse semper simplicissimam, per quam possibile sit illud ipsum resolvere. Atque pro simplicissimis non habendas esse illas, quæ facillimè omnium describi possunt, sive quæ Problematis constructionem aut demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim illas, quæ simplicissimi sunt generis, & ad quæsitam lineam determinandam inservire queunt. Ita ut, si peccatum sit in Geometria (quemadmodum supra diximus) Problema aliquod propositum construere per genus Linearum curvarum, magis compositum, quam natura ejus permittit; contra quoque pro vitio habendum sit, si quis inutiliter desudet ad illud ipsum, per genus aliquod linearum simplicius, quam natura ejus admittit, construendum.

Quapropter ut utrumque vitium evitari, ac unumquodque Problema ex proprio suo linearum genere solvi possit, postquam tam Problematis quam ipsius curvæ cognitionem ab æquationum cognitione dependere est ostensum; hinc ad explicandam æquationum naturam progreditur, docens, unamquamque tot admittere posse diversas radices sive differentes valores quantitatis incognitæ, quot ipsa habet dimensiones; earumque interdum quasdam esse, quæ falsa existunt vel nihilo sunt minores; interdum etiam, quæ planè imaginaria; sicut etiam quâ ratione ipsæ æquationes producantur ex suis radicibus in se invicem ductis, ita ut per illas rursus sint divisibiles. Quas divisiones subinde utiles ostendit ad explorandum utrum certæ quedam quantitates sint æquationis radices nec ne, tum etiam ad ipsas indagandas, ac denique ad æquationem ad pauciores dimensiones reducendam. Deinde, postquam ostendit quot veræ & quot falsa radices in unaquaque æquatione haberi possint, sicut etiam quo pacto falsa reddantur veræ, & veræ falsæ, docet, quo pacto qualibet æquatio transmutari possit in aliam, ita ut radices ejus sint certâ quâdam quantitate majores vel minores, quam radices prioris; & quidem quoties id sit, ut quedam ex illis sint veræ, quedam verò falsæ, quod tum augendo veras, falsæ tantundem diminuantur, & contra. Quibus explicatis, tradit, quâ ratione, ad abbreviandam terminorum multitudinem, secundus terminus in qualibet æquatione ope prædictæ transmutationis tolli possit; ita ut in Quadratis æquationibus affectiones sub latere, in Cubicis sub quadrato, in Quadrato-quadratis sub cubo, &c. evanescant. Post hæc, quando quedam ex radicibus veræ sunt, quedam verò falsæ, (id quod ex signorum serie manifestum fit) declarat, facile esse ejusdem transmutationis beneficio efficere, ut radices omnes evadant veræ.

vera. Porro, quemadmodum aequationes Cubicae atque Quadrato-quadratae omnes per eandem curvam lineam solvi possunt, utpote per aliquam trium Coni sectionum; & rursus Surdesolida atque Quadrato-cubicae omnes per aliam curvam, qua uno gradu magis est composita quam sectiones Conicae, atque sic ulterius; sic ut binae priores juxta eandem regulam construi queant, sicut etiam binae posteriores per aliam regulam: Attamen cum in his altioribus aequationibus ob multitudinem terminorum & variationem signorum  $+$  &  $-$  plurima inde (ut diximus) nascantur formulae, regulaeque illa valde foret difficilis ac longa: docet quo pacto aequationes illas attollere liceat, hoc est, Surdesolidas reducere ad Quadrato-cubicas, atque simul efficere, ut, si quae terminorum loca in illis desint, ipsa repleta existant, ut tandem, si quaedam ex radicibus falsa, quaedam autem vera sint, ipsae aequationes transmutari possint in alias, ubi radices omnes sint verae, ipsaeque secundum eandem constructionis regulam inveniri possint. Praeterea, quoniam aequationes frequenter fractionibus & surdis numeris involute occurrunt, aut ipsae etiam prolixos numeros continent; quo fit, ut aut minus expedite resolvantur feliciterque explicentur, aut ut non nisi operosorem in resolvendo industriam requirant: docet deinceps, quo pacto ad evitandas fractiones illas atque surdos numeros, sicut etiam ad transmutandos vastos illos numeros in faciliores, radices earum multiplicari aut dividi possint per quantitatem aliquam cognitam sive numerum. Id quod inservire insuper potest ad inveniendas radices proximas veris, alioquin irrationales; quemadmodum etiam ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini in aequatione aequalem cuidam alteri datae. Caterum ne quid desit, quod ad intelligendas radices alicujus aequationis requiratur, ostendit ipsas interdum sive veras sive falsas solummodo imaginarias esse. Ita ut, licet semper in qualibet aequatione tot talesque, quales supra diximus, imaginari liceat, nonnunquam tamen nullam reperiamus quantitatem, quae aliquibus ex ipsis respondeat.

Postquam igitur ea, quae ad aequationum recognitionem atque emendationem pertinent, expedita sunt, & quidem ex aequationum cognitione (ut supra admonuimus) dependeat quoque Problematum cognitio, ac prout aequatio est vel Quadrata, vel Cubica aut Quadrato-quadrata, vel Surdesolida aut Quadrato-cubica, vel plarium denique dimensionum, Problema, quod ad ipsam reducitur, dicatur vel Planum, vel Solidum, &c, illudque exinde construi queat vel per rectas lineas & Circulos, vel per Sectiones Conicas, vel per lineam curvam uno vel pluribus gradibus magis compositam: Hinc, priusquam ad aequationum resolutionem accedit, ac Problema propositum ex proprio suo Linearum genere solvit, tradit, quo pacto post  
trans-



transmutationes requisitas, quando Problema est Planum & æquatio ad Cubum aut Quadrato-quadratum adscendit, ipsa dividi atque reduci possit ad Quadratum, ita ut deinde regula ac circini beneficio, sicut primo libro monstratum fuit, resolvi queat; ac denique quid in genere observandum sit circa reliquas superiores æquationes. Ita ut post institutas illas divisiones, quando æquatio ad tres quatuorve dimensiones assurgit ipsa quoque amplius dividi nequit, asserere liceat, Problema, quod ad æquationem illam perductum fuit, Solidum existere, nec inde minus vitium reputandum esse, illud per rectas lineas & circulares expedire velle, quàm adhibere Conicas sectiones in constructionem eorum, quæ per regulam & circinum solvi possunt.

Quibus explicatis, accingit se deinceps ad Solidorum Problematum constructionem, postquam reducta sunt ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, & in æquatione secundus terminus est sublatus. Eaque ita præparata, docet, unicâ regulâ ope Parabola facile ac expedite posse construi. In quo sanè eximium atque summi ejus ingenii artificium elucet, à nullo (quod sciam) ante vel excogitatum vel ostensum. Caterùm ut hujus regule facilitas ac usus in Solidorum Problematum constructionibus eniteat, ipsam deinde, in solvendis nobilissimis binis illis, ac celebratis, nec non antiquitus usque adeo agitatæ Problematis; altero scilicet de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis; altero autem de dividendo angulo in tres æquales partes, adhibet. Quæ brevius expeditiusque, quàm ab aliquo hætenus ostensum est, solius Circuli & Parabola ope, scientificè atque Geometricâ ratione resolvit. Vbi tandem declarat (quod animadvertens dignum): in Problematis Solidis omnibus, postquam ad æquationem trium quatuorve dimensionum reducta sunt, non secus hanc regulam ad explicandas earum radices requiri, quàm quatenus ipsa adhibenda est ad inveniendas duas medias proportionales inter duas datas lineas; aut ad secandum datum angulum in tres æquales partes. Quandoquidem natura illarum non finit, ut terminis simplicioribus, quàm per certa quadam Cuborum latera, quorum contentum cognoscitur, aut per subtensas quorundam arcuum, quorum triplum datum est, exprimantur; neque etiam per constructionem aliquam, quæ simul generalior & simplicior sit, determinantur.

Finit à verò Solidorum Problematum constructione, aggreditur demum Surdesolidorum constructionem, hoc est, eorum quæ ad æquationem 5 aut 6 dimensionum reducuntur, & ad quarum constructionem curva linea adhibenda est, quæ uno gradu magis est composita quàm sectiones Conicæ.

Quam

COMMENTARII IN LIBRUM III. 281

Quam ut breviter ac unius regula beneficio resolvere doceat, observari vult ea, quae supra monuimus, nimirum ut aequationes quinque dimensionum attollantur ad sex dimensiones, ipsaeque demum, si opus est, transmutentur in alias, quarum radices omnes sint verae. Qualem autem & quantum in hisce Problematis construendis Geometram se prodiderit Auctor, sanè si id ipsam ex superioribus perspicere cuipiam non contigerit, illud demum vel ex hac sola artificiosissima atque plane stupenda eorum constructione Geometrica, antea ne cogitata quidem, nedum inventa, latere ipsum non potest. E quibus tandem colligere licet, quòd, postquam omnia Geometriae Problemata ad unum quasi Problema revocata fuerint, quod est, ut quaratur tantummodo longitudo quarundam linearum rectarum, quae alicujus aequationis sint radices, reductisque ad eandem constructionem, quae ejusdem generis existunt, tradita simul sit via eadem resolvendi. Adèd ut nullum Problema tam difficile vel arduum, modò aequationem 5 aut 6 dimensionum non excedat, reperiri queat, quod hujus Geometriae Methodo solvi seu construi non possit.

COMMENTARII

I N

LIBRUM TERTIVM.

**V**ERUM saepe accidit, quòd quaedam harum A  
radicum sint falsae, seu minores quam nihil:  
ut, si supponatur  $x$  designare quoque defe-  
ctum alicujus quantitatis, puta 5. ] hoc est,  
quòd  $x$  aequetur  $-5$ , vel  $x + 5$  sit æquale 0.  
Quòd non inepte explicatur per eum, qui plus  
debet quàm est solvendo; vel, cum id, quòd reliquatur, designa-  
mus per  $-$ . Quò referenda est jucunda atque ingeniosa quaestio,  
à laudatissimae memoriae, Mauritio, Principe Auriaco, atque Con-  
federati Belgii gubernatore, olim excogitata, quam Amplissi-  
mus & Prudentissimus Vir D. Henricus Stevinus, Simonis filius,

N n

Do-



Dominus in Alphen, paternarum virtutum hæres unicus, ex pluribus monumentis, ad vitam communem utilissimis, & publicâ luce dignissimis, quæ inter adversaria parentis possidet, pro sua liberalitate mihi communicavit.

A & B, societatem ineuntes, lucrati sunt 12 aureos; quorum A expendit aureos 5; B autem debet aureos 2, hoc est, habet — 2 aureos. Quæritur quantum utrique ex summa debeatur? Respondetur, solvendos esse à B ipsi A, 8 aureos, quamvis lucrum hic esse sit manifestum.

Aliud exemplum de damno.

Personæ duæ A & B jacturam faciunt 12 aureorum, hoc est, habent — 12 aur. Cum igitur A contribuit 5 aur., & B — 2 aur., manifestum fit, ipsi A ex natura quæstionis deberi — 20 aureos, & ipsi B + 8 aur., hoc est, B habebit 8 aureos, etiamsi jacturam factam esse constet.

Quamvis autem non sit usitatum, ut qui aliquid habet in bonis societatem ineat cum eo, qui minus habet quàm nihil; tamen casus occurrere possunt, in quibus hoc contingit. Exempli gratiâ: Duo mercatores Amstelodami habitantes habent quisque institorem suum Venetiis, & quia institoribus istis non satis fidunt, sciuntque inter ipsos esse ininicitias, mandant illis per literas, ut sibi invicem rationem reddant omnis pecuniæ, ad dominos suos pertinentis, quam penes se habebunt eo tempore, quo literas istas accipient; atque si unus fortè aliquid debeat, ut hoc ex alterius pecunia solvatur, & cum residuo ita mercaturam faciant, ut unus nihil emat vel vendat, nisi cum alterius consensu. Ipsi autem mercatores qui certò non sciunt, quid Venetiis eo tempore sint habituri, quo literæ istæ eò pervenient, talem inter se societatem ineunt, ut quisque lucrum aut damnum pro ratione pecuniæ, quam tunc habuerit, sit accepturus. Quibus positis, si contingat unum habere 5000 aureos, alium verò debere 2000 aureos, his 2000 ex alterius pecunia persolutis, tria tantum aureorum millia pro mercibus emendis remanebunt; ex quibus si lucrum fiat duodecim millium aureorum, quod est quadruplum pecuniæ: sequitur ex vi societatis illum qui habuit 5 millia debere 20 millia lucrari,

&

& alium 8 millia amittere. Contra verò si damnum sit 12 millium, qui habuit 5 millia debet amittere 20 millia, quadruplum nempe suæ pecuniæ; alius autem 8 millia lucrari debet, propterea quod à priori sumpserit 2 millia, quæ si emendis mercibus impensa fuissent, damnum 8 millium ei attulissent.

Porro radices hæ falsæ non inconvenienter in Geometria explicantur retrogrediendo, hoc est, ut, quæ designantur per —, retrocedant, sicut illæ, quæ denotantur per +, progrediuntur. Cujus rei exemplum post videbitur.

Inservit autem earum cognitio ad inveniendas veras radices, quippe, falsis cognitis, æquationes facili divisionis ope ad pauciores dimensiones reducuntur, ex iisque veræ eruantur. Cujus rei exemplum in sequentibus habebitur.

Accedit & hoc, quod, postquam tam falsæ quàm veræ radices alicujus æquationis fuerint inventæ, earum beneficio ad plenam totius quæstionis cognitionem atque solutionem perducamur, & casus nonnullos detegamus, de quibus nobis antea nihil certi constabat. Cujus rei exemplum sequentia itidem suppeditabunt.

Unde liquido constat, quod *Æquationis summa, quæ plures radices continet, dividi semper possit per binomium, quod compositum est ex quantitate incognita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem sit, aut plus valore alicujus ex falsis.* Hoc enim ex *Æquationis*, quæ plures radices admittit, constitutione manifestum est: cum æquatio quævis producat ex suis radicibus, in se invicem ductis. Quemadmodum ab Authore fuit explicatum. Unde fit, ut rursus per illas dividi possit, cum id, quod multiplicatione componitur, rursus divisione resolvatur.

Sic si ponatur  $x \propto a$ , hoc est,  $x - a \propto 0$ , & rursus  $x \propto b$ , hoc est,  $x - b \propto 0$ , & denique  $x \propto c$ , hoc est,  $x - c \propto 0$ , atque multiplicemus  $x - a \propto 0$  per  $x - b \propto 0$ , & rursus productum per  $x - c \propto 0$ : exurget *Æquatio*  $x^3 - ax^2 + abx - abc \propto 0$ .

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \\ -c \quad +ac \end{array}$$

Quæ dividi potest per  $x - a \propto 0$ , per  $x - b \propto 0$ , & per  $x - c \propto 0$ ; sed non per  $x$  plus vel minus ullâ aliâ quantitate. Si autem eadem æquatio rursus multiplicetur per  $x + d \propto 0$ , (supponendo  $x$  designare

N n 2



nare quoque defectum alicujus quantitatis, utpote  $d$ , hoc est,  $x$  æquari  $-d$ ) produceretur Æquatio

$x^4 - ax^3 + abxx - abcx - abcd \infty 0$ . Quæ dividi potest

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \quad +abd \\ -c \quad +ac \quad +bcd \\ +d \quad -ad \quad +acd \\ -bd \\ -cd \end{array}$$

per  $x - a \infty 0$ , per  $x - b \infty 0$ , per  $x - c \infty 0$ , & per  $x + d \infty 0$ , & non per  $x$  plus vel minus ullâ aliâ quantitate.

C *Cujus divisionis ope dimensiones ejus in tantum diminuantur.*] Sic dividendo æquationem præcedentem, quatuor dimensiones habentem, per  $x + d \infty 0$ , orietur Æquatio

$x^3 - axx + abx - abc \infty 0$ . In quâ incognita quantitas tres

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \\ -c \quad +ac \end{array}$$

duntaxat dimensiones habet. Quâ rursus divisâ per  $x - c \infty 0$ , prodibit  $xx - \frac{a}{b}x + ab \infty 0$ , æquatio duarum dimensionum. Quæ denuo per  $x - b \infty 0$  divisâ exhibet  $x - a \infty 0$ , æquationem simplicem.

Unde perspicere licet, quâ ratione, in qualibet Æquatione, plures radices habente, quantitas cognita secundi termini, æqualis sit summæ omnium radicum; & quantitas cognita tertii termini, æqualis summæ productorum ex singulis binis; & quantitas cognita quarti termini, æqualis summæ productorum ex singulis ternis, atque ita porro; at verò quantitas cognita ultimi termini sive ipse ultimus terminus, æqualis producto ex omnibus.

Sic cum in æquatione  $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$  tres sint radices 2, 3, & 4, quæ designantur per  $a, b$ , &  $c$ : erit earum summa 9, quæ denotatur per  $-a - b - c$ , æqualis  $-9$ , quantitati cognitæ secundi termini  $-9xx$ . Summa autem productorum ex singulis binis 26, quæ denotatur per  $+ab + bc + ac$ , æqualis  $+26$ , quantitati cognitæ tertii termini  $+26x$ . Et productum ex ipsis tribus, 24, quod denotatur per  $-abc$ , æqualis  $-24$ , quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino.

Eodem modo, si fuerit Æquatio talis:  $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$ , cujus radices sunt 2, 3, 4, &  $-5$ , atque designantur per  $+a, +b, +c$ , &  $-d$ : disponatur ipsa, ut termini,

ni, in quibus incognita quantitas  $x$  pares dimensiones habet, u-  
nam constituent æquationis partem, & reliqui alteram, hoc mo-  
do:  $x^4 - 19xx - 120x + x^3 - 106x$ . Eodem videlicet quo  
hæc:  $x^4 + abxx - abcdx + ax^3 + abcx$ . Præstat enim

$+bc$	$+b$	$-abd$
$+ac$	$+c$	$-bcd$
$-ad$	$-d$	$-acd$
$-bd$		
$-cd$		

illam hæc ita considerare, ut ea, quæ proponuntur, melius expli-  
centur: quoniam hoc pacto radices, earumque producta simul  
addita omnino cum quantitatibus cognitis terminorum æquatio-  
nis, eorumque signis conveniunt. Et manifestum est, summam  
harum radicum efficere  $+4$ , & æqualem esse  $+4$ , quantitati co-  
gnitæ secundi termini  $4x^3$ . Deinde summam productorum ex  
singulis binis efficere  $-19$ , & æqualem esse  $-19$ , quantitati  
cognitæ tertii termini  $19xx$ . Postea summam productorum ex  
singulis ternis efficere  $-106$ , & æqualem esse  $-106$ , quanti-  
tati cognitæ quarti termini  $106x$ . Denique productum ex ipsis  
omnibus in se invicem ductis efficere  $-120$ , & æqualem esse  
 $-120$ , quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termi-  
no  $120$ . Quæ porro, quo pacto intelligenda sint de Æquationi-  
bus, in quibus non omnes termini extant, docebit appendix de  
Cubicarum Æquationum resolutione, quam hisce Commentariis  
subjunximus, ubi ista fufius pertractantur.

*Ex quibus etiam cognoscitur, quot vera & quot falsæ radices  
in unaquaque Æquatione haberi possint. Nimirum, tot in ea  
veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum  
+ & -; & tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur  
duo signa +, vel duo signa -, quæ se invicem sequuntur.*  
Notandum, hæc concernere æquationes, quæ producuntur ex  
suis radicibus, in se invicem ductis, quemadmodum pag. 69 & 70  
est ostensum, quod & de cæteris regulis, ubi signorum + & - fit  
mentio, est observandum. Ut satis declarant priora verba: Ex qui-  
bus etiam cognoscitur, quæ horum verborum cum prioribus cohæ-  
rentiam demonstrant: cum aliàs fieri posset, ut in qualibet Æqua-  
tione non tot radices haberentur, quot incognita quantitas habet





quaquam consonare: concludo æquationem propositam explicabilem tantum esse de unica radice vera, & reliquas duas non nisi imaginarias existere; neque ipsam æquationem magis ex multiplicatione trium radicum productam esse, quàm superiorem,  
 $x^3 - 6xx + 13x - 1000.$

Eodem modo, si habeatur  $z^3 \infty^* - pz - q$ , seu  $z^3 80zz - pz - q \infty 0$ ; inenio è priori suppositione tres falsas radices; è posteriori verò duas veras & unam falsam. Quibus inter se collatis, ut consensus earum appareat, inenio, æquationem propositam unam tantum admittere radicem, nempe falsam; duasque reliquas esse imaginarias: ac proinde æquationem non posse procreari multiplicatione trium radicum.

Similiter, si fuerit  $z^3 \infty^* + pz + q$ , seu  $z^3 80zz - pz - q \infty 0$ ; quoniam è priori suppositione inenio duas falsas & unam veram radicem; & è posteriori duas itidem falsas & unam veram: cognosco, æquationem propositam, multiplicatione trium radicum, quarum duæ sunt falsæ & una vera, produci posse.

Non secus, si habeatur  $z^3 \infty^* + pz - q$  seu  $z^3 80zz - pz + q \infty 0$ ; video in priori suppositione reperiri duas veras radices, & unam falsam: adeo ut concedendum sit, ipsam procreari posse ex multiplicatione trium radicum, quarum duæ sunt veræ, & tertia falsa. Idem de aliis sentiendum. Ubi notandum, radices veras & falsas alicujus æquationis semper esse reales, seu existentes, hoc est, quantitatem aliquam aut defectum quantitatis designantes, quarum valor Arithmetice vel Geometricè exprimi potest; imaginariis verò non item. Ut in æquatione  $xx - 4x + 5 \infty 0$ . Quamvis enim in ea duas nobis imaginari possimus radices; tamen nulla iis respondet quantitas; nec, quocunque tandem modo vel augeantur, vel diminuantur, aliæ quàm imaginariæ fieri possunt. Quod sanè nemini mirum videbitur, modò ex iis, quæ pag. 165 explicuimus, intellexerit, æquationem propositam esse impossibilem; neque ullam veram nec falsam radicem admittere, adeoque nec quantitatem aliquam, quæ ipsis respondeat, inveniri posse. Nisi velis, radices ejus esse  $x \infty 2 + \sqrt{-1}$ , &  $x \infty 2 - \sqrt{-1}$ , quarum certè valor



valor nullo modo comprehendi potest. Non magis quàm si illarum quantitatem Geometricè invenire velimus. Quandoquidem in figura p. 7, describendo ex centro N, intervallo lineæ  $NL \propto 2$ , (utpote æqualis semissi ipsius 4, quantitatis cognitæ secundi termini) circulum  $LQR$ , faciendoque rectam  $LM \propto \sqrt{5}$  (utpote æqualem radici quadratæ ultimi termini 5); circulus descriptus  $LQR$  neutiquam secare aut tangere potest rectam  $MR$ , quæ ipsi  $LM$  ducitur perpendicularis, ad duas in ea radices designandas.

Idem de altioribus æquationibus est intelligendum pag. 85, 86, & 87, cùm Circulus centro E descriptus Parabolam  $FAG$  secare aut tangere nequit; ut & pag. 99, cùm Circulus  $CNQ$  curvam  $ACN$  neutiquam vel tangit vel secat.

E *Nimirum mutando signa omnia + & —, quæ in 2<sup>da</sup>, 4<sup>ta</sup>, 6<sup>ta</sup>, aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis 1<sup>ma</sup>, 3<sup>ma</sup>, 5<sup>ta</sup>, similiumq; locorum, qui per impares numeros designantur, non mutatis.]* Quæ locum quoque habent in æquationibus incompletis, ubi quidam ex imparibus locis desunt, qui cyphrâ sunt supplendi. Ut si fuerit  $x^3 \propto * - 8x - 24$  seu  $x^3 80xx + 8x + 24 \propto 0$ , mutando signa + & — secundi & quarti loci in contraria, fit æquatio  $x^3 80xx + 8x - 24 \propto 0$ , seu  $x^3 \propto * - 8x + 24$ , cujus radix est  $x \propto 2$ , unde radix prioris fit  $x \propto - 2$ .

Eodem modo si sit  $x^3 \propto * 1201x + 14400$ , seu  $x^3 80xx - 1201x - 14400 \propto 0$ , mutatis signis 2<sup>di</sup> & 4<sup>ti</sup> loci, fiet æquatio  $x^3 80xx - 1201x + 14400 \propto 0$ , seu  $x^3 \propto * 1201x - 14400$ , cujus radices sunt  $x \propto 25$ , &  $x \propto \sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$ , nec non  $x \propto -\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$ . Unde radices prioris erunt  $x \propto -25$ , &  $x \propto 12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$ , nec non  $x \propto 12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ . Et sic de aliis.

F *Unde si scribamur summam precedentem, substituendo ubique y pro x, invenietur*

$$\begin{array}{r} y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81 \\ + 4y^3 - 36yy + 108y - 108 \\ - 19yy + 114y - 171 \\ - 106y + 318 \\ - 120 \end{array}$$

$$\underline{y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y} \quad * \propto 0, \text{ vel } y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0. \text{ Vbi vera radix, quæ erat 5, jam est 8, propter ternarium}$$

*narium ipsi additum.*] Notandum hic est, quod, dum, augendo ternario veram radicem æquationis propositæ  $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 12000$ , in æquationem incidimus, tres tantum dimensiones habentem, cujus ideo non nisi tres sunt radices, numerus 3, quo vera radix æquationis propositæ est aucta, sit æqualis alicui ex falsis radicibus, ut liquet ex iis, quæ ab Autore p. 72 paulò post explicantur. Ita, quoniam, diminuendo ternario veras radices æquationis  $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 12000$ , incidimus in æquationem  $y^4 + 8y^3 - 1yy - 8y^*00$ , vel  $y^4 + 8yy - 1y - 800$ , innotescit, unam ex veris radicibus esse 3. Et sic de aliis.

*Nimirum, diminuendo veras radices, quantitate cognita secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.*] Vel etiam hoc modo: Nimirum, diminuendo quantitatem cognitam secundi termini divisam per numerum dimensionum primi, unaquaque verarum radicum, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —. Ut ad tollendum secundum terminum Æquationis  $x^4 - 2ax^3 + 2ax^2 - 2ax - 2000$ , divido  $2a$  per  $4$ , & provenit  $\frac{1}{2}a$ : unde faciendū  $\frac{1}{2}a - x00$ , hoc est,  $\frac{1}{2}a - 200x$ , scribendum est

$+ \frac{1}{2}a^4 - \frac{1}{2}a^3x + \frac{1}{2}a^2x^2 - 2ax^3 + x^4$	pro $x^4$
$& - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}a^3x - 3a^2x^2 + 2ax^3$	pro $- \frac{1}{2}a^3x$
$& + \frac{1}{2}a^4 - 2a^3x + 2a^2x^2$	pro $+ \frac{1}{2}a^2x^2$
$& - \frac{1}{2}a^4 + a^3x - 2a^2x^2$	pro $- a^2x^2$
$& - a^4 + a^3x$	pro $- a^3x$
tum $+ a^4$	, & exsurgit

$+ \frac{1}{2}a^4 + a^3x + \frac{1}{2}a^2x^2 - 2ax^3 + x^400$ , æquatio,  
 $- \frac{1}{2}a^4 + a^3x - 2a^2x^2 + 2ax^3 - 200x$   
 secundo carens termino, & ab illa Autoris differens tantum in quarto termino, qui hic per + denotatur, & illic per —. Unde fit, ut per ea, quæ pag. 78 sunt ostensa, æquationes hæc in eo tantum inter se differant, quod falsæ illius æquales sint veris hujus, & contra, atque ita radicum mutua sit reciprocatio. Quod in aliis quoque evenire reperietur.

Ubi porro opera pretium est considerare, quod, tollendo secundum

Oo



cundum terminum Aequationis  $x^4 + \frac{1}{2}ax^3 - \frac{1}{4}a^2xx - \frac{1}{4}accx -$   
 $aaacc \infty 0$ , (quæ quidem invenitur, cum pro linea CE in qua-  
 stione pagin. 83 ponitur  $x$ ) in eandem incidamus Aequationem,  
 quam invenimus tollendo secundum terminum præcedentis  
 $x^4 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}a^2xx - \frac{1}{4}a^3x + a^4 \infty 0$ , quæ ab illa omnino  
 est diversa, resultans ex investigatione lineæ DF.

Deinde animadversione dignum est, quòd hâc sublatione se-  
 cundi termini Aequationes pagin. 6 & 7 in faciliores sic transmu-  
 tentur, ut earum radices statim se prodant, nec aliâ regulâ ad eas  
 inveniendas opus esse videatur. Etenim, tollendo secundum ter-  
 minum æquationis  $zz \infty az + bb$  seu  $zz - az - bb \infty 0$ , si di-  
 vidatur  $a$  per 2, fit  $\frac{1}{2}a$ , ac ponatur

$$z - \frac{1}{2}a \infty x, \text{ five } z \infty x + \frac{1}{2}a,$$

$$\text{atque pro } zz \text{ reponatur } xx + ax + \frac{1}{4}aa,$$

$$\text{nec non pro } -az \quad -ax - \frac{1}{2}aa,$$

$$\& \text{ addatur} \quad -bb:$$

$$\text{resultabit æquatio hæc } xx^* - \frac{1}{4}aa - bb \infty 0, \text{ vel } xx \infty \frac{1}{4}aa + bb,$$

$$\text{cujus radix est } x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}, \text{ vel } x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Unde sequitur radicem prioris æquationis  $zz \infty az + bb$  fore

$$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}, \text{ vel } z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Quæ ra-  
 dices, cum vera tum falsa etiam inveniuntur tollendo secundum  
 terminum, hoc pacto: ponatur

$$\frac{1}{2}a - z \infty x, \text{ seu } z \infty \frac{1}{2}a - x$$

$$-\frac{1}{2}a - x$$

$$-\frac{1}{2}ax + xx$$

$$\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax$$

$$\& \text{ scribatur } \frac{1}{4}aa - ax + xx \text{ pro } zz,$$

$$\text{atque } -\frac{1}{2}aa + ax \quad \text{pro } -az,$$

$$\text{tum } -bb.$$

$$\text{Et emerget Aequatio } -\frac{1}{4}aa - bb^* + xx \infty 0, \text{ vel } xx \infty \frac{1}{4}aa$$

$$+ bb. \text{ eadem quippe, quæ invenitur, ponendo } z \infty \frac{1}{2}a + x$$

(quod similiter in reliquis sequentibus quadratis Aequationibus  
 locum habet), & fit, ut supra,  $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ , vel

$$x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}; \text{ ac proinde } z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}, \text{ vel}$$

$$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

Eodem

Eodem modo, quia auferendo secundum terminum Aequationis  $yy \propto -ay + bb$ , seu  $yy + ay - bb \propto 0$ , ponitur  $y + \frac{1}{2}a \propto z$ , sive  $y \propto z - \frac{1}{2}a$ ,

atque pro  $yy$  scribitur  $zz - az + \frac{1}{4}aa$ ,

& pro  $-ay$   $+az - \frac{1}{2}aa$ ,

atque deinde  $-bb$ :

prodit Aequatio  $zz - \frac{1}{2}aa - bb \propto 0$ , vel  $zz \propto \frac{1}{2}aa + bb$ ,  
cujus radix est  $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}aa + bb}$ , vel  $z \propto -\sqrt{\frac{1}{2}aa + bb}$ : hinc  
radix prioris erit  $y \propto \sqrt{\frac{1}{2}aa + bb} - \frac{1}{2}a$ , vel  $y \propto -\sqrt{\frac{1}{2}aa + bb} - \frac{1}{2}a$ . Quæ quidem falsa & vera radix invenitur quoque tollendo secundum terminum Aequationis hæc ratione: videlicet, supponendo  $y$  designare etiam defectum alicujus quantitatis, quæ major sit quàm  $\frac{1}{2}a$ , Exempli causâ,  $y \propto -\frac{1}{2}a - z$ ,  
& substituendo  $\frac{1}{2}aa + az + zz$  loco  $yy$ ,  
&  $-\frac{1}{2}aa - az$  loco  $+ay$ ,  
tum  $-bb$ :

unde fit Aequatio  $-\frac{1}{2}aa - bb + zz \propto 0$ , vel  $zz \propto \frac{1}{2}aa + bb$ ,  
cujus radix est  $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}aa + bb}$ , vel  $z \propto -\sqrt{\frac{1}{2}aa + bb}$ ;  
atque aded  $y \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2}aa + bb}$ , vel  $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa + bb}$ . ut ante. Quem modum, tollendi secundum terminum, tanquam diversum ab eo, qui ab Authore pag. 73 est ostensus, notare potes, cum primus & secundus terminus eodem signo + vel - sunt adfecti.

Similiter, cum ad tollendum secundum terminum Aequationis  $zz \propto az - bb$ , vel  $zz - az + bb \propto 0$ , ponendum sit

$z - \frac{1}{2}a \propto x$ , vel  $z \propto x + \frac{1}{2}a$ ,

& scribendum  $xx + ax + \frac{1}{4}aa$  pro  $zz$ ,

&  $-ax - \frac{1}{2}aa$  pro  $-az$ ,

& addendum  $+bb$ :

proveniet Aequatio  $xx - \frac{1}{2}aa + bb \propto 0$ , vel  $xx \propto \frac{1}{2}aa - bb$ ,  
cujus radix est  $x \propto \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}$ , vel  $x \propto -\sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}$ . Et fit  
radix prioris  $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}$ , vel  $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}$ .  
Quæ radix utraque vera est, & alio item modo inveniri potest, si  
nimirum ponatur  $\frac{1}{2}a - z \propto x$  sive  $z \propto \frac{1}{2}a - x$ , & substituatur



$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}aa - ax + xx \text{ in locum } \zeta\zeta, \\ \& -\frac{1}{2}aa + ax \text{ in locum } -a\zeta, \\ \& \text{addatur } +bb: \end{array}$$

exfurgit æquatio  $-\frac{1}{4}aa + bb^* + xx \infty 0$ , vel  $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$ ,  
cujus radix est  $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , vel  $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ . Et fit  
prioris radix  $\zeta \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , vel  $\zeta \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ .  
ut supra.

Denique, quoniam tollendo secundum terminum Æqua-  
tionis  $\zeta\zeta \infty -a\zeta - bb$ , vel  $\zeta\zeta + a\zeta + bb \infty 0$ , ponendum est  
 $\zeta + \frac{1}{2}a \infty x$  sive  $\zeta \infty x - \frac{1}{2}a$ , & subrogandum

$$\begin{array}{l} xx - ax + \frac{1}{4}aa \text{ in locum } \zeta\zeta, \\ \& + ax - \frac{1}{2}aa \text{ in locum } +a\zeta, \\ \text{atque addendum} \quad +bb: \end{array}$$

producetur æquatio  $xx^* - \frac{1}{4}aa + bb \infty 0$ , vel  $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$ ,  
cujus radix est  $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , vel  $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ . Unde  
radix prioris fit  $\zeta \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$ , vel  $\zeta \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$ .  
Quæ utraque hoc casu est falsa, & hæc etiam viâ inveniri potest,  
nimirum supponendo  $\zeta$  designare quoque defectum alicujus  
quantitatis, quæ major sit quàm  $\frac{1}{2}a$ , utpote ponendo  $\zeta \infty -\frac{1}{2}a - y$ ,  
& substituendo

$$\begin{array}{l} +\frac{1}{4}aa + ay \quad +yy \text{ loco } \zeta\zeta, \\ \& -\frac{1}{2}aa - ay \quad \text{loco } +a\zeta, \\ \text{tum addendo} \quad +bb, \end{array}$$

unde provenit æquatio  $-\frac{1}{4}aa + bb^* + yy \infty 0$ , vel  $yy \infty$   
 $\frac{1}{4}aa - bb$ , cujus radix est  $y \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , vel  $y \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ ;  
atque adeò  $\zeta \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , vel  $\zeta \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ .  
ut ante.

Eâdem ratione tolletur secundus terminus reliquarum Æqua-  
tionum quadratarum pag. 6 & 7, quæ similiter hæc operatione  
eò reducuntur, ut ad ipsarum radices inveniendas hæc regula suffi-  
cere videatur.

*Intellige Æ-  
quationes,  
in quibus  
x aquatur  
duobus aut*

Verùm enimverò animadvertendum est, quòd, sicut Æquatio  
quælibet Quadrata composita sublacione secundi termini ad a-  
liam reducitur, in qua duo tantum sunt termini, sic nulla Cubica  
esse possit, pluribus terminis constans, (ex quibus 13 casus confi-  
ci pos-

ci possunt) quæ hæc ratione non reducatur semper ad aliquam trium sequentium formularum:

$$x^3 \infty^* - p x + q$$

$$x^3 \infty^* + p x + q$$

$$x^3 \infty^* + p x - q$$

tribus terminis, per +, aut per + & -, simul junctis.

Idem de Quadrato-quadratis Aequationibus, quæ ex pluribus terminis sunt compositæ, quarumque 42 diverſi modi extare possunt, est intelligendum. Cum enim per regulam pag. 79 expostam ad Cubicas reduci queant, quarum radices duas habent dimensiones & termini omnes sunt completi, sic nulla itidem earum esse potest, quæ hæc sublatione non reducatur ad aliquam trium prædictarum formularum.

Sic postquam Aequatio Quadrato-quadrata  $133 + 8x - 263 - 68x - 84x^2$  per dictam regulam reducta est ad Cubicam  $x^3 - 100x^2 + 2900x - 10000$ , in qua omnes termini sunt completi, tollitur secundus terminus, hoc modo: Divisis 100 per 3, fit  $33\frac{1}{3}$ . Unde ponendo  $xx - 33\frac{1}{3}xy$ , sive  $xx \infty yy + 33\frac{1}{3}$ , scribendum est

$$\begin{array}{rcl} y^3 + 100y^2 + 3333\frac{1}{3}yy + 37037\frac{1}{3} & \text{pro } x^3, \\ & \& - 100y^2 - 6666\frac{2}{3}yy - 11111\frac{1}{3} & \text{pro } - 100x^2, \\ & \& + 2900yy + 96666\frac{2}{3} & \text{pro } 2900xx, \\ \text{tum} & & - 10000: \end{array}$$

fietque æquatio  $y^3 - 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{1}{3} \infty 0$ , vel  $y^3 \infty^* + 433\frac{1}{3}yy - 12592\frac{1}{3}$ , tertiæ formulæ. Ubi notandum, dimensionum numerum primi termini  $x^3$  tantum pro 3 haberi, cum non sit  $x^2$ ,  $x^1$ , &  $x$  in tota summa. Id quod similiter in sublatione secundi termini æquationum Quadratarum, quarum radices duas dimensiones habent, est notandum. Quod si verò ponatur  $33\frac{1}{3} - xx \infty yy$ , hoc est,  $xx \infty 33\frac{1}{3} - yy$ , prodibit Aequatio  $y^3 \infty^* + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{1}{3}$ , secundæ formulæ, à præcedenti tantum differens termino quarto, qui ibi signo + adicitur, hic verò signo -. Unde fit, quod hujus æquationis falsæ radices æquales sint veris illius, & contra.

Ad augendum valorem verarum radicum, & ad faciendum, ut H radices omnes veræ evadant, sciendum est, nos uti posse exemplo ab Authore proposito pag. 74: nimirum,  $x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^2x^3 - 216n^3xx + 1296n^4x - 7776n^5 \infty 0$ , tanquam regulâ seu canone, ad quantitatem, quâ veræ radices augendæ sunt,

O o 3



sunt, inveniendam, sicut annotavit Vir Nobilissimus D. Gothofridus ab Haestrecht, Mathematicum cultor eximius, hujusque scientiæ peritissimus. Si enim, exempli causâ, proposita sit Æquatio  $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f\infty 0$ , oportet, neglectis omnibus terminis, in quibus signa  $+$  &  $-$  diversa sunt ab iis, quæ in canone reperiuntur, nempe  $b, c$ , &  $f$ , considerare tantum omnes reliquos, ut  $a, d$ , &  $e$ . Utpote  $+ax^5$ , quia in canone habetur  $+nx^5$ ; &  $-dxx$ , quia in canone  $-216n^4xx$ ; nec non  $+ex$ , quia in canone  $+1296n^5x$ . Qui quidem seorsim considerandi sunt, & quærenda quantitas  $n$ , quæ non sit minor quàm  $a$ , quia in canone habetur  $n$ , ubi in data Æquatione est  $a$ : & cujus quadrato-quadratum non sit minus quàm  $\frac{1}{216}d$ , quia in canone habetur  $216n^4$ , ubi in data Æquatione est  $d$ : nec non cujus sursolidum non sit minus quàm  $\frac{1}{1296}e$ , quia in canone habetur  $1296n^5$ , ubi in data Æquatione est  $e$ . Quantitate  $n$  sic inventâ, manifestè ex ipsa operatione demonstratur, si ponatur  $y - 6n \infty x$ , inventum iri Æquationem, in quâ nulla radix falsa esse potest, ut in exemplo Authoris. Quod Autori tam facilè visum fuit, ut id explicare neglexerit.

I Ad multiplicationem radicum alicujus æquationis addatur sequens exemplum. Proponatur æquatio  $y^6 \infty^* + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$ , cujus loco alia invenienda sit, cujus termini per numeros integros exprimantur. Supposito igitur  $z \infty \frac{1}{10}y$ , scribatur æquatio, hoc modo:

Et multiplicetur per nu-  $y^6 80y^4 - 433\frac{1}{3}yy - 12592\frac{16}{27} \infty 0$ .  
meros proportionales  $1 \cdot \quad \frac{2}{10} \cdot \quad \frac{2}{100} \cdot \quad \frac{27}{1000} \cdot$

fietque Æquatio  $z^6 80z^4 - 39zz - 340 \infty 0$ , vel  
 $z^6 \infty^* + 39zz + 340$ , cujus radix  $zz$  ad præcedentis radicem  $yy$  est, ut 3 ad 10.

Quæ radicum multiplicatio inservire etiam potest inveniendis radicibus proximè veris, cum ipsæ sunt irrationales. Ut, ad inveniendam veram radicem æquationis  $y^3 \infty 200y + 400$  (quæ irrationalis est) quàm proximè, ita ut differentia millesimâ parte unitatis minor sit: supposito  $z \infty 1000y$ ,

scribo  $y^3 80yy - 200 \quad y - 400 \infty 0$ ,

& multiplico per  $1 \cdot 1000 \cdot 1000000 \cdot 1000000000 \cdot$

& exsurget æquatio  $z^3 80zz - 200000000z - 40000000000 \infty 0$ , vel  $z^3 \infty^* - 200000000z \infty 40000000000$ , cujus radix  $z$  præcedentis radicis  $y$  est millecupla. Quocirca eliciendo radicem

ex hac

ex hac æquatione, methodo à Vieta tradita in tractatu de Numerosa Potestatum resolutione, inuenietur  $z$  major quàm 15052, & minor quàm 15053. Quibus diuisis per 1000 (quia præcedentis radicem multiplicauimus per 1000), fiet  $y$  major quàm 15 $\frac{2}{3}$ , & minor quàm 15 $\frac{1}{3}$ . adeò ut differentia inter hanc utramque inventam & veram millesimâ parte unitatis minor sit. Quod erat inueniendum. Porro quoniam æquatio proposita  $y^3 \propto 200y + 400$  duas adhuc admittit falsas radices, quæ similiter sunt irrationales, quia ipsa per  $y +$  vel  $-$  nullo numero ultimum terminum dividendo dividi potest, possunt ex eadem ratione inueniri, mutato tantum signo  $+$  in  $-$ . Quarum equidem maior excedet 13 $\frac{1}{3}$ , & minor deficiet à 2 $\frac{1}{3}$ , componentes simul veram inventam 15 $\frac{1}{3}$ . Cæterum, sicut æquationes ope multiplicationis à fractionibus liberantur, atque ad faciliores reducuntur, ita quoque interdum licet ipsas beneficio diuisionis, quando tam prolixos numeros continent, ut earum resolutio non nisi operosiores industriam requirat, in faciliores transmutare. Ut si fuerit æquatio  $x^3 \propto x^2 + 203125x + 23437500$ , & ejus loco alia desideretur, quæ minoribus numeris exprimatur, dividenda est ipsa per numeros proportionales 1. 125. 15625. 1953125,

hoc pacto:  $x^3 80xx - 203125x - 23437500 \propto 0$ ,  
1. 125. 15625. 1953125.

& prodibit æquatio  $y^3 80yy - 137 - 1200$ , vel  $y^3 \propto 13y + 12$ , cujus radices sunt  $+4$ ,  $-3$ , &  $-1$ , quibus per 125 multiplicatis (quoniam prioris radices per 125 diuisimus) exsurgent radices prioris  $+500$ ,  $-375$ , &  $-125$ .

Ubi porro notandum, quod, postquam æquatio quælibet à fractionibus aut surdis numeris est liberata, atque in faciliorem transmutata, fieri non possit, ut ulla ex hujus radicibus, siue falsis, siue veris, sit numerus aliquis fractus. Quemadmodum facile ex 7<sup>mo</sup> Elementorum libro demonstrari potest. Adeò ut, si illa deinde sicut pag. 77 est ostensum dividi nequeat, concedendum sit, nullam ex radicibus siue falsis siue veris numero explicari posse, sed omnes esse irrationales.

Quibus ita constitutis, ut pateat quo pacto hæ radices surdis numeris sint exprimendæ, visum fuit ea, quæ ab ingeniosissimo Huddenio nostro circa hæc excogitata sunt, in medium adducere.

Hinc ut investigetur, quo pacto, exempli causâ, radices æquationis



tionis  $zz - az - bb \infty 0$ , quæ per  $z +$  vel  $-b \infty 0$  dividi nequit, per surdas quantitates exprimi possint: suppono primum  $z$  esse æqualis simplici alicui quantitati surdæ, utputa,  $\sqrt{x}$ , & fit  $z - \sqrt{x} \infty 0$ . Quam, ut ad æquationem quadratam ejusdem formæ perducam, in qua secundus terminus est rationalis, multiplicare debeo per  $z + y + \sqrt{x} \infty 0$ . Sed quoniam sic non producitur æquatio, in qua etiam tertius terminus rationalis est, concludo radices æquationis propositæ hoc modo non posse denotari sive exprimi. Idem fit supponendo  $z \infty - \sqrt{x}$ .

Quocirca statuendo nunc  $z \infty y + \sqrt{x}$  seu  $z - y - \sqrt{x} \infty 0$ , oportet ipsam, ut ad æquationem quadratam ascendat, in qua rursus secundus terminus sit rationalis, multiplicare per  $z - y + \sqrt{x} \infty 0$ , & fit  $zz - yz + yy \infty 0$ . æquatio ejusdem formæ cum al-

lata, & in qua item tertius terminus rationalis est. Hinc comparando secundum terminum unius cum secundo alterius invenio  $-yz \infty -a$ , hoc est,  $y \infty \frac{1}{2}a$ . Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat  $yy - x \infty -bb$ . In qua si in locum  $yy$  subrogetur  $\frac{1}{4}aa$ , habebō  $\frac{1}{4}aa + bb \infty x$ . Ac proinde cum pro quæsitis radicibus supposuerimus  $z \infty y + \sqrt{x}$ , &  $z \infty y - \sqrt{x}$ , erunt ipsæ:  $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ , &  $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ .

Eodem modo si investigare velimus, quo pacto radices æquationis indivisibilis  $yy + ay - bb \infty 0$  per quantitates surdas exprimi queant, statuatur (neglectâ suppositione ipsius  $y \infty \sqrt{x}$ )  $y \infty -z + \sqrt{x}$  seu  $y + z - \sqrt{x} \infty 0$ , eaque, ut ad æquationem quadratam assurgat, in qua rursus secundus terminus sit rationalis, multiplicetur per  $y + z + \sqrt{x} \infty 0$ , & fit  $yy + yz + zz \infty 0$ .

æquatio ejusdem formæ cum allata, & in qua etiam tertius terminus est rationalis. Unde comparando secundum terminum hujus cum secundo illius invenitur  $z \infty \frac{1}{2}a$ . Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat  $x \infty \frac{1}{4}aa + bb$ . Atque adeo, cum pro quæsitis radicibus supposuerimus  $y \infty -z + \sqrt{x}$ , &  $y \infty -z - \sqrt{x}$ , erunt ipsæ:  $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ , &  $y \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ .

Similiter, investigando num radices æquationis  $zz - az + bb \infty 0$ , quam per  $z +$  vel  $-b \infty 0$  dividere non licet, per surdas quan-

quantitates exprimi queant, invenitur & exprimi posse per  $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ , & per  $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ . Eodem modo procedatur in altioribus æquationibus.

E quibus perspicuum fit, hac ratione inveniri quoque simplicissimos surdos numeros, quibus radices hasce exprimere licet, atque ideo hinc etiam constare, quæ circa hæc à D<sup>no</sup> des Cartes pag. 95 referuntur, nimirum: quòd natura harum radicum non permittat, ut simplicioribus terminis exprimantur.

Ubi tandem etiam est advertendum, quòd, quantò partes è quibus hæ radices componuntur pauciores numero existunt, tanto etiam quæsitum facilius obtineri possit, ac proinde in altioribus æquationibus conducere secundum terminum tollere, ita ut deinde, si res bene inspiciatur, perpauca casus superfuturi sint.

*Supponendum est*  $y \propto x \sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ , *deinde verò scribendum*  $\kappa$   
 $y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3} \sqrt{3} \propto 0$ .] Etenim posita  $y \propto x \sqrt{\frac{3aa}{bb}}$   
 five  $y \propto \frac{a^2}{b} \sqrt{3}$ ; erit  $x \propto \frac{by}{a\sqrt{3}}$ , &  $xx \propto \frac{bby}{3aa}$ , &  $x^3 \propto \frac{b^3y^3}{3a^3\sqrt{3}}$ .  
 Quæ si in æquatione substituantur, habebitur  $\frac{b^3y^3}{3a^3\sqrt{3}} * - \frac{b^3y}{a\sqrt{3}}$   
 $+ c^3 \propto 0$ ; hoc est, communi multiplicatore  $a^3\sqrt{3}$ , fiet  $b^3y^3$   
 $* - 1aab^3y + 1a^3c^3\sqrt{3} \propto 0$ : ac proinde communi divisore  $b^3$ ,  
 erit  $y^3 * - 1aay - \frac{1a^3c^3}{b^3} \sqrt{3} \propto 0$ . Quod erat demonstrandum.

*Etenim aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæ- L*  
*sita; aut Æquatio, per ipsam divisa, ad duas dimensiones erit*  
*reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt*  
*ostensa, inveniri queat.*] Sic æquatio superior pag. 76:  $x^3 -$   
 $6xx + 13x - 10 \propto 0$  divisa per binomium  $x - 2 \propto 0$  dat æ-  
 quationem impossibilem  $xx - 4x + 5 \propto 0$ , & fit radix quæsi-  
 ta 2. Sic æquatio  $x^3 \propto 1201x + 14400$  seu  $x^3 80xx - 1201x$  *Vide hic post*  
 $- 14400 \propto 0$  divisa per  $x + 25 \propto 0$  dat æquationem  $xx - 25x$  *in Appendi-*  
 $- 576 \propto 0$  seu  $xx \propto 25x + 576$ , quæ juxta præcepta pag. 6 *ce de Cubi-*  
 & 7 resoluta ostendit radicem quæsitam esse  $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ . *carum æ-*  
 quationum *resolutione.*

Huc etiam refer reductionem Æquationum Quadratarum, cum Problema est Simplex.

Pp

Ut



Reductio  
Æquatio-  
num Qua-  
dratarum,  
cū Pro-  
blema est  
Simplex.

Ut si, verbi gratiā, habeatur æquatio  $xx \propto ax + ab$  seu  $xx -$   
 $+bb$

$-ax - ab \propto 0$ , poterit ea, inventis ipsius  $ab + bb$  ultimi ter-  
 $-bb$

mini divisoribus  $1, b, a+b$ , &  $ab+bb$ , dividi per binomium  
 $x+b \propto 0$ , oriturque  $x - a - b \propto 0$ . Id quod ostendit, radicem  
quæsitam esse  $\propto a+b$ , & Problema, quod ad hanc æquationem  
reducitur, esse Simplex, hoc est, construi posse ducendo tantum  
rectas lineas.

Eodem modo, si fuerit  $xx \propto \frac{ax+aa}{a+1}$  seu  $xx + \frac{ax}{a+1} - \frac{aa}{a+1} \propto 0$ ,  
quoniam, ad tollendas fractiones, multiplicatâ primū

$$xx + \frac{ax}{a+1} - \frac{aa}{a+1} \propto 0$$

per quantitates proportionales  $1, a+1, aa+^2a+1$ ,

fit æquatio  $yy + aay - a^3 - aa \propto 0$ ,

atque hâc, ut ante, divisâ per binomium  $y+aa+a \propto 0$ , oritur  
 $y - a \propto 0$ : liquet, Problema, quod huc pertinet, non præter sim-  
plex existere, &  $y$  esse  $\propto a$ , adeoque  $x \propto \frac{a}{a+1}$ .

Haud secus Problema simplex erit, si obtineatur æquatio  
 $xx \propto \frac{aax - aac}{a-c}$  seu  $xx - \frac{aax}{a-c} + \frac{aac}{a-c} \propto 0$ . Multiplicatâ enim  
eâ per proportionales  $1, a-c$ , &  $aa - ^2ac + cc$ , fit  $yy - aay$   
 $+ a^3c - aacc \propto 0$ . Quæ dividi potest per binomium  $y-ac \propto 0$ ,  
oriturque  $y - aa + ac \propto 0$ . Unde  $y$  invenitur  $\propto ac$ , aut etiam  
 $y \propto aa - ac$ : ac proinde  $x \propto \frac{ac}{a-c}$ , aut etiam  $x \propto a$ . Quorum  
duorum valorum ipsius  $x$  non nisi unus tantum quæsito Problema-  
tis respondet, licet uterque æquationi propositâ satisfaciât. Quod  
ipsum ex Problemate non adeo difficile semper est dignoscere.

Cæterum Problema aliquod non præter simplex existere, vel  
hinc quoque inferre licet, cū, operando juxta regulas pag. 6  
& 7, quantitas, quæ per  $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$  aut per  $\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$  expri-  
mitur, omnino per extractionem radicis inveniri potest; ita ut  
ipsa sit rationalis, quemadmodum in allatis exemplis contingit.  
Ubi porro observare licet, quod, in primo & secundo casu earun-  
dem æquationum, postquam ultimus terminus per  $bb$  fuerit de-  
signatus, aut is inventionem mediæ proportionalis (sicut pag. 2  
docetur) ad hanc formam fuerit reductus, nil ad ulteriorem ipsa-  
rum

rum constructionem faciendum relinquatur, quod non per solarum rectarum linearum ductum absolvatur. Vide Exercitationum nostrarum Mathematicarum librum 2, in quo de Simplicium Problematum constructione ex professo agitur.

Ubi deum observatu dignum, in genere æquationes omnes numericas trium dictarum formularum omnino per solas rectas lineas construi posse, in quibus  $a$  &  $b$  non nisi numeros designant sive integros sive fractos; aut etiam eas, in quibus hæc quantitates non per diversas literas denotatae reperiuntur, etiam si ipsis integri aut fracti numeri præfigantur.

*Ubi notandum, me ipsius  $y^6$  dimensiones tantum pro tribus M dimensionibus habere, cum non reperiatur  $y^5$ , nec  $y^3$ , nec  $y$  in tota summa.]* Potest enim pro æquatione

$$y^6 + \frac{aa}{cc}y^4 + \frac{aa}{cc}y^2 - \frac{a^6}{aac^4} = 0 \text{ substitui æquatio hæc:}$$

$$z^3 + \frac{aa}{cc}z - \frac{a^6}{aac^4} = 0. \text{ nimirum, supponendo } z \propto yy,$$

atque subrogando  $z$  in locum  $y^4$ , &  $z^3$  in locum  $y^6$ ; ita ut, postquam innotuerit valor radicis  $z$ , opus tantum sit, ex hoc invento valore extrahere radicem quadratam, ad habendum valorem radicis  $y$ .

Nec aliter operandum, si habeatur  $x^4 \propto -axx + bb$ . Possumus enim ipsius  $x^4$  dimensiones solummodo pro duabus dimensionibus habere, & scribere  $yy \propto -ay + bb$ , supponendo

$$y \propto xx, \text{ \& } yy \propto x^4, \text{ eritque radix ejus } y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb};$$

$$\text{adeoque radix } x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}.$$

Quin & si fuerit  $z^6 \propto *39zz + 340$ , supponendo  $x \propto zz$  potest pro ea reponi  $x^3 \propto *39x + 340$ , atque adeo ipsius  $z^6$  dimensiones tantum pro tribus dimensionibus haberi.

Eodem modo, si fuerit  $x^8 \propto *10x^4 + 16xx - 9$ , atque  $z$  supponatur  $\propto xx$ : poterit ejus loco scribi  $z^4 \propto *10zz + 16z - 9$ , ita ut ipsius  $x^8$  dimensiones tantum pro 4<sup>or</sup> dimensionibus habeantur. Et sic de aliis.

*At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Equationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema, quod ab ea dependet, esse solidum.]* Sic quoniam æquatio



tio  $x^3 \propto 300x + 1200$ , seu  $x^3 80xx - 300x - 1200 \propto 0$ , dividi nequit per  $x$  plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 1200 absque fractione dividente, quin aliquid post divisionem superfit, certum est, Problema, quod ad illam reducitur, esse Solidum. Quo autem pacto inveniantur numeri omnes, datum numerum absque fractione dividendes, manifestum fiet, ubi ex Stifelio exposuero rationem, inveniendi omnes cujusque numeri partes aliquotas, quod unum idemque est.

Etenim, si numerus par fuerit, dividendus est per 2, & divisor reservandus; tum rursus, si quotiens est par, dividatur similiter per 2, & divisor reseretur; illudque tam diu continuetur, donec perveniatur ad numerum imparem. Quod si verò numerus est impar, vel divisione jam factâ ad numerum imparem sit perventum, dividi debet per 3, si fieri potest, idque tam diu continuandum, donec proveniat quotiens, qui per 3 amplius dividi non possit. Tum eadem divisio tentanda per 5, 7, 11, 13, 17, 19, aliumve numerum primum, sive nullam partem aliquotam præter unitatem habentem. Suffecerit autem id tentasse, donec ad dati numeri radicem quadratam, sive veram, sive veræ proximam, perventum fuerit: cum ultiores divisiones supervacaneæ sint habendæ. Iam verò quomodo ex reservatis numeris partes aliquotæ, seu divisores omnes dati cujusque numeri, inveniantur, sequentia exempla manifestabunt. Etenim ad inveniendos divisores omnes numeri 462, divido 462 per 2, & fiunt 231. Hinc 2 reservo, & 231 divido per 3, fiuntque 77, & 3 reservo. Postea divis 77 per 7, fiunt 11, & 7 reservo. Denique divido 11 per 11, & fit 1, & 11 reservo. Unde numeri reservati erunt 2, 3, 7, & 11. E quibus divisores omnes seu partes aliquotæ sic inveniuntur.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 2 \cdot 3 \cdot \\
 \hline
 6 \\
 7 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 42 \cdot \\
 \hline
 11 \cdot 22 \cdot 33 \cdot 66 \cdot 77 \cdot 154 \cdot 231 \cdot 462 \cdot
 \end{array}$$

Primò ducito 2 in 3, & producentur 6. Deinde 7 in 1, 2, 3, & 6, & fiunt 7, 14, 21, 42. Denique 11 in 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, & 42, fiuntque 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462. Et erunt divisores omnes 1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42. 11. 22. 33. 66. 77. 154. 231. &

COMMENTARII IN LIBRUM III. 301

& 462. Ubi notandum, ex ductu ultimi numeri reservati 11 in ultimum productum inventum 42 produci datum numerum 462; adeo ut, ad inveniendum dati alicujus numeri partes omnes aliquotas, opus non sit hosce duos numeros in se invicem ducere, si tantum de illis quaestio fuerit, & non de divisoribus. Eodem modo, numerus 2310 divisores habebit sequentes.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 2x & 3 & 7 & 11 & x \\ 2310 & 462 & 154 & 77 & 21 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \cdot 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 30$$

$$7 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 42 \cdot 35 \cdot 70 \cdot 105 \cdot 210$$

$$11 \cdot 22 \cdot 33 \cdot 66 \cdot 55 \cdot 110 \cdot 165 \cdot 330 \cdot 77 \cdot 154 \cdot 231 \cdot 462 \cdot 385 \cdot 770 \cdot 1155 \cdot 2310.$$

Similiter divisores numeri 1200 erunt

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 2x & 3 & 5 & 8 & 1 \\ 1200 & 600 & 400 & 240 & 150 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \cdot 2 \\ \hline 4 \\ 2 \cdot 8 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 48$$

$$5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80 \cdot 15 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 120 \cdot 240$$

$$1 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 200 \cdot 400 \cdot 75 \cdot 150 \cdot 300 \cdot 600 \cdot 1200$$

Verum enimvero cum allata ratio inveniendi Binomium, per quod Aequationis propositae summa dividenda est, ad investigandum, utrum Problema, quod ad aequationem illam est perductum, sit Solidum, an vero Planum, & si Planum sit, ipsa ad ejusdem aequationis radices inveniendas valde videatur prolixa; praefertim cum ultimus terminus plures admittit divisores: sciendum est, quosdam ex iis seligi posse, e quibus si componatur binomium, per quod aequationis divisio non succedat, certi esse possumus Problema ab ea dependens Solidum exiltere.

Pp 3

Sic





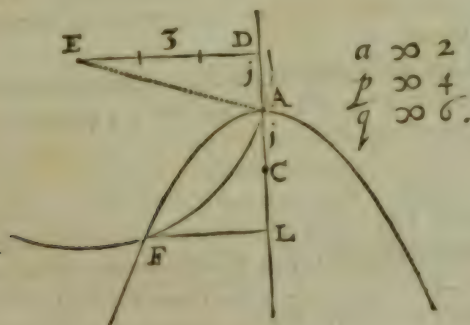
COMMENTARII IN LIBRUM III. 303

+ 1200  $\infty$  0 tentata per  $x - 400$ , per  $x - 1500$ , & per  $x + 2000$  non succedat, concedendum sit illam admittere nullam radicem, nec veram nec falsam, quæ numero exprimi queat; sed omnes esse irrationales: adeoque earum valorem non aliter quam per quantitatem linearum FM, FN, & FL esse exprimendum, & Problema, unde allata æquatio deducta fuit, Solidum esse.

Sed licet hæc aliter adhuc & quidem generalius efficere.

Ut si habeatur Æquatio primæ formulæ  $x^3 \infty^* - 8x + 24$ , cujus investigandæ sint radices. Quoniam igitur ultimus terminus 24 octo admittit divisores, qui sunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24: hinc octies fortè divisio tentanda esset antequam radicem propositæ Æquationis sic invenire possemus. Verùm sufficit semel vel bis id experiri, cum certi quidam ex inventis hisce divisoribus feligi possint, per quos si divisio non succedat, certi reddamur radicem esse irrationalem.

Cogitetur Æquatio allata hujus esse formulæ  $x^3 \infty^* - 2, 4x + 7, 6$ , eadem nempe quæ  $x^3 \infty^* - a^3 p x + a^3 a q$ ; in qua  $a$  pro unitate assumpta valet 2,  $p$  4, &  $q$  6. Quâ Æquatione juxta regulam pag. 85, 86, 87, & 88 resolutâ, invenitur radicem quasi-



tam designari per lineam FL. Postea exploretur quisnam ex inventis divisoribus huic lineæ proximè accedat, ut seligantur per quos divisio sit tentanda, neglectis reliquis. Postquam autem compertum fuerit nullum ex ipsis propius huic lineæ congruere quam



quàm diviforem 2, & quidem Æquationem propositam  $x^3 80$   
 $xx + 8x - 2400$  dividi poffe per  $x - 200$ , & prodire Æqua-  
tionem impoffibilem  $xx + 2x + 1200$ , quæ per  $x +$  vel  $-$  ali-  
quo numero, ultimum terminum dividente, ulteriùs dividi ne-  
quit: fequitur radicem quæfitam fore 2, neque ullam aliam exta-  
re, cum reliquæ duæ in hac formula femper fint imaginariæ.

Nec aliter fit, fi fuerit  $x^3 00^* - 8x - 24$ , quæ eft Æquatio u-  
nam habens radicem falſam, nempe 2, & duas imaginarias: cum  
producat ex multiplicatione Æquationis impoffibilis  $xx - 2x$   
 $+ 1200$  per  $x + 200$ . Ubi obſervandum, quòd, licet D. des  
Cartes ejuſmodi Æquationis formulam inter Cubicas non repo-  
ſuerit, ſed tantùm eas, in quibus bini poſteriores termini per  $+$   
aut per  $-$  &  $-$  juncti ſunt, ipſa tamen nihilominus eodem modo,  
quo præcedens, reſolvi, atque radix ejus exprimi poſſit. quod &  
de æquatione quadrata  $xx - ax - bb00$  ſupra monuimus.  
Hinc ſi fuerit  $x^3 00 - 3x - 10$ , ſeu  $x^3 80xx + 3x + 1000$ ,  
quæ per  $x +$  aliquo numero ultimum terminum dividente dividi  
nequit: ſequitur radicem ejus eſſe irrationalem, eamquæ juxta  
primam Cardani regulam, pagin. 93 deſcriptam, ſic exprimi  
 $x00 - \sqrt{C. \sqrt{26} + 5} + \sqrt{C. \sqrt{26} - 5}$ . nempe mutatis tan-  
tùm ſignis  $+$  &  $-$  utriuſque partis. Idem intellige de Æquatio-  
nibus  $x^3 00 - 8$ , aut  $x^3 00 - 10$ , quarum radices ſunt  $x00 - 2$ ,  
&  $x00 - \sqrt{C. 10}$ .

Eodem modo operandum erit in Æquatione primi caſus ſecun-  
dæ formulæ, puta  $x^3 00 + 8x + 24$ , ubi  $\frac{1}{4}q$  eſt majus quàm  
 $\frac{27}{4}p^3$ . Quoniam enim dividi nequit per  $x - 400$ , qui diviſor ad  
quantitatem radicis proximè accedit, non opus eſt ut ulteriùs pro-  
grediamur, ſiquidem binæ reliquæ radices hujus caſus ſemper  
ſunt imaginariæ. Quare radix quæſita erit irrationalis, quæ juxta  
ſecundam Cardani regulam, pag. 93 exhibitam, ſic exprimetur:  
 $x00 \sqrt{C. 12} + \sqrt{125 \frac{1}{27}} + \sqrt{C. 12} - \sqrt{125 \frac{1}{27}}$ . Adeò ut di-  
catur compoſita ex duabus lineis, quarum una eſt prima dua-  
rum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam  $12$   
 $+ \sqrt{125 \frac{1}{27}}$ , & altera prima duarum mediarum proportiona-  
lium inter unitatem & lineam  $12 - \sqrt{125 \frac{1}{27}}$ . E quibus perſpi-  
cua ſunt illa, quæ habentur pag. 92 & 95. Notandum verò, me  
potuiſſe quidem accipere  $a$  pro 1, ita ut  $p$  futura fuiſſet 8, &  $q$  24:  
quo-

quoniam hic liberum est assumere pro unitate, qualem libuerit, quantitatem; verum quia praxis aliquo modo accommodatior visa est, si pro  $a$  ponatur 2, non 1, malui illam hypothefin huic posthabere.

Ubi porrò advertendum, radicibus Aequationum ita implicatis existentibus, simplicius censendum esse, earundem habitudinem ex sola Aequationum constitutione innuere, quam ipsas prædicto modo exprimere. Ut in hac ultima  $x^3 \infty + 8x + 24$ , dicendo  $x$  talem esse, ut in se Cubicè ducta tantundem faciat ac si per 8 multiplicetur, ac deinde ei quod fit addatur 24. Quippe sic ejus habitudinem longè simplicius concipere valemus, quam si eandem hoc modo exprimeremus:  $x \infty \sqrt[3]{C. 12 + \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}}$

$+ \sqrt[3]{C. 12 - \sqrt[3]{125 \frac{1}{27}}}$ . Id quod similiter de Aequatione  $x^3 \infty - 3x + 10$  potest intelligi, cujus radix juxta primam Cardani regulam sic exprimitur  $x \infty \sqrt[3]{C. \sqrt[3]{26 + 5} - \sqrt[3]{C. \sqrt[3]{26 - 5}}}$ : cum illius habitudinem, quam ex Aequationis constitutione induit, multò facilius concipiamus, prout eandem in se Cubicè ductam idem producere intelligimus, quod 10 minus ipsius triplo. Et sic de aliis.

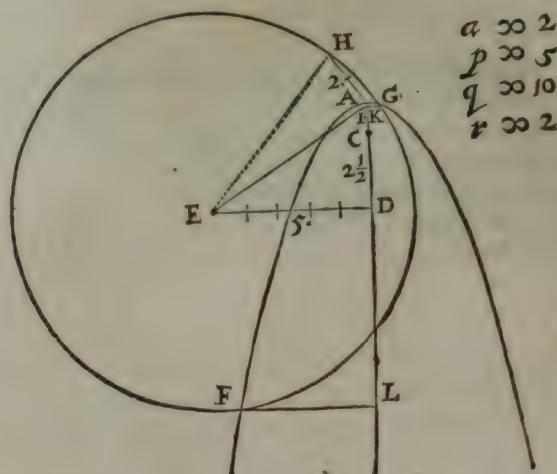
Porrò si habeatur  $x^4 \infty + 10xx + 40x + 16$ ; supposita  $a \infty 2$ , erit  $aa \infty 4$ , &  $a^3 \infty 8$ , fietque æquatio  $x^4 \infty + 2, 5xx + 2, 10x + 8, 2$ , ejusdem formæ cum  $x^4 \infty a^4 pxx + a^3 a'qx + a^2 r$ , in qua  $p$  idem valet quod 5,  $q$  idem quod 10, &  $r$  idem quod 2. Deinde inventis numeris ultimum terminum 16 dividendibus, utpote 1, 2, 4, 8, & 16, æquationem resolvo juxta regulam ab Authore pag. 85, 86, 87, & 88 ostensam, eritque vera radix FL, & falsa GK. Denique, examinando ordine divisores inventos, explorando quinam ex ipsis ab inventis radicibus FL & GK quàm minimùm discedant; inuenio divisionem solummodo tentandam esse per  $x - 400$ , aut per  $x + 100$ . Ac proinde cum neutra harum divisionum succedat, concludo, Aequationem propositam, unam admittere veram radicem, & unam falsam, quarum utraque est irrationalis; ac reliquas duas esse imaginarias.

Haud secus si fuerit æquatio  $x^4 \infty - 60xx + 7400x + 36000$ , cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 72, 80, 90, 100, 120, 144, 160, 180, 200, 225, 240, 270, 300, 360, 400, 450, 480, 540, 600, 720, 800, 900, 1000, 1200, 1440, 1600, 1800, 2000, 2250, 2400, 2700, 3000, 3600, 4000, 4500, 4800, 5400, 6000, 7200, 8000, 9000, 10000.

Qq

Vide figuram paginæ veræ.





75, 80, 90, 96, 100, 120, 125, 144, 150, 160, 180, 200, 225,  
 240, 250, 288, 300, 360, 375, 400, 450, 480, 500, 600, 720,  
 750, 800, 900, 1000, 1125, 1200, 1140, 1500, 1800, 2000,  
 2250, 2400, 3000, 3600, 4000, 4500, 6000, 7200, 9000,  
 12000, 18000, & 36000, fingo  $a$  esse 10, ac proinde æquatio-  
 nem propositam esse hanc  $x^4 \infty^* - 10x^3 + 6xx + 100x + 1000$ ,  
 36, hoc est, ipsam esse hujus formæ  $x^3 \infty^* - a'pxx + a'd'qx + a^2r$ ;  
 ita ut, secto latere recto  $a$  in 10 æquales partes,  $p$  earundem fa-  
 ciat 6,  $q$  74, &  $r$  36. Quâ deinde juxta regulam pag. 85, 86, 87 &  
 88 constructâ, invenio ipsam sicut antecedentem non nisi unam  
 veram radicem admittere, utputa  $FL$ , & unam falsam, utpote  
 $KG$ , quarum longitudo ad partes lateris recti ceu scalæ relata  
 ostendit divisionem æquationis propositæ solummodo tentan-  
 dam esse per  $x - 20 \infty 0$  aut per  $x + 5 \infty 0$ . Hinc cum ipsa divi-  
 di possit per  $x - 20 \infty 0$  & oriatur æquatio  $x^3 + 20xx + 460x +$   
 $1800 \infty 0$ , non autem per  $x + 5 \infty 0$  quin aliquid post divisio-  
 nem relinquatur: concludo veram ejus radicem esse 20, & falsam  
 esse irrationalem, cujus valor seu quantitas, dum per longitudi-  
 nem

nem solius inventæ rectæ K G accuratè exhibetur, propter hujus cum reliquis asymmetriam, numero tantùm quadantenus ex ipsius ad hæc relatione innotescit. Eodem modo investigari queunt radices æquationum, plures pauciorève dimensiones habentium.

Cæterùm cum radicum inventio res magni sit momenti, atque eorum, circa quæ Algebra versatur, præcipua: alium modum seligendi divisores, qui ad æquationem dividendam utiles judicari possunt, subjungam, quem communicavit Jacobus à Waessenaer, Ultrajectinus, Geometra peritissimus, atque in hac Cartesiana Methodo versatissimus.

Inveniantur radices æquationis  $x^3 - 1xx - 30x + 7200$ , cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Unde æquatio proposita dividenda est per  $x 8 1$ , vel per  $x 8 2$ , &c. Verùm cum complures hic sint divisores, & tantùm tres hic esse possint, per quos divisio fieri queat: constat, divisionem pluries esse tentandam, antequam fortè incideremus in aliquem, qui quæsito satisfacere posset. Quapropter ut seligantur illi, quorum præ cæteris est ratio habenda: augendæ sunt radices veræ certâ quâdam quantitate, hoc est, transmutanda est æquatio in aliam, cujus veræ radices sint dato numero majores. Commodissimum autem fuerit ad id assumere 1 vel 10: quia cum multiplicatio alicujus numeri instituitur per 1, vel 10, numerus ille sic non mutatur, sed ipsi tantùm in fine cyphra adjungitur. Unde ponendo  $700x + 1$ , live  $x 700 - 1$ , exsurget æquatio  $y^3 - 4yy - 25y + 10000$ , cujus veræ radices unitate majores sunt veris prioris & falsæ contra unitate minores falsis. Quia verò in hac æquatione, numeri ultimum terminum 100 dividentes, sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100: ideo dividenda foret per  $y 8 1$ , vel per  $y 8 2$ , vel per  $y 8 4$ , &c. quod cum non minorem quàm in superiori requirat laborem, oportet similiter ex iis quosdam seligere. Atque adeò cum cognoscatur, ad inveniendas veras radices, divisores hujus unitate debere esse majores divisoribus prioris æquationis, facillè constat, si ex inventis 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 aliqui idonei sunt ad posteriorem æquationem dividendam, aliquos etiam inter eosdem unitate diminutos, nempe inter 0, 1, 3, 4, 9, 19, 24, 49, 99, ad priorem æquationem dividendam utiles futuros. Qui ut inveniantur, conferendi sunt iidem divisores

Qq 2

1, 3,



1, 3, 4, 9, 19, 24, 49, 99 cum supra inventis 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, sumendique qui sibi invicem respondent, ceteris neglectis. Ac proinde cum hic quinque sint qui concordant, nempe 1, 3, 4, 9, & 24, oportet, ad inveniendas veras radices, divisionem tentare per  $x - 1$ , per  $x - 3$ , per  $x - 4$ , per  $x - 9$ , & per  $x - 24$ ; aut, ad obtinendas falsas, quæ quidem hanc auctione in tantum sunt diminutæ, per  $x + 2$ , per  $x + 3$ , & per  $x + 6$ . Quod si verò id nimis longum videatur, quandoquidem æquatio quælibet tot tantum radices ad summum habere potest, quot incognita quantitas habet dimensiones, ita ut hic non ultra tres inveniantur: poterimus veras radices prioris æquationis unitate diminuere, supponendo videlicet  $z \propto x - 1$ , sive  $x \propto z + 1$ , & prodibit æquatio  $z^3 + 2zz - 29z + 42 \propto 0$ . Cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, qui unitate aucti efficiunt divisores 2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43. Iam verò cum ex prioribus quinque 1, 3, 4, 9, 24 bini tantum sint, utpote 3 & 4, qui cum binis horum consentiunt, eò deventum est, ut ad inveniendas veras radices opus tantum sit divisionem tentare per  $x - 3$ , vel per  $x - 4$ ; aut, ad obtinendas falsas, quæ hanc diminutione verarum unitate sunt auctæ, per  $x + 2$ , & per  $x + 6$ . Hinc, cum  $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$  dividi possit per  $x - 3 \propto 0$ , atque oriatur  $xx + 2xx - 24 \propto 0$ , cujus radices sunt  $+4$ , &  $-6$ ; vel etiam  $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$  dividi possit per  $x - 4 \propto 0$ , & proveniat  $xx + 3x - 18 \propto 0$ , cujus radices sunt  $+3$  &  $-6$ ; vel denique  $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$  dividi possit per  $x + 6 \propto 0$ , & resultet  $xx - 7x + 12 \propto 0$ , cujus radices sunt  $+4$ , &  $+3$ ; sequitur, radices propositæ æquationis esse  $+3$ ,  $+4$ , &  $-6$ . Ubi notandum, in hujusmodi praxi seligendi divisores, non opus esse totius operationis, quæ ad inveniendas posteriores hasce æquationes requiritur, rationem habere; sed tantum quatenus ad ultimum terminum inveniendum inservire possit. Ad quem obtinendum, quando prioris radices unitate augentur vel diminuuntur, numeri in æquatione dati solummodo addendi sunt vel subtrahendi, prout signa  $+$  &  $-$  indicant. At verò cum per denarium aliūve numerum augentur vel diminuuntur, tum prius cyphræ ipsis in fine apponendæ sunt, vel ipsi per datos numeros sunt multiplicandi, antequam addantur vel à se invicem subtrahantur. quod usus edocebit.

Ubi

Ubi tandem notandum, ad feligendos divisores divisionesque superfluas evitandas, spectari etiam posse ea, quæ Vir Clarissimus D. de Beaune de limitibus Aequationis, intra quos ejus radices cadunt, tradidit. Qualia ista in 2<sup>do</sup> tractatu continentur, qui una cum primo de natura & constitutione Aequationum huic editioni nunc accessit.

Unde cognoscitur, valorem ipsius  $\zeta$  esse  $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$  0  
 $+ \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ , vel  $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$   
 $- \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ .] utpote qui elicitur  
 ex priori æquatione  $\zeta - \zeta\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$ .  
 Quæ quidem primi vel tertii casus esse potest æquationum Qua-  
 dratarum pag. 6 & 7. Primi videlicet, si  $\frac{1}{2}aa$  est minus quàm  $\frac{1}{2}cc$ ,  
 quo casu  $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$  de-  
 signabit verum valorem radices  $\zeta$ , &  $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$   
 $- \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ , falsum valorem, juxta ea quæ  
 pag. 162 annotavimus. At tertii, si  $\frac{1}{2}aa$  majus fuerit quàm  $\frac{1}{2}cc$ , quo  
 casu utraque radix est vera. Ubi porro notandum, æquationem  
 posteriorem  $\zeta\sqrt{aa+cc} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} = 0$ ,  
 postquam  $\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc$  non fuerit minus quàm  $\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$ , sive, quod idem est,  $cc$  non minus quàm  $8aa$ , duas ad-  
 mittere falsas radices, quemadmodum p. 165 monuimus, quæ sunt  
 $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ , &  
 $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ . Ita ut  
 quatuor sint radices binarum precedentium æquationum sive æ-  
 quationis

$$\zeta^2 + \frac{1}{2}aa\zeta - \frac{1}{2}a^2\zeta + \frac{1}{2}a^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{nempe } \zeta &= \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}, \\ \zeta &= \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}, \\ \zeta &= -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}, \\ \zeta &= -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}. \end{aligned}$$

Et quandoquidem supra feceramus  $\zeta + \frac{1}{2}a = x$ , innotescit, p  
 Qq 3 quan-



quantitatem  $x$ , ad quam cognoscendam omnes hae operationes instituiamus, esse

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}} \\
 & \text{vel } \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}, \\
 & \text{vel } \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}, \\
 & \text{vel denique } \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.
 \end{aligned}$$

Ut liquet ex iis, quae proximè annotata sunt.

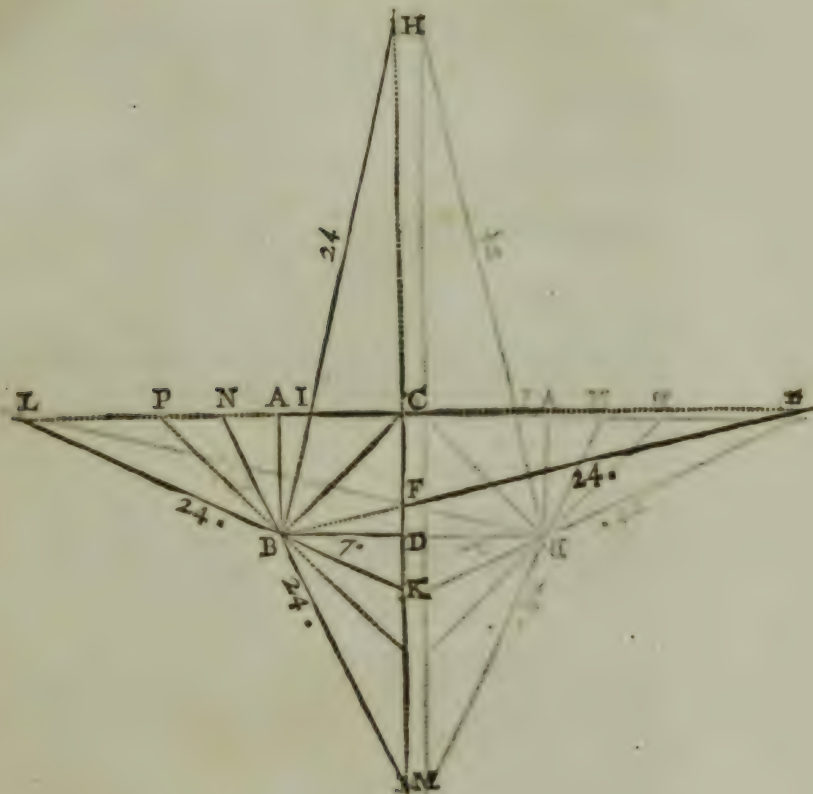
Q Vbi per praecedentes regulas cognoscitur, radicem ejus, quae est longitudo lineae  $DF$ , esse  $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}$

$- \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$  Ubi patet, quòd ex quatuor radicibus supra expositis, æquationis  $x^4 - 2ax^3 + \frac{aa}{c}xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$ , quarum binæ priores semper veræ sunt, seu plus quàm 0, D. des Cartes eam tantùm sibi delegerit, quæ ad quantitatem lineæ  $DF$ , pro qua inveniendâ  $x$  posuerat designandam intervire possit, & reliquam veram  $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$  neglexerit, eò quòd lineam ipsâ  $DC$  majorem exhibeat.

Vide figuram p. 83.

Potest autem hic eleganter ostendi usus, quem radices tam falsæ quàm veræ alicujus æquationis in Geometria habent, ac quo pacto earum ope ad plenam alicujus Problematis cognitionem perducamur; sic ut nullus casus existat, quem non detegamus, atque ejusdem determinationem non inveniamus. Sciendum enim est, quòd, quemadmodum veræ radices in Arithmetica (ut supra indicavimus) quantitatem aliquam designant, majorem quàm nihil, & falsæ defectum alicujus quantitatis, seu quantò nihilo sunt minores, sic in Geometria veræ radices eas communiter lineas designent, sensu illo, quales inveniendæ proponuntur, at verò falsæ, sensu contrario. Adeò ut si veræ accipiantur in data recta indefinita, à dato puncto versus aliquod in ea punctum designatum, progrediendò, falsæ in ipsa ab eodem puncto sumi debeant versus contrarium punctum, regrediendò.

Ut,



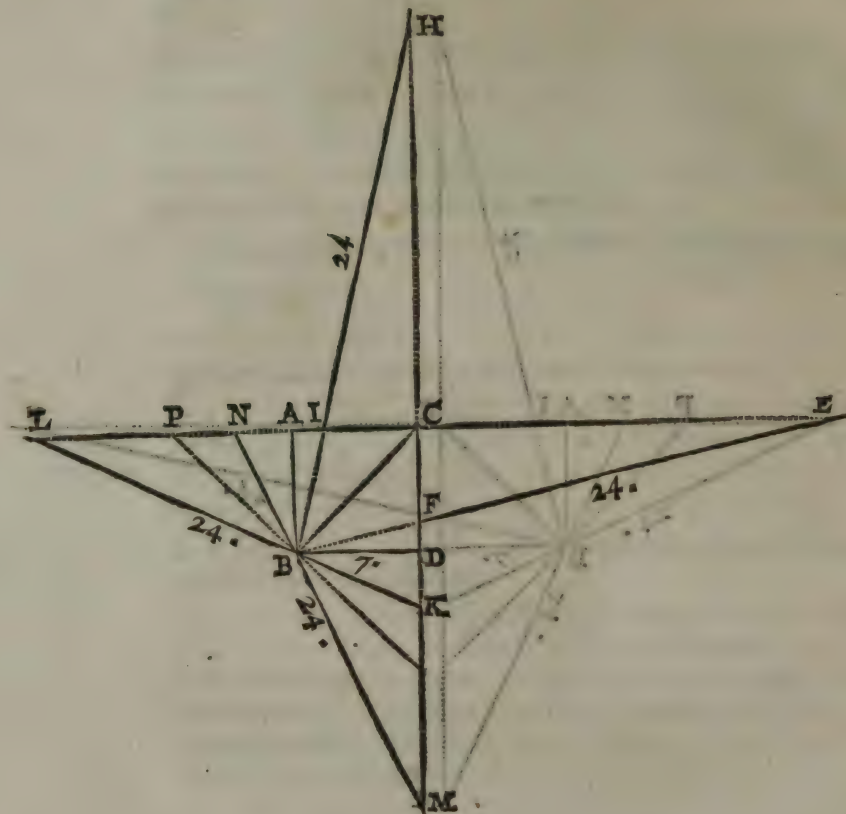
Ut, quoniam in exposito Problemate, ad inveniendam quantitatem lineæ  $DF \propto x$ , sive ad cognoscendum quanta sumi debeat longitudo à puncto  $D$  versus  $C$ , ut fiant quæ queruntur, inventa est æquatio

$x^4 - 2ax^3 + \frac{1}{cc}aa xx - a^3x + a^4 \propto 0$ , quæ duas admittit veras radices, utpote

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}},$$

8c





&  $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{4}aa} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$ :  
hinc à puncto D versus C sumendæ sunt duæ lineæ, quarum una  
est æqualis

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{4}aa} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$ ,  
designans lineam DF, & altera æqualis

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{4}aa} + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$ ,  
designans lineam DH: deinde à puncto B ad inventa puncta  
F & H

COMMENTARIJ IN LIBRUM III. 313

F & H ducendæ rectæ BF, BH, quarum hæc secet latus AC in I, & illa idem latus productum in E: Eritque quælibet interceptarum FE, IH æqualis datæ c. Porro, quoniam dicta æquatio duas quoque admittit tallas radices, quæ sunt

$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc},$   
&  $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}:$   
ideo à puncto D, versus alteram partem, sumendæ sunt duæ lineæ, quarum una est æqualis

$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc},$   
designans lineam DK, & altera æqualis

$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc},$   
designans lineam DM. Quibus sic inventis, si ab inventis punctis K & M per punctum B ducantur lineæ occurrentes ipsi AC productæ versus A: erit similiter unaquæque Interceptarum KL, MN ipsi c æqualis.

Unde apparet, quòd, etiamsi de sola DF inveniendâ quæstio fuerit, nec quicquam de interceptis IH, KL, & MN cogitaverimus, ipsæ tamen ultro post æquationis resolutionem sese offerant. Ita ut constet, per harum radicum cognitionem nos deduci in notitiam uniuscujusque casus, quem Problema propositum potest admittere; nec non, quo pacto quilibet ex ipsis est construendus ac determinandus.

Ut, quoniam, ad explicandas radices æquationis

$22 + 2\sqrt{aa + cc} + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc} = 0$ , requiritur, ut  $\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc$  non sit minus quàm  $\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$ , sive  $cc$  non minus quàm  $8aa$  (sicut dictum est pag. 309): Sic quoque ad ducendas interceptas KL, MN opus est, ut  $cc$  non sit minus quàm  $8aa$ . Quemadmodum facillè demonstrari potest, ducendo tantum rectam OP ipsi BC perpendicularem: siquidem recta OP rectarum omnium, quæ per punctum B duci possunt, minima existit. Cujus quadratum cum duplum sit quadrati ex PC, & hoc duplum quadrati ex BC, & hoc rursus quadrati ex BD duplum: erit quadratum ipsius OP quadrati ex BD octuplum. Hæc igitur ad ducendas interceptas KL, MN Problemati præfigenda est determinatio.

Porro, quod ad reliquas interceptas attinet, ut FE & IH, ex

Rr

fem-



semper sic duci possunt, ut datis rectis. sint æquales, nec est Problema eo casu determinationi obnoxium.

In numeris, esto  $BD \propto 4 \propto 7$ ,  $EF \propto 1 \propto 24$ , fietque æquatio quaesita  $x^4 - 14x^3 - 478xx - 686x + 2401 \propto 0$ . Quæ cum dividi nequeat per  $x +$  vel  $-$  aliquo numero, ultimum terminum dividente, tollo secundum ejus terminum, & fit æquatio  $z^4 - 551\frac{1}{2}zz - 4375z - 6305\frac{11}{16} \propto 0$ . Quæ ad tres dimensiones reducta dabit æquationem  $y^6 - 1103y^4 + 329375yy - 19140625 \propto 0$ . Hæc autem cum dividi possit per  $yy - 625 \propto 0$ , arguitur  $y$  esse 25, quâ mediante dividetur æquatio  $z^4 - 551\frac{1}{2}zz - 4375z - 6305\frac{11}{16} \propto 0$  in duas æquationes,  $zz - 25$  &  $50\frac{3}{4} \propto 0$ , &  $zz + 25z + 124\frac{1}{4} \propto 0$ : fientque radices prioris  $z \propto 12\frac{1}{2} + \sqrt{207}$ , &  $z \propto 12\frac{1}{2} - \sqrt{207}$ ; at posterioris  $z \propto -12\frac{1}{2} + \sqrt{32}$ , &  $z \propto -12\frac{1}{2} - \sqrt{32}$ . Verùm quoniam, ad tollendum secundum terminum primæ æquationis, supposita fuit  $x \propto z + \frac{1}{2}4$ : hinc radices ejus erunt  $x \propto 16 + \sqrt{207}$ , &  $x \propto 16 - \sqrt{207}$ , ut &  $x \propto -9 + \sqrt{32}$ , nec non  $x \propto -9 - \sqrt{32}$ . Et liquet  $DF$  fore  $16 - \sqrt{207}$ ,  $DH$   $16 + \sqrt{207}$ ,  $DK$   $9 - \sqrt{32}$ , ac denique  $DM$   $9 + \sqrt{32}$ .

Eodem modo, si  $BD$  fuerit 3, &  $FE$  4, invenietur æquatio  $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x + 81 \propto 0$ , quæ similiter per  $x +$  vel  $-$  aliquo numero ultimum terminum 81 dividente dividi nequit: unde sublato secundo ejus termino, fiet æquatio  $z^4 - 11\frac{1}{2}zz - 75z - 10\frac{11}{16} \propto 0$ . quæ ad tres dimensiones reducta, dabit æquationem  $y^6 - 23y^4 + 175yy - 5625 \propto 0$ . Hæc, cum per  $yy - 25 \propto 0$  dividi possit, sequitur  $y$  fore 5. Unde divisâ æquatione præcedente in duas æquationes  $zz - 5z - \frac{3}{4} \propto 0$ , &  $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \propto 0$ , inveniemus  $z \propto \sqrt{7} + 2\frac{1}{2}$ , vel  $z \propto \sqrt{7} - 2\frac{1}{2}$ . Quæ binæ tantùm radices ex utraque æquatione erui possunt, cum posterior æquatio  $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \propto 0$  sit impossibilis, per eâ, quæ p. 165 exposuimus, adeoque nullas admittat radices nec veras nec falsas, sed tantùm imaginarias. Quibus radicibus si addatur  $1\frac{1}{2}$  (quoniam ad tollendum secundum terminum primæ æquationis posuimus  $x \propto z + 1\frac{1}{2}$ ), habebitur  $x \propto \sqrt{7} + 4$ , vel  $x \propto \sqrt{7} - 1$ . Id quod monstrat lineam  $DF$  sumendam esse æqualem  $\sqrt{7} - 1$ ; & lineam  $DH$   $\propto \sqrt{7} + 4$ . Ex quibus constat, quòd, postquam æquatio inventa  $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x - 81 \propto 0$  nullam agnoscat radicem falsam, (quan-

(quandoquidem radices æquationis  $zz + 5z + 14 = 0$  tantummodo sunt imaginariæ, & æquatio impossibilis) ideo similiter nulla linea, cujus longitudo sit 4, per punctum B duci, atque à rectis CA, CD intercipi possit.

Cæterum, ne quid ad penitiorem intellectum harum regularum, quibus hic in reducendis ac dividendis æquationibus usi sumus, deficiat, visum fuit sequentia adjicere.

Hinc si, exempli causâ, æquatio reducenda sit  $x^3 - pxx - qx + r = 0$ , investigare oportet ex quibus binis æquationibus produci queat æquatio, quæ reducendæ similis existit. Quocirca cum, supponendo  $xx + yx + z = 0$  ac  $xx - yx + v = 0$ , ex mutua harum duarum multiplicatione producatur

$$x^3 + zxx - zyx + rz = 0, \text{ æquatio ejusdem formæ cum pro-} \\ -yy + vy \\ + v$$

posita, elicio inde tres æquationes diversas: nimirum,  $z - yy + v = 0$ ,  $-p - z + vy = 0$ , &  $rz = 0$ . E quibus deinde, si, ad inveniendam quantitatem  $y$ , in locum  $z$  &  $v$  subrogentur earum valores  $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$  &  $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ , emerget æquatio

$y^6 - py^4 + \frac{p^2}{4}yy - qq = 0$ . Inventâ autem quantitate  $y$ , loco duarum præcedentium æquationum  $xx + yx + z = 0$  ac  $xx - yx + v = 0$  scribo hæc duas  $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$  ac  $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$ . Et patet quæsitum. Idem pariter de cæteris æquationibus, quorum signa ab allatæ signis sunt diversa, est intelligendum, è quibus omnibus postea inter se collatis dictarum regularum veritas penitus elucescit. Ubi etiam liquet, si valor ipsius  $yy$  per divisionem superioris æquationis Cubicæ inveniri possit, Problema, quod ad æquationem propositam

$x^3 - pxx - qx + r = 0$  perducitur, fore omnino Planum; sin minus, illud ipsum tunc esse Solidum.

Denique ex his quoque emanat, quo pacto regula generalis reducendi omnes æquationes altiores, pag. 84 ab Authore adducta, intelligi nec non ad praxin revocari debeat.

*Cum aliis, si pro ea supponeretur DG, multò difficilior ad R  
Æquationem, sed quæ simplicissima foret, perveniremus. Quod  
qui-*

Rr 2









$$2ax + xx$$

$$2ax + xx$$

$$+ 2ax^3 + x^4$$

$$4aaxx + 2ax^3$$

$$4aaxx + 4ax^3 + x^4$$

$$\infty 2aa + 2ax + xx$$

$$bb$$

$$4aaxx + 4ax^3 + x^4 \infty 2aabb + 2abbx + bbxx$$

$$x^4 + 4ax^3 + \frac{aa}{bb}xx - 2abbx - 2aabb \infty 0.$$

Quoniam verò hæc æquatio dividi nequit per  $x$  8  $a$ , vel per  $x$  8  $b$ , vel per  $x$  8  $2a$ , vel per  $x$  8  $2b$ , hinc tollendus est secundus terminus, ut reducatur ad aliam tres tantum dimensiones habentem: quod fiet ponendo  $z = ax$

$$z^4 - 4az^3 + 6aaz - 4a^3z + a^4 \infty x^4$$

$$+ 4az^3 - 12aaz + 12a^3z - 4a^4 \infty + 4ax^3$$

$$+ 4aaz - 8a^3z + 4a^4 \infty + 4aaxx$$

$$- bbzz + 2abbz - aabb \infty - bbxx$$

$$- 2abbz + 2aabb \infty - 2abbx$$

$$- 2aabb \infty - 2aabb.$$

$z^4 * - 2\frac{aa}{bb}zz * + a^4 \infty 0$ . Quia autem hic post sublationem secundi termini contingit æquationem esse Quadratam, cum in ea desit  $z^3$  &  $z$ : non opus est ulterius progredi, cum radix ejus per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri possit. Erit enim

$$zz \infty aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb},$$

$$\& z \infty \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb} + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}, \text{ ac proinde}$$

$$x \infty -a + \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb} + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}.$$

Ubi notandum, si pro majori latere  $BC$  ponatur  $x$ , æquationem quæsitam fore quadratam: utpote,

$$x^4 * - \frac{2aa}{bb}xx * + \frac{a^4}{aabb} \infty 0, \text{ sive } x^4 \infty + \frac{2aa}{bb}xx - \frac{a^4}{aabb}, \text{ cu-}$$

jus radix est  $xx \infty aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$ , hoc est,

$$x \infty \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb} + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}. \text{ Cujus sanè cum præce-}$$

dente convenientia ex ipso schemate est perspicua. Quod si ve-

rò pro  $AE$ , duplo minori segmento, ponatur  $x$ , fiet Æquatio

$$xx \infty -bx + 2aa, \text{ cujus radix est } x \infty -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + 2aa}.$$

Quæ

Quæ loco alterius exempli haberi queunt, quorum nos admonet Author pag. 84.

Non dissimilis erit quaestio, si datis  $AB \propto a$ , &  $DC \propto b$ , quaeratur  $EC \propto x$ . Fiet enim æquatio

$x^4 + 4ax^3 + \frac{6aa}{bb}xx + \frac{4a^3}{abb}x + \frac{a^4}{aabb} \propto 0$ . In qua si tollatur secundus terminus, ponendo scilicet  $z = ax$ , prodibit æquatio  $z^4 - bbz^2 - aabb \propto 0$ , live  $z^4 + bbz^2 + aabb$ , cujus radix est  $z \propto \sqrt{\frac{bb}{2} + b\sqrt{\frac{bb}{4} + aa}}$ , hoc est,

$z \propto \sqrt{\frac{bb}{2} + b\sqrt{\frac{bb}{4} + aa}}$ , adeoque  $x \propto -\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{bb}{2} + b\sqrt{\frac{bb}{4} + aa}}$ . Sed si quaeratur  $BC \propto x$ , erit æquatio  $xx \propto bb + b\sqrt{\frac{bb}{4} + aa}$ , cujus radix est  $x \propto \sqrt{bb + b\sqrt{\frac{bb}{4} + aa}}$ . Cujus cum præcedente consensus ex figura perspicitur. Denique si quaeratur  $AD$ , habebitur æquatio  $xx \propto -bx + aa$ , cujus radix est  $x \propto -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + aa}$ . Quod similiter superioris moniti non inelegans est exemplum.

His adde sequentem quaestionem, quam olim ab Arithmetico subtilissimo, D. Nicolao Huberti à Persyn, Harlemensi, fautore meo honorando, solvendam accepi.

Invenire quatuor numeros, unitate se invicem excedentes, qui inter se multiplicati faciant 100.

Ponatur primus  $x$ , secundus  $x+1$ , tertius  $x+2$ , & quartus  $x+3$ . Fietque æquatio  $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x \propto 100$ , vel  $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x - 100 \propto 0$ . cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, & 100. Divisio verò tentata per  $x+1$ , vel per  $x+2$ , vel per  $x+4$  &c. non succedit. Hinc sublato secundo termino, prodibit æquatio  $z^4 - 2\frac{1}{2}zz^2 - 99\frac{1}{2} \propto 0$ , vel  $z^4 \propto 2\frac{1}{2}zz^2 + 99\frac{1}{2}$ , cujus radix est  $z \propto \sqrt{101 + 1\frac{1}{2}}$ , hoc est,  $z \propto \sqrt{\sqrt{101 + 1\frac{1}{2}}}$ . Ac proinde, cum ibi tollendo secundum terminum posuerimus  $x \propto z - 1\frac{1}{2}$ , fiet  $x \propto \sqrt{\sqrt{101 + 1\frac{1}{2}}} - 1\frac{1}{2}$ . Eritque quaestorum numerorum, primus  $\sqrt{\sqrt{101 + 1\frac{1}{2}}} - 1\frac{1}{2}$ , secundus  $\sqrt{\sqrt{101 + 1\frac{1}{2}}} - 1\frac{1}{2}$ , tertius  $\sqrt{\sqrt{101 + 1\frac{1}{2}}} + 1\frac{1}{2}$ , & quartus  $\sqrt{\sqrt{101 + 1\frac{1}{2}}} + 1\frac{1}{2}$ . Quod facile probari potest.

Ubi notandum, si cum hujus quaestionis Authore pro primo numero ponamus  $x - 1\frac{1}{2}$ , pro secundo  $x - 1\frac{1}{2}$ , pro tertio  $x + 1\frac{1}{2}$ , pro



pro quarto  $x + 1\frac{1}{2}$ , quæstionem facilius solvi posse. Invenitur enim æquatio  $x^4 \propto 2\frac{1}{2}xx + 99\frac{7}{16}$ , omnino ut præcedens, denominata à radice  $z$ ; unde quæsitæ numeri sunt ut supra. Verùm difficile satis foret in hæc hypotheses incidere, non secus quàm in superiorem Pappi constructionem, sicut Author innuit pag. 83,

Restat jam exemplum aliquod exhibendum, ubi æquationem ad Quadratam reducere non licet, & Problema Solidum existit, Quale est illud, quod ante annos aliquot sibi ad investigandum proposuit Nobilissimus atque Amplissimus Vir D. Ioannes de Wit, Consiliarius & Pensionarius sive primarius Hollandiæ West-Frisiæque minister, Mathematicum peritissimus. à quo insignem tractatum, brevi, si volet Deus, expectare poteris, in quo Planorum atque Solidorum Locorum per artem Analyticam inventionem aliter quàm Cartesius exponit.

Datis in superiori triangulo rectangulo  $ABC$ , segmento basis  $DC \propto a$ , & differentiâ laterum  $CF \propto b$ ; invenire  $AB$ , latus minus.

Esto  $AB \propto x$ , fietque æquatio  $x^4 + 4bx^3 + 6bbxx + 4b^3x + 2aabbb \propto 0$ . Quæ cum dividi nequeat per  $x$  &  $b$ , tollo secundum ejus terminum, statuendo  $z = b \propto x$ , unde emergit æquatio  $z^4 + 4az^3 + 6a^2az^2 + 4a^3abz + 2a^4abb \propto 0$ , quippe quæ invenitur, quærendo latus majus  $BC$ . Hanc porrò reduco ad aliam, tres tantum dimensiones habentem, juxta regulam pag. 79, fietque æquatio  $y^6 - 4a^4ay^4 + 4a^4abb^2y^2 - 4a^4bb^4 \propto 0$ . Quæ cum dividi nequeat per binomium aliquod, constans ex quantitate incognitâ  $yy$  & quantitate cognitâ, ultimum terminum  $4a^4bb$  dividente, indicio est, Problema propositum esse Solidum, adeoque non nisi per Conicas sectiones solvi posse. Neque minus vitium est, solutionem ejus post hæc tentare per lineas rectas & circulos, quàm adhibere Conicas sectiones ad constructionem eorum, quæ per lineas rectas & Circulos construi possunt, ut monet D. des Cartes pag. 79.

In numeris, esto  $DC \propto 5$ ,  $CF \propto 2$ ,  $AB \propto 1x$ , eritque æquatio  $1x^4 + 8x^3 - 26x^2 - 68x - 84 \propto 0$ . Quæ cum dividi non possit per  $1x$  plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum  $84$  dividente, aufero secundum terminum  $8x$ , & fit,  $1x^3 - 50x^2 + 100x - 100 \propto 0$ . Hæc autem ad tres dimen-

mentiones reducta producit  $x^6 - 100x^4 + 2900xx - 1000000$ . quæ cum similiter dividi non possit per  $xx +$  vel — aliquo numero, ultimum terminum dividente: sequitur Problema in datis numeris esse Solidum, lineamque AB per planorum Geometriam si-ve per regulas primo libro expositas non posse inveniri.

Non dissimilis erit quæstio, si, datis AD  $\propto a$ , FC  $\propto b$ , quærat-ur BC  $\propto x$ . Invenitur enim æquatio

$x^4 - 4bx^3 + 6bbxx - 4bb^2x + b^4 \propto 0$ . Unde ponendo  $x \propto z + b$ , emerget æquatio  $z^4 - 2aaz^2 - 2abbz - aabb \propto 0$ . eadem nempe, quæ provenit, quærendo AB  $\propto z$ .

Porro, si exemplorum copiam desideres, potes rursus ex iisdem datis quærere EC  $\propto x$ , & habebis

$x^4 + 4ax^3 - 2aa^2xx - 8abbx - 8aabb \propto 0$ . Cujus secundum terminum si tollas, ponendo  $z - a \propto x$ , obtinebis  $z^4 - 2aaz^2 - 2bb^2z^2$

$- 4abbz + a^4 - 2aabb \propto 0$ , eandem, quam si quæras DC  $\propto z$ .

Ubi si denique quæras BD, invenies hanc æquationem:

$x^4 - 2a^2x^2 - 2aabbx^2 + 4a^2bbxx + a^4bb \propto 0$ . Sed hæc forsân ni-mia videbuntur.

E quibus colligere licet: quòd, Problemate aliquo Solido exi-stente, si per viam aliquam perveniatur ad Æquationem valde compositam, communiter etiam per aliam viam ad simplicio-rem deveniri possit, veruntamen pauciores quàm tres dimensiones non habentem.

*Iam verò postquam compertum est, Problema propositum esse Solidum; si-ve Æquatio, per quam illud quæritur, ad Qua-drato-quadratum adscendas; si-ve ipsa non aliùs quàm ad Cu-bum assurgat: potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum sectionum, quacunque illa tandem sit, &c.]* Ex his notandum est, quoties in proposita quæstione data est ali-qua Conica sectio, & Æquatio ad 3 vel 4 tantum dimensiones ascendit, tunc eam semper ope illius datæ Conicæ sectionis per solam regulam & circinnum solvi posse. Adcò ut pro Plano Pro-blemate haberi quodammodo possit, etiamsi reverà sit Solidum, ut etiam ab Authore hic appellatur.

Ss

Hu-



Hujus rei elegans exemplum suggerere potest Problema Apollonii de Parabola, lib. 5 Conicorum, de quo meminit Pappus Alexandrinus in scholio Prop<sup>is</sup> 30 libri 4<sup>ti</sup> Collectionum Mathematicarum. In cujus solutionem eos, qui id per Conica vel Linearia, hoc est, per improprium genus solvere quæsiuerunt, dum illud pro Plano Problemate habet, meritò reprehendit. Quoniam autem vir doctissimus ac de Mathematicis studiis perinde meritis Alexander Andersonus in exercitatione sua 5<sup>a</sup> dictum Problema non levibus indiciis sequentis argumenti fuisse innuit, seque ibidem scribit Analyticâ suâ duce tandem reperisse absque solida inclinatione (ut Pappus loquitur) non posse definiri: visum fuit id ipsum hic loci, in hoc rationum æquilibrio autoribus istis sic dissentientibus, cuius inquirendum proponere.

## P R O B L E M A.

Parabolâ datâ, è puncto, intra vel extra eam dato, rectam lineam ducere, quæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.

Etenim si in hujus Problematis solutione investiganda, rectam, quæ ad axem è puncto in Parabola, ad quod quæsitâ recta duci debet, perpendicularis demittitur, pro incognita quantitate accipiamus: incidemus in æquationem Cubicâ, quæ nullo modo erit reducibilis, & tamen secundum regulam generalem p. 85 ope ejusdem datæ Parabolæ quàm facillimè construi poterit, utendo tantum rectis lineis & circulo. Cujus porro demonstrationem universalem, quam sibi vulgari modo Geometrarum, continuæ contemplationi figuræ obnoxiam, acutissimus pariter atque eruditissimus noster Chr. Hugenius concinnavit, cum ipsa jam pridem nobis aliisque ab eo communicata fuerit, nec illa etiam hujus loci existat, eandem hic prætereundam duximus.

T Atque ita Æquatio reducendâ ad hanc formam:  $\mathcal{Z}^3 \propto^* a p \mathcal{Z}$ ,  $a a q$ , si incognita quantitas tres tantum dimensiones habeat; aut ad hanc:  $\mathcal{Z}^4 \propto^* a p \mathcal{Z} \mathcal{Z}$ .  $a a q \mathcal{Z}$ .  $a^3 r$ . si quatuor obtineat dimensiones; seu, sumendo  $a$  pro unitate, ad hanc:  $\mathcal{Z}^3 \propto^* p \mathcal{Z} \cdot q$ ; aut ad hanc:  $\mathcal{Z}^4 \propto^* p \mathcal{Z} \mathcal{Z} \cdot q \mathcal{Z} \cdot r$ .] Ubi apparet, hujus Geo-

COMMENTARII IN LIBRUM III. 323

Geometria Methodam requirere, ut, literæ, quæ in priori æquatione pro unitate est accepta, quadratum reperiatur in ultimo termino; in posteriori verò æquatione, ut literæ, quæ pro unitate in termino  $z$  est accepta, quadratum reperiatur in termino  $z$ , ac ejus cubus in termino ultimo. Etenim si habeatur æquatio  $z^3 \propto^* b b z . c^3$ , ac illius loco alia desideretur, cujus penultimus terminus habeat  $a$ , ac ultimus  $a a$ : Fiat ut  $a$  ad  $b$ , sic  $b$  ad quartam, quæ vocetur  $p$ : eritque  $a p \propto b b$ ; Rursus, fiat ut  $a a$  ad  $c c$ , sic  $c$  ad quartam, quæ sit  $q$ ; live etiam (quod eodem redit) ut  $a a$  ad  $c$ , sic  $c$  ad tertiam, quæ vocetur  $d$ ; ac denno ut  $a$  ad  $d$ , sic  $c$  ad  $q$ : eritque  $a a q \propto c^3$ . Unde pro  $z^3 \propto^* . b b z . c^3$  scribi poterit  $z^3 \propto^* a p z . a a q$ , live, sumendo  $a$  pro unitate:  $z^3 \propto^* . p z . q$ .

Nec aliter fit si habeatur  $z^4 \propto^* b b z z . c^3 z . d^4$ . Substituto enim  $a p$  in locum  $b b$ , &  $a a q$  in locum  $c^3$  (ut ante), faciendum est, ut  $a$  ad  $d$ , sic  $d$  ad quartam, quæ vocetur  $e$ , eritque  $a e \propto d d$ , ideoque  $a a e e \propto d^4$ . Ubi rursus, si fiat, ut  $a$  ad  $e$ , ita  $e$  ad tertiam, quæ vocetur  $r$ , erit  $a r \propto e e$ , ac proinde  $a^3 r \propto d^4$ . Ita ut pro æquatione propositâ  $z^4 \propto^* . b b z z . c^3 z . d^4$  reponi possit  $z^4 \propto^* a p z z . a a q z . a^3 r$ , live, sumendo  $a$  pro unitate:  $z^4 \propto^* . p z z . q z . r$ . Quod erat ostendendum. Eadem est ratio æquationis pag. 97.

E quibus liquidò constat, quanti sit momenti in Geometria concipere unitatem, cum, præter ejus utilitatem, primo libro ostensam, non solum ejus beneficio æquationes 3 & 4, ut & 5 & 6 dimensionum ita præparentur, ut hæc juxta unam & illæ juxta aliam regulam resolvi queant; sed ipsæ etiam hoc pacto designatæ ad numeros referri, atque ad ipsarum radices explicandas inservire possint, adeoque, quænam inter Arithmeticam & Geometriam relatio ac convenientia existat, edoceant.

Deinde supponendo Parabolam  $F A G$  jam descriptam esse, & axem ejus esse  $A C D K L$ , latusq; rectum  $a$  seu 1. Ubi liquet, quod, postquam in æquatione resolvenda quantitatem  $a$  seu unitatem, ut proximè est explicatum, subrogavimus, eamque juxta regulam pro latere recto Parabolæ  $F A G$  assumpsimus, quo pacto Problemata omnia Solida unius ejusdemque Parabolæ ope solvi possint. Cum enim reduci semper queant ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, superiorum formularum, & una eadem-



eademque quantitas  $a$  in earundem æquationum terminis subrogari semper possit, evidens est, ipsam unius ejusdemque Parabolæ ope construi posse. Idem intelligendum quoque est de æquationibus numericis trium quatuorve dimensionum, quarum nulla ex radicibus est rationalis, quarumque valor similiter per sectionem Conicam est determinandus. Ut supra fuit ostensum.

Vide figuram p. 86  
vel 89.

Cæterum ut hæc regula cuius perspecta reddatur, concipiatur Parabola esse descripta  $FAG$ , cujus latus rectum sit  $\infty a$  seu  $1$ , & in axe ejus  $ADKL$  assumptâ  $AD \infty b$ , fingatur ex  $D$  eidem perpendicularis esse erecta  $DE \infty c$ , centroque  $E$  intervallo  $EH \infty d$  descriptus circulus  $FHG$ , qui Parabolam ab utraque parte axis secet in  $G$  &  $F$ : oporteatque investigare æquationem, cujus radix sit perpendicularis  $GK$  aut  $FL \infty z$ .

Ad quam inveniendam, dividatur  $zz$ , quadratum ex  $GK$ , per latus rectum seu  $a$ , & sit  $AK \infty \frac{zz}{a}$ . E qua subductâ  $AD \infty b$ , relinquetur  $DK$  seu  $EM \infty \frac{zz}{a} - b$ . Deinde, quoniam additis  $ED$ , hoc est,  $MK$ , &  $KG$ , tota  $MG$  est  $\infty c + z$ ; & quadrata ex  $EM$  &  $MG$  simul addita faciant  $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + cz + zz$ , quadratum ex  $EG$ : erit  $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + cz + zz \infty dd$ , hoc est, ordinatâ æqualitate, habebitur æquatio

$$z^4 \infty * +^2 abzz -^2 aacz + aadd. \quad \text{Eadem quippe, quæ in}$$

$$\begin{array}{r} -aa \\ -aabb \\ -aacc \end{array}$$

venitur, ponendo  $FL \infty -z$ . Hinc si, exempli causâ, æquatio proposita construenda fuerit  $z^4 \infty * + apzz - aqz + ar$ : erit, factâ separatim comparatione inter singulos terminos unius & singulos alterius,  $b \infty \frac{a+p}{2}$ ,  $c \infty \frac{1}{2}q$ , &

$d \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$ . Quod illud ipsum est, quod Authoris regula faciendum præcipit. Eodem modo reliquorum casuum constructio inveniri potest. Idem intellige de constructione æquationis pag<sup>ina</sup> 97, aliarumque hic sequentium.

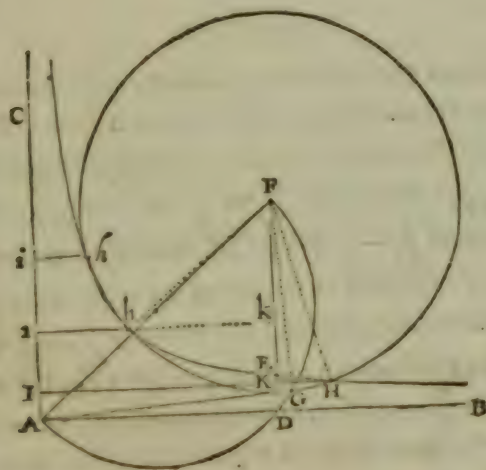
VV Adeò ut hæc regula omnium, quas aliquis exoptare queat, generalissima sit & perfectissima.] Quoniam autem, quo pacto Solida

Solida Problemata etiam Hyperbolæ & Circuli beneficio, postquam ad æquationem trium quatuorve dimensionum sunt reducta, construi possint, intelligere non modò jucundum quin imò utile existit: visum fuit hoc loco afferre regulam, ab ingeniosissimo atque integerrimo nostro Huddenio inventam, quæ ejusdem æquationis radices, prout ipsa ad hanc formam  $z^4 - pz^3 + qz^2 - rz + f\infty 0$  aut ad hanc  $z^3 - pzz + qz - r\infty 0$  est revocata, ita ut omnes termini per signa + & - se invicem sequantur, inveniri valeant.

CONSTRUCTIO ÆQUATIONIS

$$z^4 - pz^3 + qz^2 - rz + f\infty 0.$$

Ductis AB, AC, rectum angulum A efficientibus, sumptaque in AB lineâ AD  $\propto \frac{1}{2}p$ , agatur ex D ipsi AC



parallela DF. Deinde in hac invento puncto E, ita ut id, quod sub AD, DE continetur, sit  $\propto \sqrt{f}$ , describatur per E circa Asymptotos AB, AC Hyperbola HEh.

Ss 3

Por-



Porro assumptâ  $DF \propto \frac{r}{2\sqrt{f}}$ , jungatur  $AF$ ; & super  $AF$  descripto semicirculo  $ADF$ , collocetur in eo  $AG \propto \sqrt{q}$ , centroque  $F$  circulus describatur, transiens per inventum punctum  $G$ . Qui quidem Circulus Hyperbolam secabit vel tanget in tot punctis, quot æquatio diversas radices admittet, à quibus si ad lineam  $AC$  demittantur perpendiculares  $HI$ ,  $hi$ , &  $hi$ : erunt ipsæ radices quasitæ.

Ubi notandum, si  $AG$  major inveniretur, quàm ut semicirculo super  $AF$  descripto inscribi posset; aut etiam Circulus  $GHh$  adeò parvus esset, ut Hyperbolam  $HEh$  in nullo prorsus puncto secaret vel tangeret, nullam itidem tunc fore radicem in æquatione, quæ non esset imaginaria.

*Demonstratio.*

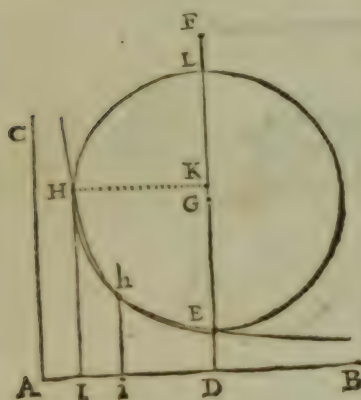
Etenim lineâ  $IH$  existente  $\propto z$ , cum id, quod sub  $AD$ ,  $DE$  vel sub  $AI$ ,  $IH$  continetur, sit  $\propto \sqrt{f}$ : erit  $AI$  seu  $DK \propto \frac{\sqrt{f}}{2}$ . Unde cum  $DF$  &  $DK$  à se invicem subductæ relinquant  $KF$ , &  $DF$  sit  $\propto \frac{r}{2\sqrt{f}}$ : erit  $KF \propto \frac{r}{2\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{f}}{2}$  seu  $\frac{\sqrt{f}}{2} - \frac{r}{2\sqrt{f}}$ , adeoque  $\square KF$  semper  $\propto \frac{f}{4} - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{4f}$ . Est autem  $KH \propto z - \frac{1}{2}p$  seu  $\frac{1}{2}p - z$ , ac proinde  $\square KH$  semper  $\propto zz - pz + \frac{1}{4}pp$ . Hinc summa utriusque simul, hoc est,  $\square FH$  erit  $\propto \frac{f}{4} - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{4f} + zz - pz + \frac{1}{4}pp$ . Hoc verò cum æquetur  $\square^o AF - \square^o AG$ , hoc est,  $\propto \frac{1}{4}pp + \frac{r^2}{4f} - q$ : fiet, ordinatâ æqualitate,  $z^4 - pz^3 + qzz - rz + f \propto 0$ . Quæ est æquatio proposita. Unde liquet  $IH$  esse  $\propto z$ .

CON-

CONSTRUCTIO AEQVATIONIS

$$z^3 - pzz + qz - r\infty 0.$$

Ductis, ut ante, AB, AC, & in AB assumptâ AD  
 $\propto \sqrt{q}$ , agatur ex D ipsi AC parallela DF. Deinde in  
 hac acceptis  $DE \propto \frac{r}{q}$ , &  $EF \propto p$ , describatur per E  
 circa Asymptotos AB, AC Hyperbola EhH. Porrò



sectâ DF bifariam in G,  
 centro G & intervallo  
 GE describatur circulus  
 EHL, qui quidem Hy-  
 perbolam in tot punctis  
 præter E secabit vel tan-  
 get, quot æquatio diver-  
 sas radices admittet, è  
 quibus si ad lineam AB  
 demittantur perpendi-  
 culares HI, hi, erunt  
 ipsæ radices quæsitæ.

*Demonstratio.*

Quoniam, HI existente  $\propto z$ , AI, per supra dicta, est  $\propto \frac{r}{q} \sqrt{q}$ ,  
 & eadem ab AD subducta relinquit ID vel HK  $\propto \sqrt{q} - \frac{r}{q} \sqrt{q}$ :  
 erit  $\square$  ex HK  $\propto q - \frac{2r}{q} + \frac{rr}{q^2}$ . Deinde, quoniam  $DE \propto \frac{r}{q}$  ab-  
 latâ ex DK seu IH  $\propto z$ , relinquitur EK  $\propto z - \frac{r}{q}$ ; at verò  
 DK  $\propto z$  subtractâ ex DL seu EF  $\propto p$ , relinquitur KL  $\propto p - z$ :  
 erit  $\square$  EKL  $\propto pz - \frac{pr}{q} - z^2 + \frac{rz}{q}$ . Hinc cum  $\square$  ex HK æ-  
 quetur  $\square$  EKL, erit  $q - \frac{2r}{q} + \frac{rr}{q^2} \propto pz - \frac{pr}{q} - z^2 + \frac{rz}{q}$ .  
 Et fit, ordinatâ æqualitate,  $z^3 - \frac{r}{q}z^2 + qz - \frac{pr}{q} - rz + rr \propto 0$ .  

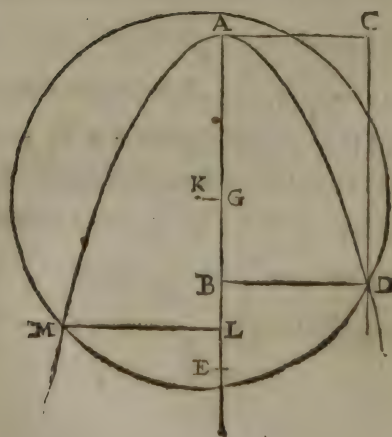
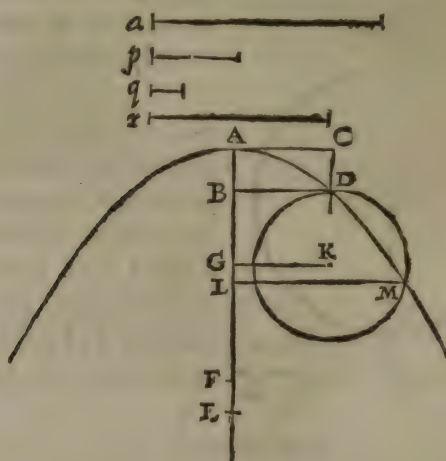
$$-p + \frac{pr}{q}$$

Quæ

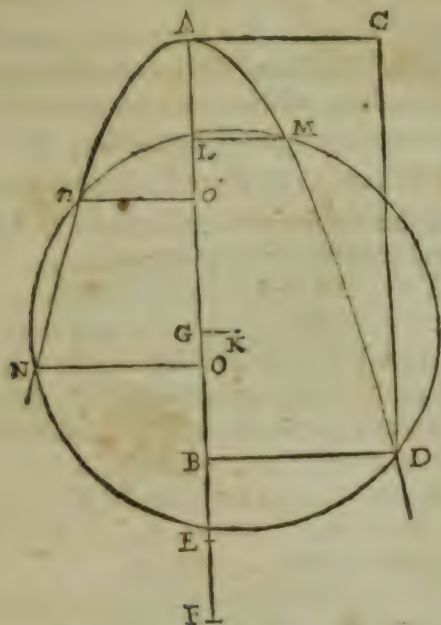


Quæ æquatio dividi potest per  $z - \frac{r}{q} \infty 0$ , & fit  $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$ , æquatio proposita. Unde liquet HI esse  $\infty z$ .

His subijunge sequentem regulam, à me inventam, quâ ope Circuli & Parabolæ Æquationes Cubicæ, in quibus 2<sup>us</sup> terminus non est sublatus, construi possunt, prout ipsæ ad hanc formam  $z^3 \propto pzz. aqz. aar$ , aut ad hanc  $z^3 \propto pzz^*. aar$ ; sive etiam (sumendo  $a$  pro unitate) ad hanc  $z^3 \propto pzz. qz. r$ , aut ad hanc  $z^3 \propto pzz^*. r$ , sunt reductæ. Ea autem talis est.



De-



Descriptâ Parabolâ NAM, cujus axis sit ABE, & latus rectum  $\propto a$  seu 1, erigo ex vertice A, ad dextram Parabolæ, super axe, perpendicularem AC  $\propto p$ ; & ex C ductâ CD ipsi AB parallelâ, donec Parabolæ occurrat in D, duco ex D ipsi AC parallelam DB, occurrentem axi in B. Dehinc in linea AB, continuatâ versûs B, sumendo BE  $\propto 1$ , oportet facere EF  $\propto q$ , eamque ulterius in illa versûs hanc eandem partem sumere, si habeatur  $+q$  in æquatione; sed versûs alteram partem, si habeatur  $-q$ . Porro sectâ AF bifariam, aut AE, si  $q$  sit nulla, in G, si habeatur  $-p$ , &  $q$  &  $r$  diversis signis sint adfectæ; aut etiam si habeatur  $+p$ , &  $q$  &  $r$  iidem signis denotatæ fuerint, erigenda est ex G perpendi-

T r



Signum =  
significat  
differen-  
tiam, qua  
est inter  $r$   
&  $p q$ .

pendicularis  $GK \propto \frac{r+pq}{2}$ , aut  $\propto \frac{1}{2}r$ , si  $q$  nulla sit, eaque ad dextram collocanda, si  $p$  &  $r$  diversa signa habeant, aut ad sinistram, si eadem. Vel contra, si habeatur  $-p$ , &  $q$  &  $r$  iisdem signis adficientur; aut etiam si habeatur  $+p$ , &  $q$  &  $r$  diversis signis designentur, oportet facere  $GK \propto \frac{r-pq}{2}$ , aut  $\propto \frac{1}{2}r$ , si  $q$  nulla sit, eamque, ut ante, ad dextram sinistramve collocare, si  $r$  sit major quam  $p q$ ; vel contra, si  $r$  minor sit quam  $p q$ . Quo peracto, si ex  $K$  circulus describatur, transiens per punctum  $D$ , secabit is vel tanget Parabolam in tot punctis præter  $D$ , quot æquatio diversas radices admittet; è quibus si ad axem demittantur perpendiculares, obtinebuntur omnes æquationis radices, tam falsæ, quam veræ. Quarum quidem veræ, ut  $ML$ , ad dextram cadent, & falsæ, ut  $NO$ , ad sinistram, si habeatur  $-p$  in æquatione. Sed contra, si habeatur ibi  $+p$ , veræ cadent ad sinistram, & falsæ ad dextram.

Cujus quidem demonstrationem, cum eodem modo fieri possit, quo illa Authoris paginæ 89, brevitatis studio hic omittimus.

Ubi demum advertendum, regulam hanc habere etiam locum in Æquationibus Cubicis, quarum 2<sup>da</sup> terminus est sublatus, si tantum in iis  $p$  intelligamus esse  $\infty 0$ , & veras radices ex eadem parte Parabolæ esse sumendas, quâ erecta est perpendicularis  $GK$ , & falsas ex altera, cum habetur  $+r$  in æquatione; aut contra, si in ea habetur  $-r$ .

Cæterum cum & alias regulas huc afferre possem, quibus hæ eadem æquationes sicut & superiores Quadrato-quadratæ construi queunt: tamen, ne in iis hic recensendis nimis longus sim (quandoquidem infinitas invenire licet), suffecerit jam allatas, tanquam faciliores exposuisse, cæterasque etiam aliis quærendas reliquisse.

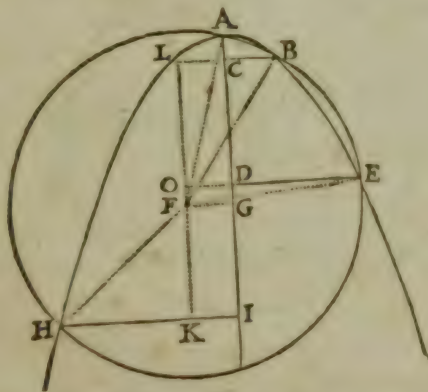
X Falsa autem  $FL$  aqualis est duabus hisce  $2N$  &  $NV$  simul sumptis, quemadmodum ex calculo facile est videre.] Veritatem proprietatis Parabolæ, quam hic obiter adnotat Autor,

ctor, & ad quam investigandam me ante annos aliquot Parisiis instigavit Doctissimus, ac Mathematicum peritiâ, non minus quàm omnigenâ virtute, ornatissimus vir D. Claudius Mylon, J.C, sicut à me tum inventa fuit, sequenti Theoremate exponam.

THEOREMA.

Si Circulus Parabolam in pluribus punctis secuerit, à quibus ad axem ex utraque parte perpendiculares demittantur: erit ea, quæ ab una parte axis reperitur, æqualis illis, quæ sunt ab altera parte. Quòd si verò ab utraque parte in duobus punctis illam secet: erunt similiter duæ ab una parte æquales duabus ab altera parte.

Sit Parabola H A B E, cujus axis A I, vertex A, Circulus autem ipsam secans H B E. Qui quidem primò transeat per verticem, secetque Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in punctis B & E. Demissis autem ex punctis H, B, & E in axem



perpendicularibus H I, B C, & E D: ostendendum est, H I æqualem esse ipsis B C & E D simul sumptis.

Est o latus rectum Parabolæ  $\propto a$ , C B  $\propto e$ , D E  $\propto d$ , H I  $\propto z$ , A G  $\propto x$ , & F G  $\propto y$ . Hinc cum, per 11 propositionem 1 libri Coni-

T t 2





GD seu FO  $\propto x - \frac{dd}{a}$ . Cujus quadrato  $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^2}{a^2}$  si addatur quadratum ex EO  $dd + 2dy + yy$ , erit summa  $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^2}{a^2} + dd + 2dy + yy$  quadratum ex FE. Quod similiter adæquetur quadrato ex FA  $xx + yy$ , atque æquatio ritè ordinetur, ut inveniatur rursus  $x \propto \frac{ad + 2aay + aad}{2ad}$ .

Quia verò, quæ uni æquantur, illa quoque æqualia sunt inter se, erit  $\frac{c^2 + 2aay + aac}{2ac} \propto \frac{d^2 + 2aay + aad}{2ad}$ . In qua æquatione, si multiplicemus per crucem, atque post æqualium ex æqualibus subductionem, ita transferamus quantitates, ut utraque æqualitatis pars dividi possit per  $d - c$ , orietur  $edd + ccd \propto 2aay$ .

Similiter, si ex AI  $\propto \frac{zz}{a}$  auferatur AG  $\propto x$ , relinquetur GI seu FK  $\propto \frac{zz}{a} - x$ . Cujus quadrato  $\frac{z^4}{a^2} - \frac{2zxz}{a} + xx$  si addatur quadratum ex HK  $zz - 2yz + yy$ , erit aggregatum  $\frac{z^4}{a^2} - \frac{2zxz}{a} + xx + zz - 2yz + yy$  quadratum ex HF. Quod item ob rationem supradictam quadrato ex FA seu  $xx + yy$  erit æquale. Quibus adæquatis, si æquatio ritè ordinetur, constabit tertio  $x \propto \frac{z^2 - 2aay + aaz}{2az}$ .

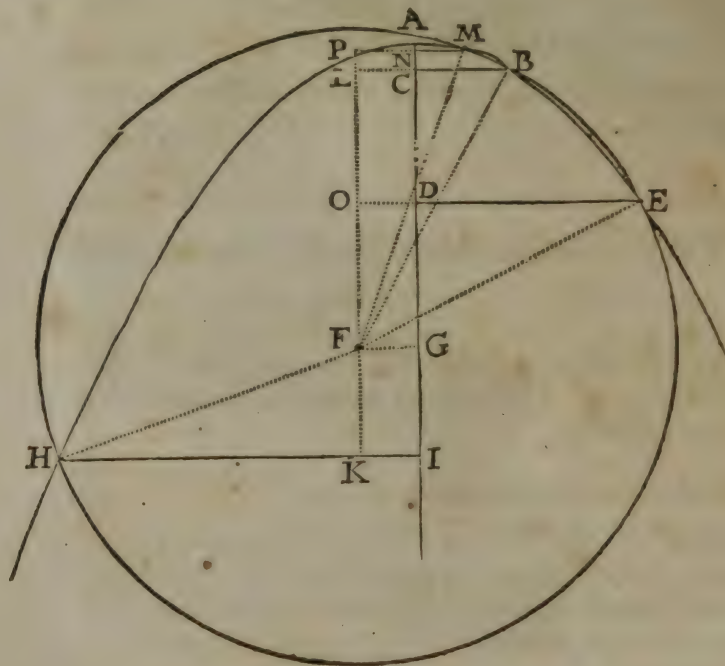
Quoniam autem primò inventa fuit  $x \propto \frac{c^2 + 2aay + aac}{2ac}$ , erunt itidem  $\frac{z^2 - 2aay + aaz}{2az} \propto \frac{c^2 + 2aay + aac}{2ac}$  inter se æqualia. Quocirca, si multiplicatio fiat per crucem, atque post æqualium ex æqualibus ablationem, quantitates transferantur, ut utraque æqualitatis pars dividi possit per  $z + c$ : orietur  $czz - ccz \propto 2aay$ .

Cum verò & supra inventum fuerit  $2aay \propto edd + ccd$ , erunt itidem  $czz - ccz \propto edd + ccd$  inter se æquales. Quam æquationem si porò per  $c$  dividamus, atque quantitates unius partis transferamus in aliam sub contrario signo, fiet  $zz - cz - \frac{dd}{cd} \propto 0$ .

Postquam igitur evolvimus atque enodavimus propositionis data, donec tandem pervenerimus ad æquationem  $zz - cz - \frac{dd}{cd} \propto 0$ , restat ut illa quæsito respondeat, atque ejus beneficio propòiti veritas



veritas eluceat, modò ex datis elici possit. Ideoque tentatâ divisione ejusdem æquationis per  $\chi - c - d \infty 0$ , ut constet, num verum sit, quod intenditur, nempe,  $\chi$  æquari  $c + d$ : reperitur divisionem fieri posse, & oriri  $\chi + d \infty 0$ . Et manifestum fit,  $\chi$  æquari  $c + d$ , sive  $HI$  æqualem esse ipsis  $BC, ED$  simul sumptis. Quod erat demonstrandum.



Vnde patet, si Circulus, transiens per verticem Parabolæ, eam in B vel E tangat, hoc est, rectas CB, DE sibi invicem æquales faciat, tunc quidem HI ipsius CB seu DE duplam fore. Si enim in hac ultima æquatione pro  $d$  scribatur  $c$ , fiet æquatio  $\chi\chi - c\chi - 2cc \infty 0$ . Quæ dividi poterit per  $\chi - 2c \infty 0$ , & orietur  $\chi + c \infty 0$ . Id quod arguit  $\chi$  valere  $2c$ , hoc est, HI ipsius CB seu DE duplam esse.

Sed non transeat circulus HBE per verticem A, verum secet Para-

Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in tribus punctis E, B, & M: Dico similiter HI æqualem esse ipsis ED, BC, & MN simul sumptis.

Positis enim iisdem quæ prius, esto præterea  $MN \propto b$ . Unde, simili ratione, quæ ante, AN erit  $\frac{bb}{a}$ . Sublatâ autem AN ex AG  $\propto x$ , relinquitur NG seu PF  $\propto x - \frac{bb}{a}$ . Cujus quadratum  $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{a^2}$  si addatur quadrato rectæ MP  $\propto bb + 2by + yy$ , erit summa  $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{a^2} + bb + 2by + yy$  quadratum rectæ FM.

Quoniam autem in Circulo, ob æqualitatem radiorum, rectæ lineæ FB & FM sunt æquales, erunt quoque eorundem quadrata  $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{a^2} + yy + 2cy + cc$ , &  $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{a^2} + bb + 2by + yy$  æqualia. Unde, si demantur utrinque æquales quantitates & reliquæ multiplicentur per  $aa$ , atque quantitates in  $x$  ductæ ad unam æquationis partem transferantur, reliquæ verò ad alteram, fiet  $c^4 - b^4 + 2aac y - 2aaby + aacc - aabb \propto 2acccx - 2abbbx$ . Dividatur jam utraque pars per  $c - b$ , & oriatur  $c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab \propto 2acx + 2abx$ . Rursus dividatur utrinque per  $2ac + 2ab$ , & oriatur  $x \propto \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$ .

Eodem modo, cum rectæ FE & FM sint æquales, erunt etiam earum quadrata, nempe,  $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{a^2} + dd + 2dy + yy$  &  $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{a^2} + bb + 2by + yy$  æqualia. Quare demptis utrobique æqualibus, reliquisque ductis in  $aa$ , transeant porrò quantitates in  $x$  ductæ ad unam partem, & reliquæ ad alteram, fiet  $d^4 - b^4 + 2aady - 2aaby + aadd - aabb \propto 2addx - 2abbbx$ . Dividatur utraque pars per  $d - b$ , oriaturque  $d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab \propto 2adx + 2abx$ . Rursus dividatur utrinque per  $2ad + 2ab$ , & habebitur  $x \propto \frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$ .

Jam verò, quoniam, quæ uni æqualia sunt, illa quoque inter se sunt



sunt æqualia, erit  $\frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$

$$\propto \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$$

Brevitatis verò causâ prob<sup>3</sup> + 2aay + aab scribatur + e<sup>3</sup>, du-  
ctâque utrâque æqualitatis parte in 2a, seu (quod idem est) diviso  
utriusque denominatore per 2a, instituatür porro multiplicatio  
per crucem, ut fractiones evanescant, fietque  $cd^3 + bd^3 + bcd$   
+  $bbdd + bbcd + b^3d + aacd + aabd + ce^3 + be^3 \propto c^3d$   
+  $c^3b + bccd + bbcc + bbcd + b^3c + aacd + aabc +$   
+  $de^3 + be^3$ . Et, deletis utrinque æqualibus, restituatür valor quan-  
tatis assumptæ e<sup>3</sup>, habebiturque  $cd^3 + bd^3 + bcd + bbdd +$   
+  $b^3d + aabd + b^3c + 2aay + aabc \propto c^3d + c^3b + bccd +$   
+  $bbcc + b^3c + aabc + b^3d + aady + aabd$ . Rursus demptis  
utrobique æqualibus, transferantur quantitates in y ductæ ad unam  
partem, reliquæ verò ad alteram, & divisio tandem instituatür  
per d - c, orieturque  $cd + cd + bdd + 2bcd + bbd + bbe$   
+  $bcc \propto 2aay$ .

Similiter, cum rectæ HF & FM sint æquales, erunt pariter  
earum quadrata  $\frac{x^4}{aa} - \frac{2xxz}{a} + xx + zz - 2zy + yy$ , &  
 $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$  æqualia. Unde sublati  
utrinque æqualibus, reliquisque per aa multiplicatis, si transfe-  
rantur porro quantitates, ita ut, quæ in x ductæ sunt, unam faciant  
æquationis partem, reliquæ verò alteram, fiet  $z^4 - b^4 - 2aaz$   
-  $2aaby + aazz - aabb \propto 2azzx - 2abbx$ . Dividatur  
jam utraque pars per z + b, orieturque  $z^3 - bzz + bbz - b^3$   
-  $2aay + aaz - aab \propto 2azzx - 2abx$ . Et rursus utrinque  
per 2az - 2ab, fietque

$$x \propto \frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}$$

Quoniam verò superius inventa fuit quantitas x æqualis

$$\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}, \text{ hinc}$$

$$\frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab} \&$$

$$\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab} \text{ erunt quoque inter se}$$

æqualia.

Bre-

Brevitatis autem causâ rursus pro  $+b^3 + 2aay + aab$  scribatur  $+e^3$ , &  $-e^3$  pro  $-b^3 - 2aay - aab$ . Deinde, multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per  $2a$ , seu (quod idem est), diviso utriusque denominatore per  $2a$ , fiat multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque  $cz^3 + bz^3 - bczz - bbzz + bbezz + b^3z + aacz + aabz - ce^3 - be^3 \propto c^3z - bc^3 + bccz - bbcc + bbezz - b^3c + aacz - aabc + zc^3 - be^3$ . Postea auferantur utrinque æquales quantitates, & restituantur valor quantitatis assumptæ  $e^3$ , & sit  $cz^3 + bz^3 - bczz - bbzz + b^3z + aabz - b^3c - 2aacz - aabc \propto c^3z - bc^3 + bccz - bbcc - b^3c - aabc + b^3z + 2aayz + aabz$ . Denique deletis rursus utrobique æqualibus, & revocatis quantitatis in  $y$  ductis ad unam partem æquationis, reliquis verò ad alteram, instituaturs divisio per  $z+c$ , & orietur  $2aay \propto cz^2 - ccz + bzz - 2bcz + bcc - bbz + bbe$ .

Verum cum & supra inventum fuerit  $edd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbe + bcc \propto 2aay$ , & quæ eidem sunt æqualia, ea quoque inter se sint æqualia, erit  $cz^2 - ccz + bz^2 - 2bcz + bcc - bbz + bbe \propto edd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbe$ . Deleantur jam utrinque æqualia, & quantitates in  $z$  ductæ unam partem æquationis constituent, reliquæ verò alteram, fietque  $cz^2 \propto ccz + cdd$ . Deinde dividatur utrobique

$$\begin{array}{r} +b \\ +2bc + ccd \\ +bb + bdd \\ +2bcd \\ +bbd \end{array}$$

per  $c+b$ , ut oriatur  $z^2 \propto bz + dd$ , five translatis omnibus

$$\begin{array}{r} +c + bd \\ +cd \end{array}$$

ad unam partem:  $z^2 - bz - dd \propto 0$ .

$$\begin{array}{r} -c - bd \\ -cd \end{array}$$

Postquam igitur percurramus data propositionis, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis sit translata ad æquationem

$$\begin{array}{r} -dd \\ z^2 - bz - dd \propto 0, \end{array}$$

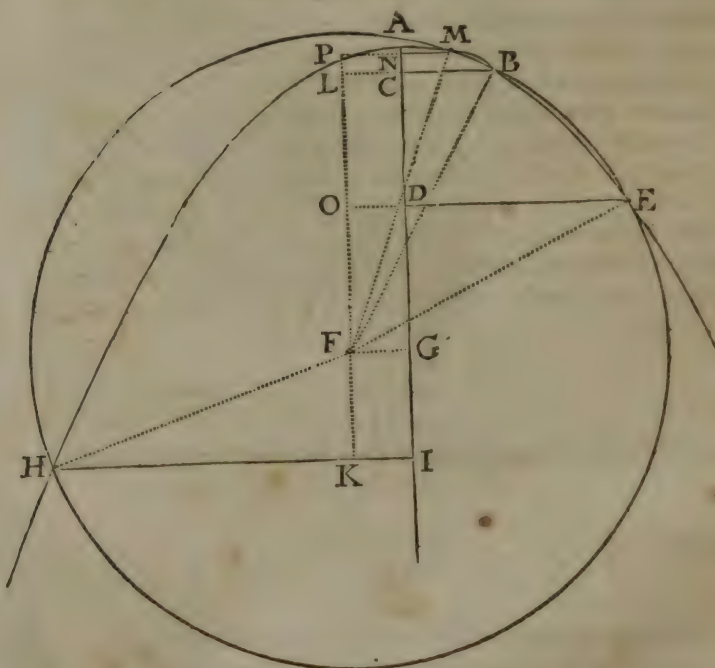
superest ut ostendamus eam quæsito propositionis satisfacere, quantum quidem ex suppositis datis deduci

V u



duci potest. Hunc in finem tentanda erit divisio æquationis per  $z - b - c - d \infty 0$ , ut constet num verum sit, quod intenditur. Quare cum tentatâ divisione reperiatur divisionem fieri posse, atque oriri  $z + d \infty 0$ , sequitur quoque quæsitum propositionis esse verum, hoc est,  $z$  æquari  $b + c + d$ , sive  $HI$  æqualem esse ipsis  $MN$ ,  $BC$ , &  $ED$  simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Unde liquet, si circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in  $M$  vel  $B$ , hoc est, rectas  $NM$ ,  $CB$  sibi invicem æquales faciat, tunc  $HI$  æqualem fore ipsi  $DE$ , unâ cum dupla ipsius  $NM$  vel  $CB$ . Si enim in hac ultima æquatione pro  $c$  scribatur  $b$ ,



fiet æquatio  $z^2 - 2bz - dd \infty 0$ , quæ dividi poterit per  $-2bd$   
 $z - d - 2b \infty 0$ , & orietur  $z + d \infty 0$ . Id quod arguit  $z$  valere  $d + 2b$ ,

$d + 2b$ , hoc est, HI æqualem esse compositæ ex DE & dupla NM seu CB.

Præterea hinc constat, (quod sanè animadversione dignum) si recta tangens Parabolam in aliquo puncto extra verticem ipsa ibidem quoque tangatur à Circulo non per verticem transeunte, quicquid Parabolam in eodem puncto secet, hoc est, ut rectæ NM, CB, & DE omnes tres sint inter se æquales: quòd tunc quidem HI ipsius NM, CB, vel DE tripla sit futura. Quippe considerando NM vel CB bis sumendam esse, propter hujus rectæ contactum in M vel B, ac deinde adhuc semel, propter Circuli & Parabolæ in eodem puncto intersectionem. Vel etiam in æquatione inventa  $zz - bz - dd \propto 0$  pro  $c$  &  $d$  scribendo  $b$ , ac deinde

$$\begin{array}{r} -c \\ -bd \\ -cd \end{array}$$

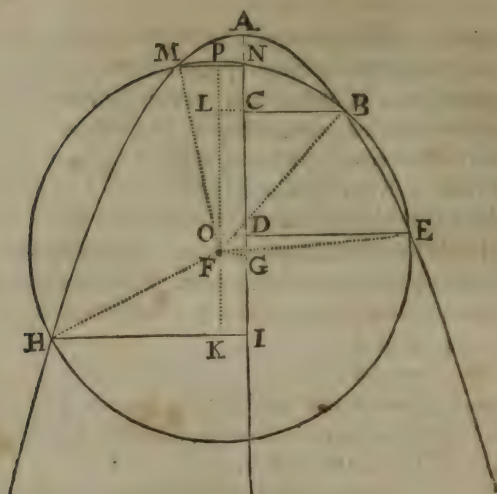
$zz - bz - bb \propto 0$  dividendo per  $z - b \propto 0$ . oritur namque  $z + b \propto 0$ . Id quod arguit  $z$  valere  $b$ , hoc est, HI triplæ ipsius NM, CB, vel DE esse æqualem.

Denique secet Circulus HBE Parabolam extra verticem A, ab utraque parte axis in duobus punctis; hinc quidem in H & M; istinc verò in B & E. Dico itidem HI, MN simul sumptas ipsas BC, ED simul sumptas esse æquales.

Positis enim iisdem quæ prius, inveniatur similiter, sicut ante ostendimus, quadratum ex FM esse  $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^2}{aa} + bb - 2by + yy$ . Et quoniam per definitionem Circuli rectæ lineæ FB & FM sunt æquales, erunt quoque earum quadrata æqualia:  $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^2}{aa} + yy + 2cy + cc$  &  $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^2}{aa} + bb - 2by + yy$ . Unde deletis utrinque æqualibus, & reliquis per  $aa$  multiplicatis, si transferantur porro quantitates in  $x$  ductæ, ut unam partem æquationis efficiant, reliquæ verò alteram, fiet  $c^2 - b^2 + 2aacx + 2aaby + aacc - aabb \propto 2accx - 2abbx$ . Divisâ autem utrâque parte per  $c + b$ , orietur  $c^2 - bcc + bbc - b^2 + 2aay + aac - aab \propto 2acx - 2abx$ . Ubi rursus si utrinque dividatur per  $2ac - 2ab$ , orietur  $x \propto \frac{c^2 - bcc + bbc - b^2 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$ .

Eodem modo, cum rectæ FE & FM sint æquales, erunt etiam earum quadrata  $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^2}{aa} + dd + 2dy + yy$  &  $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^2}{aa} + cc + 2cy + yy$ .





$xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$  æqualia. Quare si deman-  
tur utrobique æquales, & reliquæ ducantur in  $aa$ , nec non quan-  
titates in  $x$  ductæ disponantur ad unam, reliquæ verò ad alteram  
æquationis partem constituendam, fiet  $d^4 - b^4 + 2aady +$   
 $2aaby + aadd - aabb \propto 2addx - 2abbx$ . Dividatur jam  
utraq; pars per  $d+b$ , & proveniet  $d^3 - bdd + bbd - b^3 +$   
 $2aay + aad - aab \propto 2adx - 2abx$ , & rursus utrinque per  
 $2ad - 2ab$ , oriaturque  $x \propto \frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$ .

Quia verò quæ uni æquantur, illa quoque æqualia sunt inter  
se, erit  $\frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$

$\propto \frac{e^3 - bcc + bbe - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$ . Brevitatis autem

causâ pro  $-b^3 + 2aay - aab$  scribatur, propter earundem  
quantitatum amphiboliam,  $8e^3$ , & multiplicatâ utrâque æqua-  
litatis parte per  $2a$ , seu, quod idem est, diviso utriusque denomi-  
natore per  $2a$ , instituat porro multiplicatio per crucem, ut fra-  
ctiones evanescant, fietque  $cd^3 - bd^3 - bcd + bbd + bbcd$   
 $- b^3d + aacd - aabd \ 8ce^3 \ 8be^3 \propto c^3d - c^3b - bcc +$   
 $bbcc + bbcd - b^3c + aacd - aabc \ 8de^3 \ 8be^3$ . Et, dele-  
tis

tis utrinque æqualibus, restituitoque valore quantitatis assumptæ prioris signi,  $g e^2$ , fiet  $cd^2 - bd^2 - bcdd + bdd - b^2d - aabd - b^2c$  h. e., cum  $+^2 aacy - aabc \infty c^2d - c^2b - bcc d + bcc - b^2c - aabc$  per signum  $-b^2d + 2 aady - aabd$ . Ubi si demum demantur utrobique  $g$  intelligitur  $+$ , tum per signum  $g$  intelligitur  $-$ , aut cum per signum  $g$  intelligitur  $-$ , tum per signum  $g$  intelligitur  $+$ .

Similiter, cum rectæ HF & FM æquales sint, erunt quoque earum quadrata  $\frac{z^4}{aa} - \frac{2azx}{a} + xx + zz - 2zy + yy & xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$  æqualia. Unde ablatis utrinque æqualibus, reliquisque multiplicatis per  $aa$ , adhibeatur porro translatio, ut quantitates in  $x$  ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fietque  $z^4 - b^4 + 2 aaby - 2 aaz y + aaz z - aabb \infty 2 aazx - 2 abbx$ . Dividatur jam utraque pars per  $z - b$ , & orietur  $z^3 + bzz + bbz + b^2 - 2 aay + aaz + aab \infty 2 aazx + 2 abx$ . Rursus dividatur utrinque per  $2 az + 2 ab$ , & habebitur  $x \infty \frac{z^3 + bzz + bbz + b^2 - 2 aay + aaz + aab}{2 az + 2 ab}$ .

Quia verò & supra quantitas  $x$  inventa fuit  $\infty \frac{c^3 - bcc + b^2c - b^2 + 2 aay + aac - aab}{2 ac - 2 ab}$ , erunt  $z^3 + bzz + bbz + b^2 - 2 aay + aaz + aab$  &  $c^3 - bcc + b^2c - b^2 + 2 aay + aac - aab$  inter se æqualia. Brevitatis causa, scribatur rursus  $g e^2$  pro  $-b^2 + 2 aay - aab$ , &  $g e^2$  pro  $b^2 - 2 aay + aab$ , & multiplicatâ utraque æqualitatis parte per  $2 a$ , seu, quod idem est, diviso utriusque denominatore per  $2 a$ , instituaturs multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque  $cz^3 - bz^3 + b^2zz - bbzz + b^2cz - b^2z + aacz - aabz \infty g e^2 g b e^2 \infty c^2z + bc^2 - bccz - bbcc + aacz + b^2c + bbz + aabc g e^2 g b e^2$ . Ablatis porro utrinque æqualibus, restitutisque valoribus quantitatum assumptarum  $g e^2$  &  $g e^2$ , fiet  $cz^3 - bz^3 + b^2zz - bbzz - b^2z - aabz + b^2c - 2 aacy + aabc \infty c^2z + bc^2 - bccz - bbcc + b^2c + aabc - b^2z + 2 aazy - aabz$ . Ubi si rursus utrobique demantur æquales, & quantitates in  $y$  ductæ ad unam partem



partem revocentur, reliquæ verò ad alteram, ac demum utraque pars æqualitatis dividatur per  $z+c$ , orietur  $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto 2aay$ .

Cum verò & supra inventum fuerit  $edd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \propto 2aay$ , & quæ eidem æquantur, inter se quoque sint æqualia, erit  $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto edd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc$ . Deleantur utrinque æqualia, & quantitates in  $zz$  ductæ unam partem æquationis constituent, reliquæ verò alteram, habebiturque

$$\begin{array}{r} -b \quad -^2bc \quad +ccd \\ +bb \quad -bdd \\ -^2bcd \\ +bbd \end{array}$$

tur per  $c-b$ , orietur  $zz \propto cz + dd$ . Hoc est, si collocentur

$$\begin{array}{r} -b \quad +cd \\ -bd \end{array}$$

quantitates omnes ad unam partem, erit

$$\begin{array}{r} zz - cz - dd \propto 0 \\ +b \quad -cd \\ +bd \end{array}$$

Quare postquam percurrimus omnia propositionis data, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis reducta sit ad æquationem  $zz - cz - dd \propto 0$ : superest ut ipsa contineat quæsitum

$$\begin{array}{r} +b \quad -cd \\ +bd \end{array}$$

propositionis, modò sit verum atque ex datis deduci possit. Ad quod explorandum, videri debet, num æquatio inventa dividi possit per  $z - c - d + b \propto 0$ . Quare cum reperiatur divisionem fieri posse, atque oriri  $z + d \propto 0$ , sequitur quæsitum propositionis esse verum, hoc est,  $z + b$  æquari  $c + d$ , sive HI & MN simul sumptas æquales esse ipsis BC & ED simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Unde liquet, si Circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in B vel E, hoc est, rectas CB, DE sibi invicem æquales faciat, tunc HI, MN simul sumptas ipsius CB vel DE duplas fore.

Si enim in hac ultima æquatione pro  $d$  scribatur  $c$ , erit æquatio

tio talis:  $zz - cz - 2cc \propto 0$ , quæ dividi potest per  $z - 2c +$   
 $+b + bc$

$b \propto 0$ , & oritur  $z + c \propto 0$ . Id quod arguit,  $z$  valere  $2c - b$ , sive  
 $z + b$  esse  $\propto 2c$ , hoc est, HI & MN simul sumptas æquales esse  
 ipsi CB seu DE bis sumptæ.

Quare constat Theorematis veritas.

Si autem habeatur  $z^3 \propto -pz + q$ , regula, cujus inven-  
 tionem Cardanus &c.] Quod ea, quæ de exprimendis radicibus  
 Equationum Cubicarum Autor hic breviter perstrinxit, cuius  
 manifestiora fiant: visum fuit post sequentis loci illustrationem  
 asserere huc Appendicem, quam de Cubicarum Equationum reso-  
 lutione anno 1646 simul cum Organica Conicarum Sectionum  
 descriptione in lucem emisimus, & nunc emendato hic illic sensu  
 cum additione quorundam subjungimus.

Hanc autem curvam in 6 diversis punctis secare potest, ita ut  
 hic sex diverse radices in Equatione haberi queant. Atque cum  
 illam in paucioribus secat, hoc indicio est, quasdam ex hisce  
 radicibus inter se æquales esse, aut ipsarum aliquas esse tantum  
 imaginarias.] Quoniam hic nonnulli scrupulum sibi ipsis inji-  
 ciunt, concipiendi, quæ fieri possit, ut circulus aliquis hanc curvam  
 in 6 diversis punctis secet: haud abs re fore credidi, si hoc loco  
 exemplam, quod sibi jam pridem ingeniosissimus Huddenius, ad  
 difficultatem hujus rei è medio tollendam, subjecit, adducerem.

Quocirca sumendo ad hoc æquationem  $y^6 - 21y^4 + 169y^2 -$   
 $675y + 1414y - 1464y + 576 \propto 0$ , cujus radices, ut, 1, 2, 3,  
 3, 4, & 8, sunt omnes veræ ac rationales, & ex his duæ, ut 3 & 3,  
 ad calculi prolixitatem evitandam, inter se æquales: oportet, ad  
 curvæ hujus descriptionem, assumere AB  $\propto \frac{1}{2}p \propto 10\frac{1}{2}$ ,

$p \propto 21$  BK  $\propto \sqrt{\frac{r}{v}} + q - \frac{1}{2}p$  seu  $n \propto \sqrt{\frac{479}{4}}$ , & ED vel  
 $q \propto 169$  TV  $\propto \sqrt{\frac{2v}{p}} \propto \sqrt{\frac{9216}{211239}}$ . Deinde, ut inveniatur cir-  
 $r \propto 675$  culus PCN, oportet, acceptâ BL æquali ED  $\propto$   
 $f \propto 1414$   $\frac{1}{2} \propto 1464$   $\sqrt{\frac{9216}{211239}}$ , assumere LH  $\propto \frac{r}{2n\sqrt{v}} \propto \sqrt{\frac{3721}{479}}$ ; & ex pun-  
 $t \propto 1464$   
 $v \propto 576$

Vide figuras  
 pag. 98 C<sup>o</sup>  
 100.

cto Herectâ perpendiculari HI  $\propto \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pe}{4nn\sqrt{v}}$   
 (id quod brevitatis causâ vocetur  $\frac{m}{nn}$ )  $\propto \frac{2727}{479}$ , in circulo cujus  
 diame-



diameter IL inscribere  $LP \propto \sqrt{\frac{f+pv}{nn}} \propto \sqrt{\frac{7672}{479}}$ : eritque IP

radius quæsitæ circuli  $\propto \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{pp}{4nnv} - \frac{f}{nn} - \frac{pv}{nn}} \propto \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$ .

Jam ut constet, circulum hunc ex I intervallo invento IP descriptum secare vel tangere curvam ACN in tot diversis punctis, quot æquatio inæquales habet radices, hoc est, hic in 5 diversis punctis, cum propter duas æquales 3 & 3 circulus hanc curvam ibidem non secet sed tangat: considerandum est, lineam IM esse  $\propto \frac{m}{nn} - y$  vel  $y - \frac{m}{nn}$ , adeoque quadratum ex IM semper esse  $\frac{mm}{nn} - \frac{2my}{nn} + yy$ , & lineam GH vel CM semper

$\propto -y^3 + \frac{1}{2}pvy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}$ . Ac proinde, si, tribuendo radici  $y$

unumquemque ex supra dictis valoribus, ex lineis hisce, per 47 primi Elem. Eucl., quæramus lineam IC, eamque singulis vicibus æqualem reperiamus radio ante invento IP  $\propto \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$ : certum est, quod circulus PCN eandem curvam ACN, quemadmodum indicatum fuit, sit secturus vel tacturus.

Hinc,

si ponatur  $y \propto 1$ , erit  $\begin{cases} \square IM. \frac{5053504}{229441} \\ \square CM. \frac{490496}{229441} \end{cases} y \propto 2$ , erit  $\begin{cases} \square IM. \frac{3129361}{229441} \\ \square CM. \frac{2414639}{229441} \end{cases}$

adeoque  $\square IC. \frac{5544000}{229441}$  adeoque  $\square IC. \frac{5544000}{229441}$

$y \propto 3$ , erit  $\begin{cases} \square IM. \frac{1664100}{229441} \\ \square CM. \frac{3879900}{229441} \end{cases} y \propto 4$ , erit  $\begin{cases} \square IM. \frac{657721}{229441} \\ \square CM. \frac{4886279}{229441} \end{cases} y \propto 8$ , erit  $\begin{cases} \square IM. \frac{1221025}{229441} \\ \square CM. \frac{4522975}{229441} \end{cases}$

adeoque  $\square IC. \frac{5544000}{229441}$  adeoque  $\square IC. \frac{5544000}{229441}$  adeoque  $\square IC. \frac{5544000}{229441}$ .

Ex quibus igitur apparet, quod, assumptâ qualibet ex radicibus, linea IC semper ipsi IP inveniatur æqualis, hoc est, quod circulus, qui ex I intervallo IP describitur, curvam ACN in 5 diversis punctis secet vel tangat, in tot videlicet, quot æquatio proposita diversos admittit radices valores. Quod erat ostendendum.

Eodem modo liquet, si æquatio proposita 6 radices inæquales habuerit, quod tunc quoque circulus PCN curvam ACN in 6 diversis punctis secet.

A P.

A P P E N D I X,  
D E  
C V B I C A R V M  
ÆQVATIONVM RESOLVTIONE.



EQUATIONES Cubicæ omnes, & Quadrato-  
quadrata, \* quæ quidem & ad Cubicas reducun-  
tur, quarum radix duarum est dimensionum, sem-  
per ad aliquam trium sequentium formularum redu-  
ci possunt.

\* Vide qua  
habentur  
pag. 92. à  
lin. 11. us-  
que ad fi-  
nem eius-  
dem pagina.

$$z^3 \infty^* - pz + q.$$

$$z^3 \infty^* + pz + q.$$

$$z^3 \infty^* + pz - q.$$

In priori autem formulâ, ubi  $z^3$  æquatur  $-pz + q$ , regula Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferro tribuit, nos docet radicem esse  $\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ .

Quemadmodum etiam si habeatur  $z^3 \infty + pz + q$ , in qua quadratum semissis ultimi termini sit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi termini, similis regula ostendit radicem fore  $\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ .

Unde liquet in omnibus Problematibus, quorum difficultates ad æquationem hujus vel illius formulæ reducuntur, ejus æquationis radices, aliâs numero non explicabiles, semper hoc modo juxta Cardani regulas per latera cuborum quorundam, quorum contentum cognoscitur, exprimi posse.

Deinde verò si habeatur  $z^3 \infty + pz + q$ , ubi  $\frac{1}{27}qq$  sit minus quàm  $\frac{1}{27}p^3$ , ibi prædicta regula non habet locum, nec ejusdem beneficio radix ullo modo intelligibili explicari potest, sicut inferius ostendemus. Quæ quidem res olim multa fuit caliginis, & ut scribit Albertus Girardus in libello cui titulus: *Invention nouvelle en l'Algebre*, qui anno 1629 prodit: hoc est, in quo Autores hactenus fuerunt valde intricati, & ut verum fatear in re quàm maximè difficili.

Hinc, quæ huc spectant subobscura, aut neglecta demonstra-

X x

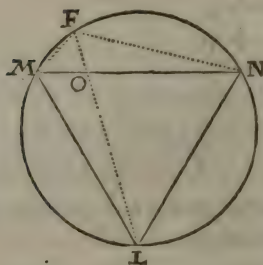
tione



tione apud prædictos Autores invenimus, ea illustrare nobis visum fuit: præmittentes ad hoc sequentia Theoremata demonstrata.

## THEOREMA I.

Si fuerit triangulum æquilaterum  $MNL$  circulo inscriptum, atque ex  $L$ educta utcumque recta  $LF$  usque ad circumferentiam in  $F$ , quæ secet  $MN$  in  $O$ , junctæque rectæ  $MF$ ,  $FN$ : Dico  $FL$  æqualem esse ipsis  $MF$ ,  $FN$  simul sumptis.



<sup>1</sup> per 21  
prop. tertii  
Elem.

<sup>2</sup> per 32 primi  
Elem.

<sup>3</sup> per 4<sup>am</sup>  
sexti Elem.

<sup>4</sup> per 24  
quinti  
Elem.

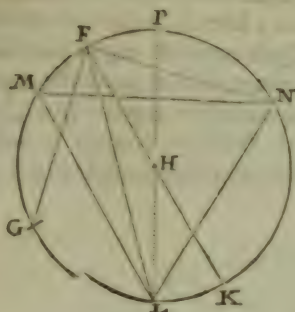
Triangula enim  $LNO$  &  $LNf$  similia sunt, cum habeant angulum ad  $L$  communem, & angulum  $LNO$ , hoc est,  $LMN$  ipsi  $LFN$  æqualem, unde & tertius  $LON$  tertio  $LNf$  æqualis est. Quocirca <sup>3</sup> erit ut  $NO$  ad  $LN$ , ita  $FN$  ad  $LF$ . Eodem modo cum similia sint triangula  $LMO$  &  $LFM$ , erit ut

$MO$  ad  $LM$  seu  $LN$ , ita  $FM$  ad  $LF$ . Igitur <sup>4</sup> erit, ut  $NO$ ,  $MO$  simul ad  $LN$ , ita  $FN$ ,  $FM$  simul ad  $LF$ . Æquales autem sunt  $NO$ ,  $MO$  simul sumptæ ipsi  $LN$ , æquales ergo quoque erunt  $FN$ ,  $FM$  simul sumptæ ipsi  $LF$ . Quod erat ostendendum.

## THEOREMA II.

Iisdem positis, ductâ diametro  $FHK$ , sumatur arcus  $GLK$  triplus arcus  $LK$ , jungaturque  $GF$ : Dico similiter arcum  $GMF$  arcus  $MF$ , nec non arcum  $GNF$  arcus  $NF$  triplum esse.

Ducatur enim diameter  $LHP$ . Hæc namque secabit arcum  $MFN$  bifariam in  $P$ . Quoniam autem propter triangulum æquilaterum  $MNL$  circumferentia circuli dividitur in tres partes æqua-



æquales, ac ipsa tripla est  
arcus MPN, erit & se-  
micircumferentia FMK  
tripla arcus MP. Quo-  
circa cum eadem ratio sit  
arcus FMK ad arcum  
MP, totius ad totum,  
quæ arcus GLK ad ar-  
cum LK seu FP, ablati  
ad ablatum, erit quoque  
reliqui arcus GMF ad  
reliquum arcum MF ea-  
dem ratio, quæ totius ad totum \*. Triplus autem est arcus FMK \* *per 19*  
arcus MP. Triplus ergo etiam est arcus GMF arcus MF. Quod *quinti*  
erat demonstrandum. *Elem.*

Eodem modo ostenditur arcum GNF arcus NF triplum esse.

### THEOREMA III.

Iisdem positis, ducatur recta  $nN$  parallela  $Fm$ , oc-  
currens rectæ  $FL$  in  $N$ ; itemque  $mMl$  parallela  $Fn$ ,  
secans quidem rectam  $FL$  in  $M$ , occurrens autem du-  
ctæ  $nN$  in  $l$ : Dico si ducantur  $Hl$ ,  $HN$ , &  $HM$  ipsas  
inter se æquales esse, unamquamque verò æqualem re-  
ctæ  $LK$ .

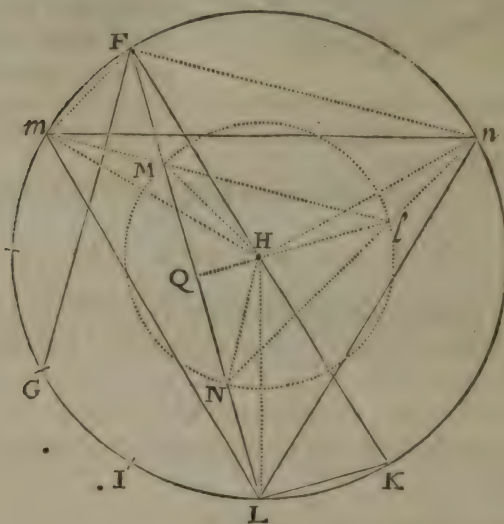
Quoniam enim anguli  $mFM$  &  $NFn$  singuli circumferentiæ  
tertiæ parti insistant, & ob parallelas ductas angulus  $Fm$  an-  
gulo  $NFn$  æquatur, at angulus  $FNn$  angulo  $mFM$ : erunt trian-  
gula  $mFM$  &  $NFn$ , quemadmodum etiam triangulum  $NMl$   
æquiangula, ac proinde æquilatera. Porro cum  $FL$  æquetur ipsis  
 $mF$ ,  $Fn$  simul sumptis (ut supra ostensum fuit); atque ablata  $Fm$   
ipsi  $mF$ , erit reliqua  $ML$  ipsi  $Fn$  æqualis: cumque  $FN$  æquetur  
ipsi  $ml$ , erunt quoque  $ML$  &  $ml$ , atque adeò omnes tres  $ml$ ,  
 $nN$ , &  $ML$  inter se æquales. Unde si ab his æqualibus rectis aufe-  
rantur rectæ inter se æquales  $Ml$ ,  $Nl$ , &  $MN$ , remanebunt simili-  
ter  $mM$ ,  $nl$ , &  $NL$  inter se æquales. Præterea cum  $mn$ ,  $nL$ , &  $Lm$   
tres rectæ sint inter se æquales, liquet triangula  $mmL$ ,  $nLN$ , &  $LmM$

X x 2

inter



inter se constare ex æqualibus lateribus, ipsaque ob hoc & angulos singulos singulis æquales habere, hoc est, æquales inter se erunt anguli  $mnl$ ,  $nLn$ , &  $LmM$ . Quia autem & anguli  $mnh$ ,  $nLH$ , &  $LmH$  inter se æquales sunt, patet, si hi ex prædictis æqualibus inter se angulis deimantur, reliquos itidem angulos  $Hnl$ ,  $HLN$ , &  $HmM$  inter se æquales fore. Denique, propter æqualitatem radiorum  $Hn$ ,  $HL$ , &  $Hm$ , perspicuum est, triangu-  
la  $Hnl$ ,  $HLN$ ,



&  $HmM$  habere inter se duo latera duobus lateribus, utrumque utrique æqualia; ac insuper angulum angulo, inter æqualia latera contentum: unde & basin basi æqualem habebunt, atque adeo æquales inter se erunt rectæ  $HL$ ,  $HN$ , &  $HM$ . Quod autem præterea unaquæque ex ipsis æquetur rectæ  $LK$ , consequenter sic ostenditur. Producat  $IH$  ut secet  $FL$  in  $Q$ . Hæc igitur ad rectos angulos cadet in  $FL$ , atque eam bifariam secabit in  $Q$ . Quia porro, propter similitudinem triangulorum  $FLK$  &  $FQH$ ,  $FL$  est ad  $LK$ , ut  $FQ$  ad  $QH$ ; & permutando  $FL$  ad  $FQ$ , ut  $LK$  ad  $QH$ , atque  $FL$  ipsius  $FQ$  est dupla: erit quoque  $LK$  ipsius  $QH$

ÆQUATIONUM RESOLUTIONE. 349

QH dupla. Dupla autem etiam est H / ipsius QH, siquidem æquilaterum est triangulum M / N: quare & H / nec non H M, H N ipsi L K æquales erunt. Quod erat ostendendum.

Ex his perspicua sunt ea, quæ ab Alberto Girardo afferuntur in libello supra citato, ubi docet quo pacto radix æquationis  $13 \text{ } \textcircled{3} \text{ } \textcircled{1} + 12$ , in qua cubus trientis numeri radicem major est quadrato semissis numeri absoluti, sit exprimenda.



Ut autem pateat MN esse  $\sqrt{13}$ , ob  $13 \text{ } \textcircled{3} \text{ } \textcircled{1}$  in æquatione, sciendum est ductis rectis HM, MP triangulum HMP esse æquilaterum, ac proinde quadratum MR triplum esse quadrati HR. Quocirca cum eadem sit ratio duplæ MR, hoc est, ipsius MN ad duplam HR, hoc est, HP, quàm simplæ MR ad simplam HR: erit quoque quadratum MN quadrati HP triplum. Unde si statuamus radium circuli æqualem radici quadratæ ex triente numeri radicem 13, hoc est,  $\sqrt{41}$ , liquet MN tunc fore  $\sqrt{13}$ . Sicut proponebatur.

Lubet autem propositum ipsius ulterius inquirere, atque rem omnem paucis patefacere.

In quem finem ejusmodi quæstionem proponimus.

*Circulo existente FGK, cujus diameter FK, in eog, inscripta FG, trifariam secetur arcus GK, à diametro & inscripta interceptus, in punctis I & L, & recta connectatur FL; data*

Xx 3

autem



autem  $FH$  seu  $HK \propto a$ , &  $FG \propto b$ , oporteat invenire  $FL \propto x$ .

<sup>1</sup> per 6 primi Elem.

<sup>2</sup> per 21 & 22 tertii Elem. nec

non 13 primi Elem.

<sup>3</sup> per 29 tertii Elem.

Jungantur  $KL$ ,  $LI$ , &  $IG$ , ductâque  $FI$  producat ad  $S$ , donec angulus  $FSL$  æquetur angulo  $IFL$ : eritque  $SL$  æqualis  $LF$ , &  $SI$  æqualis  $FL$ . Æqualis enim est  $SL$  ipsi  $LF$  <sup>1</sup>, &  $SI$  ipsi  $FK$ , propter triangula  $ILS$  &  $KLF$ , quorum duo anguli  $LIS$  &  $S$  unius singuli sunt æquales duobus  $LKF$  &  $LFK$  alterius <sup>2</sup>, ac præterea latus  $IL$  lateri  $LK$  <sup>3</sup>. Eodem modo, productâ  $FG$  donec angulus  $FTI$  æquetur angulo  $GFI$ ; erit similiter  $TI$  æqualis  $IF$ , atque  $TG$  ipsi  $LF$ . Porro cum similia sint triangula  $FHL$ ,  $FLS$ , &  $FIT$ : erit ut  $HF$  ad  $FL$ , ita  $LF$  ad  $FS$ . Unde cum

$HF$  sit  $\propto a$ , &  $FL \propto x$ , erit  $FS \propto \frac{x^2}{a}$ , è quâ si auferatur  $SI$  seu

$KF \propto a$ , relinquetur  $IF \propto \frac{x^2}{a} - a$ . Eâdem ratione, cum sit ut

$HF$  ad  $FL$ , ita  $IF$  ad  $FT$ , erit  $FT \propto \frac{x^3}{a^2} - x$ , è quâ si tollatur  $TG$  seu  $FL \propto x$ , remanebit

$GF \propto \frac{x^3}{a^2} - x$ . Restat

igitur, ut  $\frac{x^3}{a^2} - x$  ad-

æquetur ipsi  $GF$  data

$\propto b$ . Quare æqualitate ordinatâ,  $x^3$  æqua-

bitur  $ax + ab$ . Quæ æquatio secundæ formulæ est, in quâ qua-

dratum semissis ultimi

termini est minus cubo

trientis quantitatis cog-

nitiæ penultimi: majus

enim est  $a^6$  quàm  $\frac{1}{4}a^4bb$ .

Nam si utrobique divi-

damus per  $a^4$ , fit  $aa$  ma-

jus quàm  $\frac{1}{4}bb$ , cum, u-

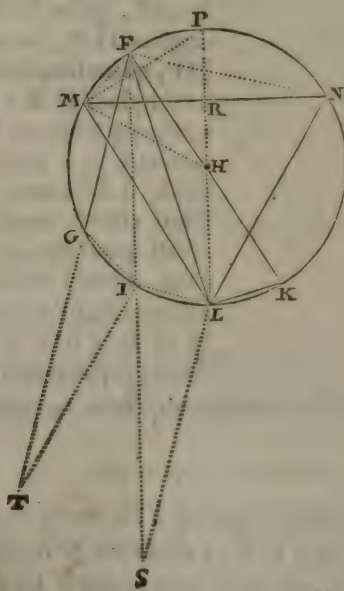
trinque extrahendo ra-

dicem,  $a$  fiat majus quàm

$\frac{1}{4}b$ , seu  $a$  majus quàm  $b$ .

Ut est manifestum, cum

$a$  dia-



ÆQUATIONUM RESOLUTIONE. 351

<sup>2</sup> a diametrum circuli referat, b autem in eodem inscriptam GF, atque diameter omnium rectorum circulo inscriptarum <sup>1</sup> sit maxima. Unde si a<sup>2</sup> æquetur  $\frac{1}{2} a^2 + b^2$ , tunc quoque inscripta GF æ-<sup>1</sup> per 15  
qualis erit diametro FK: ita ut eo casu duæ hæ lineæ coincident, tertii Elem.  
ac eadem fiat quaestio ac si semicircumferentia FGK in tres æ-  
quales partes secanda foret. Quo quidem casu radix quaesita FL  
fit latus trianguli æquilateri, eodem circulo inscripti.

E quibus plana sunt illa, quæ ad explicationem radices supra-  
dictæ æquationis  $1 \textcircled{3} \propto 1 \textcircled{3} (1 + 12)$  Albertus Girardus in me-  
dium affert. Ubi inter  $4\frac{1}{3}$  (tertiam partem ipsius  $1 \textcircled{3}$ ) & unitatem,  
mediam proportionalem invenit  $\sqrt{4\frac{1}{3}}$ , eamque semidiametrum  
circuli statuit FH, quâ ut radio ipsum describit, ac in eo deinde  
lineam FG adaptat æqualem  $2\frac{10}{11}$ , (quotienti videlicet divisionis  
 $12$  per  $4\frac{1}{3}$ ). In quo porro trifariam secando arcum GK in punctis  
I & L, jungendoque FL, ait FL esse valorem radices quaesitæ  $1 \textcircled{1}$   
æquationis propositæ. Dicens præterea alios duos valores ipsius  
 $\textcircled{1}$ , per — expressos, designari per rectas FM, FN, eosque duo-  
bus modis inveniri. Juxta priorem quidem, si <sup>2</sup> centro H & in-  
tervallo LK arcus describatur MN, secans FL in M & N; Juxta <sup>2</sup> ut in fig.  
posteriorem verò, <sup>3</sup> describendo in circulo à puncto L triangu-  
lum æquilaterum LMN, jungendoque FM & FN. Illas enim <sup>3</sup> ut in fig.  
utroque modo easdem inveniri, ex supra demonstratis manife-  
stum est. <sup>pag. 348.</sup>  
<sup>pag. 347.</sup>

Ubi præterea notat in æquatione  $1 \textcircled{3} \propto 1 \textcircled{3} (1 - 12)$  ostensos  
valores prioris æquationis radici quaesitæ propositæ æquationis  
satisfacere, si tantum eorum signa + & — immutaverimus, ea-  
que denotaverimus per — FL, + FM, & + FN. Sed hoc ex se-  
quentibus perspicuum fiet. Quemadmodum etiam illud, quod  
spectat ad æquationes secundæ formulæ, quas inquit neminem ad  
suum usque tempus resolvere scivisse, quæ secundum Analysin  
speciosam Vietæ ita denotantur:

$$\begin{array}{l} A \text{ cubus æqualis } + BB \\ + BC \\ + CC \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} + BB \\ + BC \\ + CC \end{array}} \right\} \text{ in } A \quad \begin{array}{l} + B \\ + C \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} + B \\ + C \end{array}} \right\} \text{ in } BC.$$

Quòd eodem recidit ac si earundem constitutionem sic agno-  
sceres, conciperesque è duobus lateribus, puta B & C, facta esse  
tria proportionalia plana BB, BC & CC, quorum aggregatum  
sit BB + BC + CC, seu quantitas p; & quod sit ex medio  
plano



plano in aggregatum eorundem laterum fit  $B+C$  in  $BC$ , seu quantitas  $q$ . Quod quidem ultimum factum sic quoque interpretari poteris, dicendo illud produci ex multiplicatione duorum priorum planorum in latus secundum; vel etiam ex summa duorum posteriorum planorum in latus primum: cum tria illa solida inter se æqualia sint, ut experienti constabit.

Ut autem penitiùs hæc introspeciamus, atque æquationum harum constitutionem agnoscamus, ponamus  $x \propto d$  seu  $x - d \propto 0$ , & rursus  $x \propto -b$  seu  $x + b \propto 0$ , ac denuo  $x \propto -c$  seu  $x + c \propto 0$ , ducamusque  $x - d \propto 0$  in  $x + b \propto 0$ , tum verò quod inde fit in  $x + c \propto 0$ , & prodibit æquatio:

$$x^3 - dxx - bdx - bcd \propto 0, \text{ vel } x^3 \propto dxx + bdx + bcd.$$

$+b$	$-cd$	$-b$	$+cd$
$+c$	$+bc$	$-c$	$-bc$

In qua si ponatur  $d$ , verus valor radices  $x$ , æqualis  $b+c$ , duobus falsis valoribus ipsius  $x$  simul sumptis, tunc quidem  $+d$  destruet  $-b-c$ , fietque  $0xx$ , hoc est, evanescet adfectio sub quadrato, nec amplius sese destruent. Nam cum ex hypothesi  $d$  æquatur  $b+c$ , communi multiplicatore  $d$ , fiet quoque  $dd$  æquale  $bd+cd$ . At verò  $dd$  majus est quàm  $bc$ , quandoquidem idem valet quod  $bb+bc+cc$ , quadratum videlicet à  $b+c$ . Quare &  $bd+cd$  majus erit quàm  $bc$ , manebitque adfectio sub latere cum signo  $+$ . Ita ut, si  $+bd+cd-bc$  interpreteris per  $+p$ , &  $+bcd$  per  $+q$ , æquatio hanc recipiat formam:  $x^3 \propto * +px +q$ . Quam itaque constat tres admittere diversos radices valores, unum quidem verum seu  $+$  quàm  $0$ , & alios duos falsos seu  $-$  quàm  $0$ , qui simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Porro, ut hæc æquatio tres semper ejusmodi radices valores recipiat, requiritur, ut in illà  $\frac{2}{3}p \sqrt{\frac{1}{3}p}$  non sit minus quàm  $q$ , seu quod idem est, ut  $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$  non sit minus quàm  $\frac{3q}{p}$ , sive etiam  $\frac{1}{27}p^3$  non minus quàm  $\frac{1}{4}qq$ . Quandoquidem, si  $p$  planum in tria plana dividitur proportionalia, maximum solidum, quod fit ex ductu summæ duorum priorum vel duorum posteriorum in latus secundum vel primum, est illud, quod fit, cum  $p$  planum in tria plana æqualia dividitur.

Aliàs enim radix ejusdem æquationis de unico tantum valore explicabilis est, utpote verò, cum æquatio tunc non producat ex du-

# ÆQUATIONUM RESOLUTIONE. 353

ex ductu trium ejusmodi laterum in se invicem, nisi duo sumantur fictitia seu non existentia, quæ & impossibilia appellantur. Quemadmodum in exemplum afferre licet æquationem  $1C \infty 6N + 40$ , ubi  $1N$  valet  $+4$ , cum  $1C 80Q - 6N - 40 \infty 0$  *signum 8* dividatur per  $1N - 4 \infty 0$ , oriaturque æquatio impossibilis *significat +*  $1Q + 4N + 10 \infty 0$ , quæ nullas omnino admittit radices. Ni- *vel -* si velis illas, quarum sanè valor nullo modo comprehendi potest, utcunque tamen exprimere, ut scribendo  $1N \infty -2 + \sqrt{-6}$ , nec non  $1N \infty -2 - \sqrt{-6}$ . Ita ut verus valor ipsius  $1N$  realis existat & sit  $4$ , & duo falsi fictitii sint  $-2 + \sqrt{-6}$ , &  $-2 - \sqrt{-6}$ .

Quòd si verò proponatur æquatio  $1C \infty 6\mathfrak{P} + 6$ , seu  $1C 80\mathfrak{P} - 6\mathfrak{P} - 6 \infty 0$ , quæ per  $1\mathfrak{P} +$  vel  $-$  aliquo numero, ultimum terminum  $6$  dividente, dividi nequit, poterit neque radix ejus  $1\mathfrak{P}$  per ullum numerum absolutum vel fractum designari; sed verum valorem admittet, qui est irrationalis, quique juxta secundam Cardani regulam (hic ante expositam) sic exprimitur:  $1\mathfrak{P} \infty \sqrt{C} 4 + \sqrt{C} 2$ .

In quo porrò sensu æquatio prioris formulæ accipi debet, quæ nullæ determinationi est obnoxia. Nam si, verbi gratiâ, proponatur  $1C \infty -3N + 14$ , poterit  $1C 80Q + 3N - 14 \infty 0$  dividi per  $1N - 2$ , & oriatur æquatio impossibilis  $1Q + 2N + 7 \infty 0$ . Unde liquet  $1N$  valere tantum  $2$ , nec ullos alios valores admittere; nisi eos sic velis exprimere  $-1 + \sqrt{-6}$ , &  $-1 - \sqrt{-6}$ .

Sin autem æquatio ejusdem formulæ sit  $1C \infty -3\mathfrak{P} + 10$  seu  $1C 80\mathfrak{P} + 3\mathfrak{P} - 10 \infty 0$ , quæ per  $1N -$  aliquo numero, ultimum terminum  $10$  dividente, dividi nequit, valor quoque verus radices nullo numero absoluto vel fracto designari poterit. Quo igitur casu explicabitur secundum priorem Cardani regulam, hoc modo:  $1\mathfrak{P} \infty \sqrt{C} \sqrt{26 + 5} - \sqrt{C} \sqrt{26 - 5}$ .

Sed hæc mittentes veniamus ad ea, quibus secundæ formulæ æquationis usum detegamus. Proponentes in eum finem hoc quod sequitur

Yy

PRO-



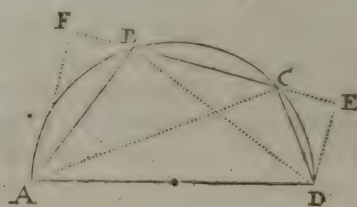
## P R O B L E M A.

In semicirculo supra diametrum  $AD$  descripto quadrilatero  $ABCD$ , cognita sint tria ejus latera  $AB$ ,  $BC$ , &  $CD$ : Oporteatq; invenire diametrum seu quartum latus  $AD$ .

Esto  $AB \propto a$ ,  $BC \propto b$ ,  $CD \propto c$ , diameter verò  $AD \propto x$ ; ducaturque recta  $BD$ , atque in  $BC$  productam perpendicularis demittatur  $DE$

<sup>1</sup> per 31. Quia itaque <sup>1</sup> triangulum  $ABD$  est rectangulum, ideoque  
<sup>2</sup> per 47. <sup>2</sup> quadratum  $AD$  æquale duobus quadratis  $AB$ ,  $BD$ : si à qua-  
<sup>3</sup> per 12 se- <sup>3</sup> quadrato  $AD \propto xx$  subducatur quadratum  $AB \propto aa$ , relinquetur  
<sup>4</sup> eundi Elem. <sup>4</sup> quadratum  $BD \propto xx - aa$ . Porro quoniam obtusangulum est  
<sup>5</sup> per 12 se- <sup>5</sup> triangulum  $BCD$ , atque <sup>5</sup> quadratum  $BD$  majus quadratis  $BC$ ,  
<sup>6</sup> eundi Elem.  $CD$  simul sumptis, duplo rectangulo  $BCE$ ; si à quadrato  $BD \propto$   
 $xx - aa$  subducamus aggregatum quadratorum  $BC$ ,  $CD \propto bb$

+  $cc$ , restabit duplum re-  
 ctangulum  $BCE \propto xx -$   
 $aa - bb - cc$ . Denique  
 cum similia sint triangu-  
 la  $ABD$  &  $CED$ , siquidem  
 ipsa rectangula sunt, ac an-  
 gulos præterea  $A$  &  $DCE$   
<sup>4</sup> æquales habent: erit ut  
 $DA$  ad  $AB$ , ita  $DC$  ad



<sup>4</sup> per 22  
<sup>5</sup> per 13  
<sup>6</sup> per 13  
<sup>7</sup> per 13  
<sup>8</sup> per 13  
<sup>9</sup> per 13  
<sup>10</sup> per 13  
<sup>11</sup> per 13  
<sup>12</sup> per 13  
<sup>13</sup> per 13  
<sup>14</sup> per 13  
<sup>15</sup> per 13  
<sup>16</sup> per 13  
<sup>17</sup> per 13  
<sup>18</sup> per 13  
<sup>19</sup> per 13  
<sup>20</sup> per 13  
<sup>21</sup> per 13  
<sup>22</sup> per 13  
<sup>23</sup> per 13  
<sup>24</sup> per 13  
<sup>25</sup> per 13  
<sup>26</sup> per 13  
<sup>27</sup> per 13  
<sup>28</sup> per 13  
<sup>29</sup> per 13  
<sup>30</sup> per 13  
<sup>31</sup> per 13  
<sup>32</sup> per 13  
<sup>33</sup> per 13  
<sup>34</sup> per 13  
<sup>35</sup> per 13  
<sup>36</sup> per 13  
<sup>37</sup> per 13  
<sup>38</sup> per 13  
<sup>39</sup> per 13  
<sup>40</sup> per 13  
<sup>41</sup> per 13  
<sup>42</sup> per 13  
<sup>43</sup> per 13  
<sup>44</sup> per 13  
<sup>45</sup> per 13  
<sup>46</sup> per 13  
<sup>47</sup> per 13  
<sup>48</sup> per 13  
<sup>49</sup> per 13  
<sup>50</sup> per 13  
<sup>51</sup> per 13  
<sup>52</sup> per 13  
<sup>53</sup> per 13  
<sup>54</sup> per 13  
<sup>55</sup> per 13  
<sup>56</sup> per 13  
<sup>57</sup> per 13  
<sup>58</sup> per 13  
<sup>59</sup> per 13  
<sup>60</sup> per 13  
<sup>61</sup> per 13  
<sup>62</sup> per 13  
<sup>63</sup> per 13  
<sup>64</sup> per 13  
<sup>65</sup> per 13  
<sup>66</sup> per 13  
<sup>67</sup> per 13  
<sup>68</sup> per 13  
<sup>69</sup> per 13  
<sup>70</sup> per 13  
<sup>71</sup> per 13  
<sup>72</sup> per 13  
<sup>73</sup> per 13  
<sup>74</sup> per 13  
<sup>75</sup> per 13  
<sup>76</sup> per 13  
<sup>77</sup> per 13  
<sup>78</sup> per 13  
<sup>79</sup> per 13  
<sup>80</sup> per 13  
<sup>81</sup> per 13  
<sup>82</sup> per 13  
<sup>83</sup> per 13  
<sup>84</sup> per 13  
<sup>85</sup> per 13  
<sup>86</sup> per 13  
<sup>87</sup> per 13  
<sup>88</sup> per 13  
<sup>89</sup> per 13  
<sup>90</sup> per 13  
<sup>91</sup> per 13  
<sup>92</sup> per 13  
<sup>93</sup> per 13  
<sup>94</sup> per 13  
<sup>95</sup> per 13  
<sup>96</sup> per 13  
<sup>97</sup> per 13  
<sup>98</sup> per 13  
<sup>99</sup> per 13  
<sup>100</sup> per 13

$CE$ . Unde cum  $AD$  sit  $\propto x$ ,  $AB \propto a$ , &  $DC \propto c$ : erit  $CE \propto \frac{ac}{x}$ .  
 Quæ si ducatur in duplam  $BC \propto b$ , fiet duplum rectangulum  
 $BCE \propto \frac{2abc}{x}$ . Æquandum propterea duplo rectangulo  $BCE$   
 ante invento  $xx - aa - bb - cc$ . Quare  $\frac{2abc}{x}$  æquabitur  
 $xx - aa - bb - cc$ . Hoc est ordinatâ æqualitate, erit

$$x^3 \propto + aax + \frac{2}{3}abc.$$

$$+ bb$$

$$+ cc$$

Unde cum hæc æquatio sit cubica secundæ formulæ, viden-  
 dum deinceps an quadratum semissis ultimi termini sit majus cu-  
 bo trientis quantitatis cognitæ penultimi, an verò ipsi æquale, an

co

# ÆQUATIONUM RESOLUTIONE. 355

eo minus. In quem finem quæro tam hunc cubum quam illud quadratum. Triens autem quantitatis cognitæ penultimi termini est  $a^2 + b^2 + c^2$ , ejus cubus

$$a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 + 3a^4c^2 + 3a^2c^4 + 3b^4c^2 + 3b^2c^4 + c^6$$

Quadratum autem semissis ultimi termini est  $aabbcc$ . Oportet itaque horum utriusque relationem indagare. In quem finem productas quantitates  $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 + 3a^4c^2 + 3a^2c^4 + b^6 + 3aabbcc + 3b^4c^2 + 3b^2c^4 + c^6$  &  $27aabbcc$  inter se confero, ut sequitur.

$3a^4bb$ ,  $3aabbcc$ ,  $3bbcc$ , sunt tres proportionales in ratione  $aa$  ad  $cc$ , unde  $3a^4bb + 3bbcc$  majus erit quam  $6aabbcc$ , per 25 quædam Elementorum.

Sic  $3a^4ab$ ,  $3aabbcc$ ,  $3aac$ , sunt tres proportionales in ratione  $bb$  ad  $cc$ , unde  $3a^4ab + 3aac$  majus erit quam  $6aabbcc$ .

Ut &  $3a^4cc$ ,  $3aabbcc$ ,  $3b^4cc$ , sunt tres proportionales in ratione  $aa$  ad  $bb$ , unde  $3a^4cc + 3b^4cc$  majus erit quam  $6aabbcc$ .

Quare & omnes simul omnibus simul erunt majores, hoc est, erit  $3a^4bb + 3a^4ab + 3a^4cc + 3bbcc + 3aac + 3b^4cc$  majus quam  $18aabbcc$ .

Unde & illius subtriplum  $a^4bb + a^4ab + a^4cc + bbcc + aac + b^4cc$  majus quam hujus subtriplum  $6aabbcc$ .

Rursus quoniam  $a^6$ ,  $a^4bb$ ,  $a^4ab$ ,  $b^6$ , sunt proportionales continue in ratione  $aa$  ad  $bb$ , erit  $a^6 + b^6$  majus quam  $a^4bb + a^4ab$ .

Sic etiam quia  $b^6$ ,  $b^4cc$ ,  $bbcc$ ,  $c^6$ , sunt proportionales continue in ratione  $bb$  ad  $cc$ , erit  $b^6 + c^6$  majus quam  $b^4cc + bbcc$ .

Similiter cum  $a^6$ ,  $a^4cc$ ,  $a^4ac$ ,  $c^6$ , sint proportionales continue in ratione  $aa$  ad  $cc$ , erit  $a^6 + c^6$  majus quam  $a^4cc + a^4ac$ .

Quare & simul omnes simul omnibus erunt majores, hoc est, erit  $2a^6 + b^6 + c^6$  majus quam  $a^4bb + a^4ab + b^4cc + bbcc + a^4cc + a^4ac$ . Quia autem hoc ipsum majus est quam  $6aabbcc$ , ut supra ostendimus, erit  $2a^6 + b^6 + c^6$  majus quam  $6aabbcc$ .

Unde & semissis  $a^6 + b^6 + c^6$  majus quam  $3aabbcc$ .

Quocirca cum  $3a^4bb + 3a^4ab + 3a^4cc + 3bbcc + 3aac + 3b^4cc$  majus sit quam  $18aabbcc$ , ac ipsi addatur  $a^6 + b^6 + c^6$  quod majus est quam  $3aabbcc$ , & adhuc utrobique  $6aabbcc$  fiet quæque  $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 + 3a^4c^2 + 3a^2c^4 + b^6 + 3aabbcc + 3b^4c^2 + 3b^2c^4 + c^6$  majus quam  $27aabbcc$ .



E quibus liquet cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini majorem esse quadrato semissis ultimi, ac propterea radicem æquationis juxta regulam Cardani inveniri non posse.

Notandum autem porro est, Problema propositum solidum esse, si tria latera data A B, B C, & C D inter se inæqualia statuuntur, cum ad æquationem cubicam reducatur, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Cum verò duo qualibet ex dictis lateribus sunt æqualia, tunc quidem æquatio reducitur ad quadratam. Ut si  $b$  &  $c$  æqualia fuerint, devenietur ad æquationem:  $x^3 - \frac{aa}{bb}x - \frac{abb}{bb} \infty 0$ , quæ dividi poterit per  $x + a \infty 0$ , quâ ratione ipsa reducetur ad quadratam:  $xx - ax - \frac{bb}{bb} \infty 0$ , quæ ulterius dividi nequit.

Sin autem tria latera æqualia ponantur, tunc quidem æquatio hanc accipiet formam:  $x^3 - \frac{aa}{bb}x - \frac{abb}{bb} \infty 0$ , eaque dividi poterit per  $x - a \infty 0$ , orietur namque æquatio:  $xx + \frac{aa}{bb}x + \frac{abb}{bb} \infty 0$ , duas admittens falsas radices, quæ sibi invicem sunt æquales. Unde sequitur verum valorem radices  $x$  eo casu fore  $\frac{aa}{bb}$ , & duos falsos valores esse  $-a$  &  $-a$ . Hoc enim manifestum est, quoniam, si tria latera A B, B C, & C D æqualia inter se extiterint, figura A B C D fit semi-hexagonum regulare, in quo latus quodlibet semidiametro est æquale.

Porro si velimus idem Problema per numeros resolvere, esto A B seu  $a \infty 24$ , B C seu  $b \infty 20$ , C D seu  $c \infty 15$ , & quæratur A D  $\infty x$ . Hinc, cum  $aa + bb + cc$  inveniatur  $\infty 1201$ , &  $\frac{2}{3}abc \infty 14400$ , exurget ejusmodi æquatio:  $x^3 \infty 1201x + 14400$ , seu  $x^3 80xx - 1201x - 14400 \infty 0$ . Quæ dividi potest per  $x + 25 \infty 0$ , oritur namque æquatio  $xx - 25x - 576 \infty 0$ , seu  $xx \infty 25x + 576$ , cujus radix  $x$  duos admittit valores, ut,  $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$  &  $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$ . Ita ut radix prædictæ æquationis  $x^3 \infty 1201x + 14400$  seu diameter quæsita A D tres recipiat diversos valores, unum verum seu  $+$  quàm  $0$ , ut  $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ ; atque duos falsos seu  $-$  quàm  $0$ , ut  $-25$  &  $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$ . Qui quidem sumpti ipsi vero sunt æquales.

Quod si verò æquatio supra dicta  $x^3 80xx - 1201x - 14400 \infty 0$  dividi non potuisset per quantitatem incognitam  $x +$  vel  $-$  aliquo numero ultimum terminum  $14400$  dividente, arguisset id ipsum & neque ullam ex radicibus tam veram quàm falsam

sam ullo numero exprimi potuisse, sed eam hoc casu denotandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividendam, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

Ut si, exempli gratiâ, proponatur æquatio  $x^3 \propto 243x + 1215$ , seu  $x^3 80xx - 243x - 1215 \propto 0$ , quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit neque ulla ex radicibus tam vera quàm falsa ullis numeris exprimi, nec minùs per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docet Cardani regula. Quandoquidem ad illam revocare non licet, cum hic cubus trientis numeri radicum major sit quàm quadratum semissis numeri absoluti. Aded ut radix ejus per sectionem anguli in tres æquales partes sit denotanda, quemadmodum innuit Albertus Girardus. Nimirum describendo circulum cujus radius FH seu HK sit 9 seu  $\sqrt[3]{p}$ , in eoque adaptando rectam FG æqualem 15 seu  $\frac{1}{2}p$ , atque trifariam porro secando arcum GK seu angulum GFK per rectam FL, quam ait veram quantitatem ipsius radicis  $x$  exprimere. Ubi præterea, si centro H intervallo rectæ LK arcum descriperimus secantem ipsam FL in M & N, vel quod idem est à puncto L triangulum æquilaterum circulo inscripserimus LMN, rectæ FM & FN utramque falsam quantitatem radicis  $x$  designabunt.

Quod idem cum D. des Cartes in eundem ferè modum licebit exsequi. Videlicet, si, intervallo rectæ FH vel HK  $\propto 9$  seu  $\sqrt[3]{p}$  describatur circulus, in quo, inscriptâ rectâ FG  $\propto 15$  seu  $\frac{1}{2}p$ , arcus FMG & FNG trifariam porro secantur, per rectas FM & FN, quas inquit simul sumptas radici quæritæ esse æquales.

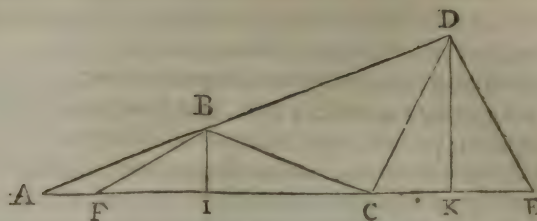
Sin autem ejusdem æquationis radicem juxta modum Vietæ exponere lubeat, Oportebit duo triangula æquicrura concipere, cruribus alterum alteri æqualia, quorum secundi angulus, qui est ad basin, triplus sit anguli, qui est ad basin primi, & intelligere basin quidem secundi esse 7, seu  $\frac{1}{2}p$ , crus verò esse 9 seu  $\sqrt[3]{p}$ .  $x$  autem, de qua quæritur, esse basin primi.

Quod ut curvis obvium sit, supponamus triangula illa esse ABC, & CDE, quorum crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE sit  $\propto a$ , & basis secundi CE  $\propto b$ : Oporteatque invenire basin primi AC  $\propto x$ .

Yy 3

Quia





Quia itaque demissis ad hoc perpendicularibus BI, DK, in triangulo rectangulo ABI, quadratum ex AI  $\propto \frac{1}{4}xx$  subductum à quadrato ex AB  $\propto aa$ , relinquit quadratum ex BI  $\propto aa - \frac{1}{4}xx$ .   
*per 47 primi Elem.*

Eodem modo, in triangulo rectangulo CDK, quadrato ex CK  $\propto \frac{1}{4}bb$  subducto à quadrato ex CD  $\propto aa$ , relinquetur  $aa - \frac{1}{4}bb$ , pro quadrato ex DK.

Porro quoniam, propter similitudinem triangulorum ABI & ADK, AI est ad IB, sicut AK ad KD: erit quoque ut  $\frac{1}{4}xx$ , quad. ex AI, ad  $aa - \frac{1}{4}xx$ , quad. ex IB; sic  $xx + bx + \frac{1}{4}bb$ , quad. ex AK, ad  $aa - \frac{1}{4}bb$ , quad. ex KD. Unde multiplicando extrema, inuenietur productum  $\frac{1}{4}aaxx - \frac{1}{16}bbxx$  æquale  $aaxx + aabx + \frac{1}{4}aabb - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}bx^3 - \frac{1}{16}bbxx$ , producto sub mediis. Hoc est, demptis utrinque æqualibus, & terminis omnibus per 4 ductis, si ipsi deinde ad unam partem transferantur, habebitur  $x^4 + bx^3 - 3aaxx - 4aabb - aabb \propto 0$ . Quæ summa si porrò per  $x + b \propto 0$  dividatur, obtinebitur æquatio  $x^3 - 3aax - aab \propto 0$ , seu  $x^3 \propto 3aax + aab$ . eadem nempe quæ superior pag. 350, in qua cubus trientis quantitatis cognitæ penultimi termini excedit quadratum semissis ultimi termini, cuiusque æquationis vera radix illic per rectam FL, hic autem per rectam AC designatur.

Cæterum quod angulus secundi trianguli DCE, qui est ad basin, triplus sit anguli A, qui est ad basin primi, ita patet: Æquales enim sunt anguli A & BCA, propter æqualia crura AB, BC; & ob id  $\angle$  externus CBD alterutrius hujus duplus. Est autem hic CBD æqualis ipsi CDB, propter æqualitatem linearum CB, CD. Quare & CDB, id est, CDA ipsius A duplus est. Atqui  $\angle$  binis hisce A & CDA æqualis est externus DCE.

*per 5 primi Elem.*

*per 32 primi Elem.*

*per 5 primi Elem.*

*per 32 primi Elem.*

ÆQUATIONUM RESOLUTIONE. 359

DCE. Hinc, qualium partium angulus A est 1, talium angulus CDA erit 2, & DCE 3, hoc est, triplus erit angulus DCE anguli A. Quemadmodum fuit propositum.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem præcedentis Problematis revocari queunt, poterimus quoque radicem x æquationis propositæ x<sup>3</sup> ∞ 243 x + 1215 sic interpretari: dicentes eam esse diametrum semicirculi, supra quam descripto quadrilatero inæqualium laterum, tria superiora in se invicem ducta faciant 607<sup>1</sup> seu 3 q; at verò summa quadratorum ex ipsis faciat 243 seu p.

Ubi præterea notandum, æquationem numericam 1 ③ ∞ 13 ① + 12, à Girardo allatam, non indigere ut radix ejus hoc modo exprimitur, cum in illa 1 ① valeat + 4, - 3, & - 1; ac ipsa æquatio 1 ③ 8 ① ③ - 13 ① - 12 ∞ 0 per 1 ① - 4 ∞ 0, & per 1 ① + 3 ∞ 0, atque etiam per 1 ① + 1 ∞ 0 dividi queat. Ita ut tantum radices earum æquationum secundæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opus sit exprimere, in quibus constet ipsas nec numero, nec Cardani regulâ exprimi posse.

Sed jam tempus est ut ad tertiam æquationum Cubicarum formulam accedamus, ubi x æquatur \* + p x - q.

Hæc autem æquatio tres diversos radices valores admittit, duos nempe veros & unum falsum, æqualem veris illis simul sumptis, sicut ex ejusdem æquationis constitutione agnoscere licet. Nam si ponamus x ∞ b seu x - b ∞ 0, & x ∞ c seu x - c ∞ 0, atque etiam x ∞ - d seu x + d ∞ 0, & multiplicemus x - b ∞ 0 per x - c ∞ 0, ac denuo quod inde fit per x + d ∞ 0, proveniet æquatio:

$$\begin{array}{r} x^3 + dxx - bdx + bcd \infty 0, \text{ vel } x^3 \infty - dxx + bdx - bcd. \\ -b \quad -cd \qquad \qquad \qquad +b \quad +cd \\ -c \quad +bc \qquad \qquad \qquad +c \quad -bc \end{array}$$

In qua si ponatur d, valor falsus radices x, æqualis b + c, duobus veris valoribus ipsius x simul sumptis, tunc quidem b + c destruet - d, fietque 0 xx, hoc est, evanescet adfectio sub xx, nec amplius sese destruent. Nam cum ex hypothesi b + c æquatur d, multiplicando utrinque per d, fiet quoque bd + cd æquale dd. At verò dd majus est quàm bc, quandoquidem tantundem valet ac bb + bc + cc, quadratum videlicet a b + c. Quare & bd + cd majus erit quàm bc, manebitque adfectio sub x cum signo -.

Ita



380 APPENDIX DE CUBICARUM

Ita ut, si  $+bd + cd - bc$  interpreteris per  $+p$ , &  $-bcd$  per  $+q$ , æquatio hanc induat formam:  $x^3 \propto +p x - q$ . Quam constat tres admittere differentes valores radices  $x$ , duos quidem veros seu  $+q$  quàm  $0$ , unum autem falsum seu  $-q$  quàm  $0$ , æqualem veris illis simul sumptis.

Porro ut hæc æquatio recipiat semper tres ejusmodi radices valores, requiritur ut in illa  $\frac{2}{3}p \sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$  non sit minus quàm  $q$ , seu  $2 \sqrt[3]{\frac{1}{3}p}$  non minus quàm  $\frac{3q}{p}$ , sive etiam  $\frac{1}{27}p^3$  non minus quàm  $\frac{1}{4}qq$ . Ob rationem supra dictam.

Aliàs enim duo veri valores non nisi fictitii forent, nec ullus realis extaret præter falsum, qui juxta Cardani regulam sic exprimeretur:  $x \propto \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ .

Vt in exemplum afferre licet æquationem:  $1 \propto 6x - 40$ , in qua  $1x$  valet  $-4$ , cum  $1 \propto 803 - 6x + 40 \propto 0$  dividi queat per  $1x + 4 \propto 0$ , oriaturque æquatio impossibilis  $13 - 4x + 10 \propto 0$ , seu  $13 \propto 4x - 10$ , cujus valores radices nullo modo comprehendi possunt, nisi eos sic exprimere velimus:  $1x \propto 2 + \sqrt{-6}$ , &  $1x \propto 2 - \sqrt{-6}$ . Adeò ut duo veri valores ipsius  $1x$  sint tantùm fictitii  $2 + \sqrt{-6}$  &  $2 - \sqrt{-6}$ , & falsus realis sit  $\propto -4$ .

E quibus patet tertiæ hujus atque secundæ formulæ æquationum convenientia mutuaque radicum suarum reciprocatio.

Lubet autem in usum æquationis hujus tertiæ formulæ unum aut alterum Problema adducere, ut sequentia manifestiora fiant.

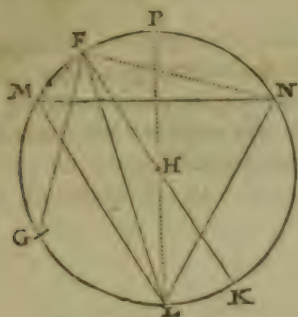
P R O B L E M A.

*Circulo dato FMGN, in eoq. inscripta FG, trifariam secetur arcus uterque FMG & FNG in M & N: Oporteatq. invenire FM subtensam trientis unius, & FN subtensam trientis alterius.*

Esto FH seu HK  $\propto a$ , FG  $\propto b$ , & FM  $\propto x$ , quæraturne ex HF & FM ceu datis juxta modum paginæ 91 hujus Geometriæ inscripta FG, perinde atque ipsa esset incognita: quæ ideo erit  $1x - \frac{x^3}{aa}$ . Jam verò cum ipsa detur  $\propto b$ , erit  $1x - \frac{x^3}{aa} \propto b$ . Vnde æqualitate ordinatâ,  $x^3 \propto aax - aab$ .

Eodem

# ÆQUATIONUM RESOLUTIONE. 361



Eodem modo, si pro FN ponatur  $x$ , atque ex HF & FN quæramus FG, incidemus in eandem æquationem. E quibus sequitur utramlibet subtensam FM vel FN quæ sitæ quantitati radicis  $x$  æqualem esse. Hinc cum  $1 \text{ 3 8 0}$  æquetur  $13 \text{ 1} - 12$ , seu  $1 \text{ 3 8 0} - 13 \text{ 1} + 12$  æquetur 0, ac ipsa æquatio dividi possit per  $1 \text{ 1} - 1 \text{ 0 0}$ , & per  $1 \text{ 1}$

$- 3 \text{ 0 0}$ , nec non per  $1 \text{ 1} + 4 \text{ 0 0}$ : arguit id ipsum FM fore 1, at vero FN 3. Porro quoniam æquationes hujus tertie formulæ ac secunde formulæ tres admittunt differentes valores radicis, quorum quidem duo simul sumpti tertio sunt æquales, ita & addendo duos veros 1 & 3, fiet falsus  $- 4$ , seu quantitas lineæ FL. quæ ipsis MF & FN simul sumptis ostensa est æqualis.

Unde perspicua sunt ea, quæ ab Alberto Girardo in libello supra citato allata sunt ad æquationum radices hujus tertie formulæ inveniendas. Ubi docet, illas ad secundum casum secunde formulæ revocandas esse, convertendo tantum signum  $-$  numeri absoluti in signum  $+$ : cum in iis sicut hic cubus trientis numeri radicem non minor requiratur quàm quadratum semissis numeri absoluti. Ac proinde inventis tribus valoribus radicis quæ sitæ, sicut in secunda formula explicuimus, oportet tantum illos ex o auferre seu eorum signa immutare, ut habeantur tres quæ sitæ hujus, in qua duo semper veri sunt seu  $+$  quàm 0, & tertius est falsus seu  $-$  quàm 0, quemadmodum est ostensum.

## ALIUD PROBLEMA.

*In circulo, cujus diameter AD, inscriptis tribus inequalibus rectis lineis AB, BC, & CD, sibi invicem contiguis, quarum quidem extrema prodeunt ex diametri terminis A & D: Oportet ex iisdem cognitis invenire diametrum AD.*

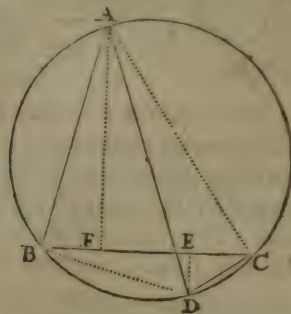
Ponatur ad hoc  $AB \propto a$ ,  $BC \propto b$ ,  $CD \propto c$ , &  $AD \propto x$ . jungan-

zz



ganturque AC, BD, & in BC, productam, si opus sit, perpendicularis demittatur DE.

Duplex autem hic occurrit casus considerandus, juxta quem hæ inscriptæ diversimodè in circulo positæ intelligi possunt; primus, in quo rectæ AB & CD è diametri terminis prodeunt ad diversas partes; & secundus, in quo ipsæ ex iisdem terminis eductæ sunt ad eandem partem, se mutuo interfecantes. In priori igitur positione si quadratum BD  $\propto xx - aa$  subducatur ex ag-



<sup>per 13 secundæ Elem.</sup> gregato quadratorum BC, CD  $\propto bb + cc$ , relinquetur <sup>2</sup> duplum rectangulum BCE  $\propto bb + cc - xx + aa$ . Deinde, quoniam triangula ABD & CED similia sunt, cum anguli ad B & E sint recti, & BAD, ECD æquales <sup>2</sup>, utpote eidem peripheriæ BD insistentes: erit ut DA  $\propto x$  ad AB  $\propto a$ , ita DC  $\propto c$  ad CE  $\propto \frac{ac}{x}$ . Hæc autem ducta in duplam BC  $\propto 2b$  dat duplum re-

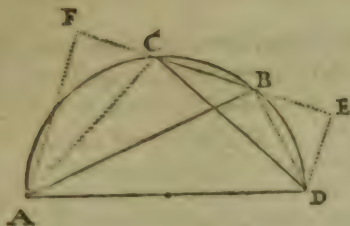
<sup>per 21 tertiæ Elem.</sup>

ctangulum BCE  $\propto \frac{2abc}{x}$ , æquale  $bb + cc - xx + aa$ , duplo videlicet rectangulo BCE, ante invento. Unde ordinatâ æquatione invenitur:  $x^3 \propto + aax - 2abc$ , æquatio cubica tertiæ for-

$+ bb$   
 $+ cc$

mulæ, in qua quadratum semissis ultimi termini est minus cubo quantitatis cognitæ penultimi termini, ut constat ex præmissis Problemate paginæ 354.

In secunda autem positione, si à quadrato DC  $\propto cc$  auferantur <sup>per 12 secundæ Elem.</sup> quadrata DB, BC  $\propto xx - aa + bb$ , relinquetur <sup>3</sup> duplum rectangulum CBE  $\propto cc - xx + aa - bb$ . Cæterum, quoniam  
rursus



rursus propter similitudinem triangulorum  $ABD$  &  $CED$ ,  $AD \propto x$  est ad  $AB \propto a$ , sicut  $DC \propto c$  ad  $CE$ : erit  $CE \propto \frac{ac}{x}$ . E quâ subductâ  $CB \propto b$ , remanebit  $BE \propto \frac{ac}{x} - b$ . Hæc autem si multiplicetur per duplam  $CB$ , proveniet duplum rectangulum  $CBE \propto \frac{2abc}{x} - 2bb$ : æquale duplo rectangulo  $CBE$  ante invento  $\propto cc - xx + aa - bb$ . Unde addito utrinque  $bb$ , ordinatâque secundum artem æquatione, obtinebitur eadem atque superior:  $x^3 \propto + aax - 2abc$   
 $+ bb$   
 $+ cc$

Quocirca cum utroque casu in eandem incidamus æquationem, cujus radix diametrum referat  $AD$ , sequitur quoque eam differentem sortiri quantitatem, & ex eisdem datis inscriptis pro diversa earum positione dupliciter inveniri.

Ubi præterea notandum est, Problema propositum esse solidum, si tres inscriptæ  $AB, BC, \& CD$  inæquales inter se fuerint: siquidem ad cubicam æquationem adscendit, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Quum verò duæ quælibet ex inscriptis æquales ponuntur, tunc quidem æquatio inventa reducetur ad quadratam, & Problema erit planum. Statuendo enim  $b \& c$  æqualia, exsurgit æquatio talis:  $x^3 - aax + 2abb \propto 0$ , quæ dividitur per  $x - a \propto 0$ , & orietur æquatio quadrata  $xx + ax - 2bb \propto 0$ , quæ ulterius non est reducibilis.

Si autem juxta alterutram positionem omnes hæc tres inscriptæ æquales fingantur, ita ut inde deducatur æquatio  $x^3 - aax + a^3 \propto 0$ , poterit hæc ipsa dividi per  $x + a \propto 0$ , orieturque æquatio  $xx - ax + aa \propto 0$ , quæ porro dividi poterit per  $x - a \propto 0$ , & orietur  $x - a \propto 0$ . Quoniam verò hoc casu inscriptæ cum diametro coincidere intelliguntur ac ipsi diametro esse æquales, constat æquationis radicem  $x$ , hoc est, diametrum  $AD$  duos in eo  
 Zz 2 admit-



admittere veros valores sibi invicem æquales, qui singuli per unamquamque ex illis inscriptis designantur; ac præterea falsum, alterutrius illius duplum.

Cætèrùm si desideremus propositum Problema per numeros resolvere, esto  $AB \propto a \propto 24$ ,  $BC \propto b \propto 20$ ,  $CD \propto c \propto 15$ , & quaratur  $AD \propto x$ . Hinc cum  $aa + bb + cc$  sit 1201, &  $^2abc \propto 14400$ , invenietur æquatio talis:  $x^3 \propto 1201x - 14400$ , seu  $x^3 80xx - 1201x + 14400 \propto 0$ . Quæ dividi potest per  $x - 25 \propto 0$ , oritur namque æquatio  $xx + 25x - 576 \propto 0$ , seu  $xx \propto -25x + 576$ . Cujus porro vera radix est  $\sqrt{73\frac{1}{2}} - 12\frac{1}{2}$ , & falsa  $-\sqrt{73\frac{1}{2}} - 12\frac{1}{2}$ . Ita ut diameter quæsitæ AD, hoc est,  $x$  radix prædictæ æquationis  $x^3 \propto 1201x - 14400$ , tres ferat differentes valores, duos scilicet veros seu  $+$  quàm 0, nimirum  $+ 25$  majorem, &  $\sqrt{73\frac{1}{2}} - 12\frac{1}{2}$  minorem, & unum falsum seu  $-$  quàm 0, nimirum  $-\sqrt{73\frac{1}{2}} - 12\frac{1}{2}$ , qui veris istis simul sumptis est æqualis. Quocirca cum tres superioris æquationis  $x^3 \propto 1201x + 14400$  radices inventæ sint  $-25$ ,  $12\frac{1}{2} - \sqrt{73\frac{1}{2}}$ , &  $12\frac{1}{2} + \sqrt{73\frac{1}{2}}$ , patet eas tantùm ex 0 esse auferendas, seu earum signa esse immutanda, ad habendas tres radices hujus posterioris æquationis.

Quòd si verò hæc ipsa æquatio  $x^3 80xx - 1201x + 14400 \propto 0$  dividi non potuisset per quantitatem incognitam  $x +$  vel  $-$  aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, argumentum fuisset quòd & nulla radicum tam vera quàm falsa ullo numero fuisset explicabilis, sed eam tunc designandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

Ut si in exemplum proponatur æquatio  $x^3 \propto 2700x - 32400$ , seu  $x^3 80xx - 2700x + 32400 \propto 0$ , quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit quoque valor radices  $x$ , sive is verus sive falsus fuerit, nullis numeris exprimi, nec per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docent Cardani regulæ. Quippe illum ad has non revocare licet, cum ipsæ exigant ut cubus trientis numeri radicum à quadrato senissis numeri absoluti auferatur, qui quidem cubus hic major datur. Adeò ut radices ejus per rectas subtendentes trientem anguli vel arcus dati sint denotandæ, ut vult D. des Cartes, atque ut etiam Albertus Girardus innuit. Scilicet describendo circulum cujus radius

FH

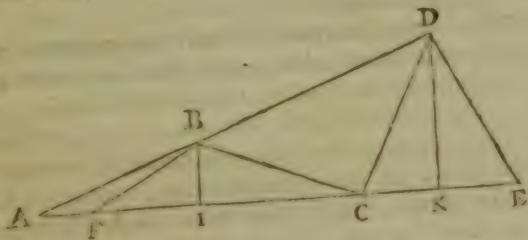
ÆQUATIONUM RESOLUTIONE. 365

FH seu HK sit 30 seu  $\sqrt{\frac{1}{2}p}$ , in eoque accommodando rectam FG  $\propto 36$  seu  $\frac{1}{2}q$ , atque deinde trifariam secando utrumque arcum FMG & FNG per rectas FM & FN. Nam uti circulus, cujus radius 30 per inscriptam 36 in duos inæquales arcus dispartitur, ita quoque incognita quantitas  $x$  duplicem verum valorem fortitur, sitque alterutra e subtenfis FM vel FN, tam trientis FM minoris arcus FMG, quàm trientis FN majoris FNG: Falsus autem ejusdem valor æqualis est veris illis simul sumptis, atque per rectam FL designatur.

Quos binos radices valores cum Vieta aliâ porro ratione explicare licet, ut sequitur.

Duo intelligantur triangula æquicrura, cruribus alterum alteri æqualia, quorum secundi angulus, qui est ad basin, sit triplus anguli, qui est ad basin primi, & basis secundi intelligatur esse 18 seu  $\frac{1}{2}q$ , crus verò 30 seu  $\sqrt{\frac{1}{2}p}$ .  $x$  autem de qua queritur, esse basin dimidiam primi, multatam continuatamve longitudine ejus rectæ, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.

Quod ut perspicuum fiat, fingantur triangula illa esse ABC & CDE, quorum (ut ante) crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE sit  $\propto a$ , & basis secundi CE sit  $\propto b$ . Demissis autem in iis perpendicularibus BI, DK, sumatur BF æqualis duplæ BI: eritque FI recta, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.



Quibus ita positis, ut inveniatur AF, liquet, si pro ea ponamus  $y$ , & pro AC, ut ante, ponamus  $x$ , quadratum ex BI fore  $\propto aa - \frac{1}{4}xx$ , adeoque quadratum ex FI  $\propto 3aa - \frac{1}{4}xx$ . Quoniam verò ex AI  $\propto \frac{1}{2}x$  sublati AF  $\propto y$ , relinquitur FI  $\propto \frac{1}{2}x - y$ , cujus quadratum est  $\frac{1}{4}xx - xy + yy$ : erit  $\frac{1}{4}xx - xy + yy \propto 3aa - \frac{1}{4}xx$ . Hoc

Zz 3



Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur  $xx \propto yx + {}^3aa$ . Unde

—  $yy$

extractâ radice, fit  $x \propto \frac{1}{2}y \sqrt[3]{3aa - \frac{1}{4}yy}$ . Hinc, si in æquatione olim inventa  $x^3 \propto {}^3aax + aab$  in locum  $x$  substituatur valor inventus  $\frac{1}{2}y \sqrt[3]{3aa - \frac{1}{4}yy}$ , & in locum  $x^3$  ejus cubus, qui est  $\frac{27}{8}aay - y^3 \sqrt[3]{3aa - \frac{1}{4}yy}$ , obtinebimus æquationem  $y^3 \propto {}^3aay - aab$ . Cujus ideo vera radix erit linea AF.

Eodem modo ad inveniendam FC, si pro ea ponamus  $\zeta$ , atque ab ipsa tollamus IC  $\propto \frac{1}{2}x$ , remanebit FI  $\propto \zeta - \frac{1}{2}x$ . Unde cum quadratum ejus sit  $\zeta\zeta - x\zeta + \frac{1}{4}xx$ : erit itidem  $\zeta\zeta - x\zeta + \frac{1}{4}xx \propto 3aa - \frac{3}{4}xx$ . Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur

$xx \propto \zeta x + {}^3aa$ . Et fit, extractâ radice  $x \propto \frac{1}{2}\zeta \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}\zeta\zeta}$ .  
—  $\zeta\zeta$

Hinc si rursus in æquatione olim inventa  $x^3 \propto {}^3aax + aab$  in locum  $x$  subrogetur valor inventus  $\frac{1}{2}\zeta \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}\zeta\zeta}$ , & in locum  $x^3$  ejus cubus  $\frac{27}{8}aa\zeta - \zeta^3 \sqrt[3]{3aa - \frac{3}{4}\zeta\zeta}$ , obtinebimus æquationem  $\zeta^3 \propto {}^3aa\zeta - aab$ . Cujus ideo vera radix est linea FC.

Ex quibus colligitur, si æquatio proposita fuerit  $x^3 \propto {}^3aax - aab$ , eandem duas admittere veras radices, quarum minor AF obtinetur, si ex AI vel IC dimidia base primi trianguli ABC auferatur recta FI, cujus quadratum sit æquale triplo quadrato ejusdem altitudinis BI; & major, si ad AI vel IC ipsa FI addatur. Omnino ut fuit propositum.

Ubi porro advertendum, quòd, in eadem æquatione  $x^3 \propto {}^3aax - aab$ , ob mutuam radicum æquationis hujus tertix ac secundæ formulæ reciprocationem, tertia radix sit falsa, quæ per AC, basin primi trianguli ABC, designatur, quæque iplis veris AF, FC simul sumptis est æqualis. Et contra si æquatio fuerit  $x^3 \propto {}^3aax + aab$ , quòd præter veram, quæ per AC exhibetur, aliæ duæ extent falsæ, quarum minor est AF, & major FC, quæ similiter simul sumptæ ipsi veræ AC sunt æquales.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem posterioris Problematis revocari queunt, poterimus quoque propositæ æquationis  $x^3 \propto 2700x - 32400$  valores radices  $x$  sic exprimere: Dicentes eos per diametrum circuli AD designari, in quò si inscribantur tres rectæ lineæ inæquales AB, BC, & CD, sibi

Vide figuras  
pag. 362.  
& 363.

sibi invicem contigua, quarum extremae prodeunt è diametri terminis A & D, solidum ex ipsis tribus sit  $\infty 16200$  seu  $\frac{1}{2}q$ , & summa quadratorum earundem sit  $\infty 2700$  seu  $p$ . Nam quemadmodum hæ tres inscriptæ cum diametro duobus modis girgillum referunt, & utrâque positione diameter duplicem quantitatem sortitur, ita quoque ipsa in hac vel illa positione veram semper radicem designat. Falsa autem, ipsis veris adæquans, exhibetur per diametrum semicirculi, in quo descripto supra diametrum quadrilatero, tria hujus reliqua latera dictis inscriptis sumpta sint æqualia. Ut ex superioribus manifestum est.

Ubi advertendum insuper restat, æquationem numericam 1 ③  $\infty 13$  ① — 12, à Girardo propositam, non requirere ut radices ejus hoc modo exprimantur: cum in illa 1 ① valeat — 4, + 1, & + 3, ac ipsa æquatio 1 ③ 8 ② — 13 ① + 12  $\infty 0$  per 1 ① + 4  $\infty 0$ , & per 1 ① — 1  $\infty 0$ , nec non per 1 ① — 3  $\infty 0$  dividi possit. Ita ut duntaxat radices earum æquationum tertiæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opus sit exprimere, in quibus constat ipsas nec numero, nec Cardani regula explicari posse.

Unde demum cum D. des Cartes concludere licet, valorem radicum æquæ facile, immo quidem facilius concipi, cum ipse per subtensas arcuum designatur, quorum triplum est datum, quam cum per latera certorum cuborum exprimitur, quorum non nisi contentum cognoscitur. Præterquam quòd ad illas subtensas non magis indigeamus aliquo charactere peculiari, quàm  $\sqrt{C}$ . ad exprimenda latera cubica, &  $\sqrt{C}$  ad quadrata. Adeò ut cubicarum æquationum valores radicum, qui nec numero nec per Cardani regulas exprimi queunt, allatis quidem modis clare ac distinctè explicari possint.

Cæterum ne quid hic desideretur, sed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutissimus noster Huddenius olim adinvenit, mihiq; coram communicavit.

Proponatur æquatio  $z^3 \infty * - p z + q$ , & sit  $z$  quantitas, quàm invenire oportet.

Ponatur ad hoc  $z \infty x - y$ . Eritque  $z^3 \infty x^3 - 3xy + 3yy - y^3$ . Unde cum &  $z^3$  æquetur  $-p z + q$ : erit similiter  $-p z + q \infty x^3 - 3xy + 3yy - y^3$ .

Divi-



368 APPENDIX DE CUBIC. ÆQUAT. RESOLUT.

Dividamus jam hanc æquationem in duas, nempe  $-p\zeta\infty - 3xxy + 3xyy, & q\infty x^3 - y^3$ . Quarum prima divisa per  $\zeta\infty x - y$  dat  $-p\infty - 3xy$ , seu  $p\infty^3 xy$ ; & fit  $x\infty \frac{\frac{1}{2}p}{y}$ . Unde, si in secunda in locum  $x$  subrogetur valor inventus  $\frac{\frac{1}{2}p}{y}$ , & in locum  $x^3$  hujus cubus  $\frac{\frac{1}{2}p^3}{y^3}$ , obtinebitur  $q\infty \frac{\frac{1}{2}p^3}{y^3} - y^3$ . Hoc est, multiplicando utrinque per  $y^3$ , & ordinando æquationem, habebitur  $y^6\infty - qy^3 + \frac{1}{27}p^3$ . Cujus radix, juxta pag. 6, est  $y^3\infty - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ . Et fit  $y\infty \sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ . Adeoque  $x\infty \frac{\frac{1}{2}p}{y}$   
 $\infty \frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$ . Posueramus autem  $\zeta\infty x - y$ . Erit

$$\text{itaque } \zeta\infty \frac{\frac{1}{2}p}{\sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}} - \sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Qui sanè valor eo Cardani simplicior censerì potest, siquidem ad hunc obtinendum radix cubica semel tantum est extrahenda. Quòd si verò ipsius  $\zeta$  valor cum Cardano sit exhibendus, ita porro operari licebit. videlicet in æquatione jam dictâ  $q\infty x^3 - y^3$  in locum  $y^3$  substituendo valorem inventum  $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ ; habebiturque  $q\infty x^3 + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ , seu  $x^3\infty + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ . Et fit  $x\infty \sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ . Hinc cum  $\zeta$  sit  $\infty x - y$ : erit  $\zeta\infty \sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ .

Haud dissimili modo procedendum in æquatione  $\zeta^3\infty * + p\zeta + q$ , ubi  $\zeta$  valet  $\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ . ponendo nempe  $\zeta\infty x + y$ .

Notandum verò, in his  $\zeta$  æqualem supponi  $x +$  vel  $-y$ , non autem pluribus incognitis quantitibus, ex eo quòd plures duabus diversis æquationibus institui nequeunt; ut &  $-p\zeta$  supponi  $\infty - 3xxy + 3xyy$ , ex eo quòd tunc æquationem hanc dividere licet per  $\zeta\infty x - y$ , atque sic deinde ipsarum  $x, y$ , &  $\zeta$  valores in simplicissimis terminis invenire. Idem quoque aliter fieri potest, ad modum paginæ 296.

Hæc autem de Cubicarum Æquationum Resolutione dicta sufficiant.

A D-

## ADDITAMENTUM.

**C**æterum ut pateat, non facili Problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat, aut ejusdem Methodo solvi non possit, subjungam in ejus specimen solutionem artificiosissimam Problematis, quod habetur in libello ingeniosissimo, qui operâ Jacobi à Waessenaer Anno 1640 sub titulo: *Den onwiffen Wys-konstenaer*, l. l. *Stampioenius*, in lucem prodiit. Verum enimverò quoniam ad ejus solutionem, ibi traditam, quædam admittuntur ut concessa, quæ demonstrare operæ pretium duxi, visum fuit ea sequenti Theoremate demonstrata exhibere.

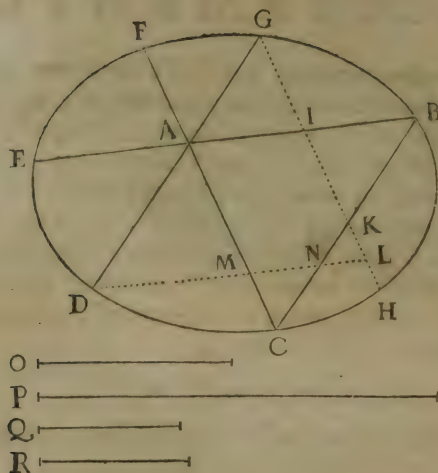
### T H E O R E M A.

Alicubi terrarum in Zonis frigidis, cum Sol non occidit, defixis ad plumbum supra planum horizontale tribus baculis in punctis A, B, & C, ita se habentibus, ut, postquam eodem die extremitas umbræ baculi A transire deprehensa fuerit per B & C, reperta item sit extremitas umbræ baculi B transiisse per C & A, nec non ejus qui in C per A: Demonstrandum est eandem transiisse pariter per B.

Quod ut fiat, sciendum primò est umbram baculi A descripsi se Ellipsin vel Circulum, transeuntem per puncta B & C, prout videlicet hæc observata ponantur in Sphæra obliqua vel parallela. Deinde junctis CA, AB, BC, productisque BA, AC donec ejus circumferentiæ occurrant in punctis E & F, ductâque per A rectâ DG ipsi BC parallelâ, & utrinque peripheriæ occurrente in punctis D & G: evidens est, quòd, postquam umbra baculi B finit in A, eodem puncto temporis umbra baculi A finierit quoque in E; ita ut BA ad AE, rationem, quæ est inter baculum B & baculum A, designet. Eodem modo, postquam umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut CA ad AF sit, sicut baculus C ad baculum A. Similiter, dum umbra ipsius B pervenit ad C, pervenit etiam umbra ipsius A ad D; ita ut BC sit ad AD, sicut baculus B ad baculum A. Quibus sic intel-

A a 2





tellectis, ut constet, umbram baculi C transiisse item per B, ostendendum est, cum umbra baculi A incidit in G, umbram ipsius C incidisse similiter in B, hoc est, baculum C ad baculum A, vel C A ad A F esse, sicut C B ad A G.

Quod ipsum igitur ut fiat manifestum, inveniendus nobis est valor lineæ A G. Quocirca ad hoc ductâ G H parallelâ A C, secante A B, B C in I & K, & Ellipsis vel Circuli circumferentiæ occurrente in H, ponatur  $AB \propto a$ ,  $BC \propto b$ ,  $CA \propto c$ ,  $AF \propto d$ ,  $AE \propto e$ ,  $HK \propto x$ , &  $AG$  vel  $CK \propto z$ : eritque  $KB \propto b - z$ .

Deinde, ut innotescat A D, quoniam baculus B est ad baculum A, ut B A ad A E; itemque B baculus ad A baculum, ut B C ad A D: erit ut B A ad A E, vel  $a$  ad  $e$ , sic B C vel  $b$  ad A D. quæ ideo erit  $\frac{be}{a}$ . Cum autem hæc multiplicata per A G seu  $z$  producat  $\frac{bez}{a}$  rectangulum D A G, similiterque A G vel CK seu  $z$  multiplicata per K B seu  $b - z$  producat  $bz - z^2$  rectangulum C K B; & quidem, juxta 17 prop. 3<sup>ii</sup> libri Conicorum Apollonii,  $\frac{bez}{a}$  ad  $bz - z^2$  sit, vel  $\frac{be}{a}$  ad  $b - z$ , sicut  $\square FAC$  ad  $\square GKH$  seu  $cd$  ad

ADDITAMENTUM. 371

$ed$  ad  $ex$ , vel  $d$  ad  $x$ : fiet, multiplicando medios tum extremos,  
 $db - dz \propto \frac{bex}{a}$ , vel  $adb - ad \propto bex$ .

Jam, ut habeatur  $KI$ , fiat, propter similitudinem triangulorum  
 $BCA$  &  $BKI$ , ut  $BC \propto b$  ad  $CA \propto c$ , ita  $BK \propto b - z$  ad  $KI$   
 $\propto \frac{cb - cz}{b}$ . quæ ad  $HK$  seu  $x$  addita dat  $HI \propto \frac{cb - cz + bx}{b}$ ; at  
 verò ex  $KG$  vel  $CA$  seu  $c$  subducta relinquit  $IG \propto \frac{cz}{b}$ . ex qua-  
 rum ductu unius in alteram invenitur  $\square G IH \propto \frac{cbz - czx + cbx}{bb}$ .

Porrò, ut obtineatur  $AI$ , fiat, propter similitudinem triangu-  
 lorum  $AGI$  &  $BCA$ , ut  $BC \propto b$  ad  $BA \propto a$ , ita  $AG \propto z$  ad  
 $AI \propto \frac{az}{b}$ . quæ ad  $AE$  seu  $e$  addita dat  $EI \propto \frac{az + eb}{b}$ ; at verò ex  
 $AB \propto a$  subducta relinquit  $IB \propto \frac{ab - az}{b}$ . ex quarum mutua  
 multiplicatione exurgit  $\square EIB \propto \frac{aabz + abbe - aazx - abez}{bb}$ . Jam  
 cum, ut ante, per 17. 3<sup>ia</sup> Con. Apoll.,  $\square FAC$  seu  $ed$  sit ad  
 $\square G IH$  seu  $\frac{cbz - czx + cbx}{bb}$ , sive  $d$  ad  $\frac{cbz - czx + bxx}{bb}$ , sicut  
 $\square EAB$  seu  $ea$  ad  $\square EIB$  seu  $\frac{aabz + abbe - aazx - abez}{bb}$ , sive  $e$  ad  
 $\frac{abz + bbe - aaz - bez}{bb}$ : fiet, multiplicando extremos tum me-  
 dios, omisso prius communi denominatore  $bb$ ,  $abd z + bbed -$   
 $adz z - bed z \propto ebe z - cezz + bex z$ . Quoniam autem su-  
 pra inventum fuit  $adb - adz \propto bex$ , hoc est, multiplicando u-  
 trinque per  $z$ ,  $abdz - adzz \propto bexz$ : obtinebitur, subducen-  
 do unam æquationem ex altera,  $bbed - bedz \propto ebe z - cezz$ ,  
 vel  $bbd - bdz \propto ebe z - cezz$ . Hoc est, æqualitate ritè ordina-  
 tâ, erit  $zz \propto \frac{eb + db}{c}$  in  $z - \frac{bbd}{c}$ . Quæ æquatio juxta regulam

pag. 7 resoluta dat  $z \propto b$ , ut &  $z \propto \frac{db}{c}$ . Cum verò horum duo-  
 rum valorum ipsius  $z$  duntaxat  $\frac{db}{c}$  quæ sitæ  $AG$  respondeat, hic-  
 que nos doceat  $c$  esse ad  $d$ , sicut  $b$  ad  $z$ : patet,  $CA$  ad  $AF$  esse,  
 sicut  $CB$  ad  $AG$ . Quod erat ostendendum.

Sequitur Problema, ejusque solutio.

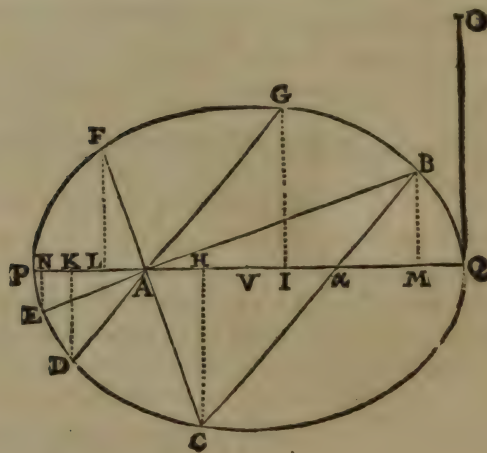
Aaa 2

PRO-



## PROBLEMA.

**T**Empore verno erectis alicubi terrarum ad perpendiculum tribus baculis in plano Horizontali in punctis A, B, & C, quorum is qui in A sit 6 pedum, qui in B 18 pedum, & qui in C 8 pedum, existente lineâ AB 33 pedum: Contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A transire per puncta B & C, baculi autem B per puncta A & C, & baculi C per punctum A, unde fit ut etiam per punctum B sit transitura. Quæritur jam quo terræ loco atque anni die hæc evenerint?



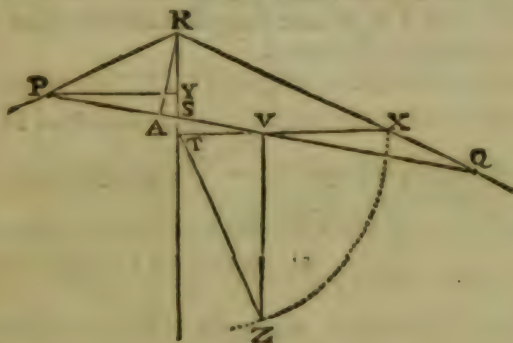
## Solutio.

Ut hoc Problema solverem, primò consideravi, Solem, baculi cujusque umbrâ, eo die quo hæc observata sunt, descripsisse Ellipsin, Hyperbolam, aut Parabolam.

Deinde etiam facilè perspexi, umbram illam non Hyperbolam, nec Parabolam, sed Ellipsin descripsisse, eamque observationem, quæ prima recensetur, non matutino tempore, sed ante mediam

mediam noctem factam fuisse. Quibus brevitatis causâ suppositis, ad Problematis solutionem ita procedo.

Sit  $P G Q C$  Ellipsis, quam descripsit umbra baculi  $A$ , ejusque maxima diameter sit  $P Q$ , representans lineam meridianam: liquet, cum umbra baculi  $A$  pertigit ad  $Q$ , fuisse mediam noctem, & cum à  $Q$  per  $C$  transiens pervenit ad  $P$  fuisse meridiem, & denique à  $P$  per  $G$  decurrens usque in  $Q$  rursus ad mediam noctem fuisse perventum. Deinde, cum umbra baculi  $B$  incidit in  $A$ , tum quoque umbra baculi  $A$  incidit in  $E$ ; ita ut  $A B$  sit ad  $A E$ , ut 3 ad 1. Porro, cum umbra baculi  $C$  pertigit ad  $A$ , pertigit etiam umbra baculi  $A$  ad  $F$ ; ita ut  $C A$  ad  $A F$  sit, ut 4 ad 3. Denique, cum umbra baculi  $B$  terminabatur in  $C$ ; terminabatur quoque umbra baculi  $A$  in  $D$ ; ita ut  $G A$  ad  $A D$  sit, ut 9 ad 4. Quibus rationibus in Ellipsi sic explicatis, demittantur perpendiculares  $B M, E N, C H, F L, G I, \& D K$ .



Deinde, in secunda figura supponendo  $P R Q$  esse Conum, in quo  $P Q$  designet majorem prædictæ Ellipseos diametrum,  $A R$  baculum  $A$ ,  $R S$  axem Coni, angulus  $A S R$  altitudinem Poli, & angulus  $R P Y$  distantiam inter æquatorem & locum Solis in Ecliptica: fiat in Ellipsi  $P Q \propto q$ , latus rectum  $Q O \propto r$ ,  $A Q \propto p$ ,  $M Q \propto x$ ,  $H Q \propto y$ , &  $K Q \propto z$ : eritque  $A M \propto p - x$ ,  $A N \propto \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} x$ ,  $N Q \propto \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} x$ ,  $A H \propto p - y$ ,  $A L \propto \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} y$ ,  $L Q \propto \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} y$ , &  $K A \propto z - p$ ; In Cono verò,  $A R \propto c$ , seu  $6$ ,  $P Q \propto q$ ,  $A V \propto q u$ ,  $S V \propto f u q$ : eritque  $A S \propto q u - f u q$ , &  $P S \propto \frac{1}{2} q - f u q$ .

Λαα 3

His



His positis, quæro primùm rationem, quam inter se habent MQ, HQ, & KQ, ut &, BM, HC, & DK; & inuenio BM + HC æuari 3 DK: cum BC & AD parallelæ existentes inter se sint, sicut baculus B ad baculum A, hoc est, ut 3 ad 1: ac proinde BM + HC ∝ 3 DK. E quibus porro inuenitur PA ad AQ esse, ut  $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$  ad  $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ , hoc est, ut  $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$  ad  $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$ .

Deinde beneficio AM & AB quæro perpendicularem BM, quæ etiam in aliis terminis inueniri potest. unde innotescit latus rectum r, quod postea quoque aliter beneficio Coni inuenitur.

Ex duplicibus terminis quantitati r æqualibus quæro f, tum q, ac postea etiam u.

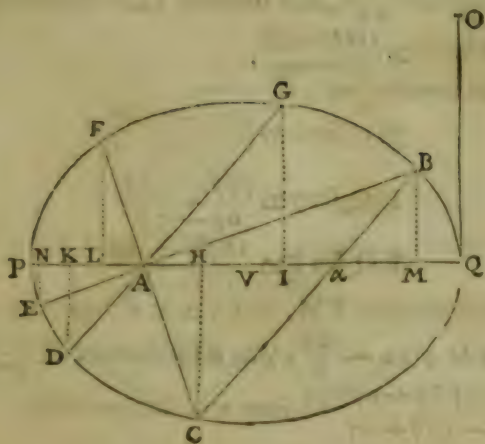
Cognitis autem f, q, & u, quæritur ratio AS ad AR, ostendens Poli elevationem.

Denique investigatur ratio, quæ est inter TX & TR, hoc est, inter PY & YR, & inde innotescit distantia inter Æquatorem & locum Solis in Ecliptica.

Primò igitur MQ sic investigatur: Ut PQ seu q ad QO seu r, ita quadratum MQ seu xx ad  $\frac{rxx}{q}$ , quod subductum ab rx, rectangulo MQO, relinquit  $rx - \frac{rxx}{q}$ , pro quadrato ex BM, adeoque  $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$  pro BM. Rursus, ut q ad r, ita quadratum NQ  $\frac{16}{9}pp - \frac{8}{9}px + \frac{1}{9}xx$  ad  $\frac{16}{9}ppr - \frac{8}{9}prx + \frac{1}{9}rxx$ . quod si subtrahatur à  $\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx$ , rectangulo NQO, & ex reliquo extrahatur radix quadrata, fiet  $\sqrt{\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx - \frac{16ppr + 8prx - rxx}{9q}}$

E pro NE, ∝  $\sqrt{\frac{rx}{9} - \frac{rxx}{9q}}$ , tertiæ videlicet parti ipsius BM. Quæ æquatio si reducatur, inuenietur  $x \propto \frac{4pp - 3pq}{2p - q}$ , pro MQ.

Deinde, ad inueniendam HQ, investigetur prius eodem modo HC,  $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$ . Tum fiat, ut CA ad AF, seu 4 ad 3, ita  $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$  ad  $\sqrt{\frac{9}{16}ry - \frac{9ryy}{16q}}$ , seu LF. Porro, ut q ad r, ita quadratum LQ  $\frac{49pp}{16} - \frac{21py}{8} + \frac{9yy}{16}$  ad  $\frac{49ppr}{16q} - \frac{21pry}{8q} + \frac{9ryy}{16q}$ .  
Quod



Quod si auferatur à  $\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4}$ , rectangulo L Q O, & ex reliquo extrahatur radix, fiet  $\sqrt{\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4} - \frac{49ppr}{16q} + \frac{21prx}{8q} - \frac{9ryy}{16q}}$  pro L F  $\propto \sqrt{\frac{9ry}{16} - \frac{9ryy}{16q}}$ , ante inventâ. Quæ æquatio reducta dat  $y \propto \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$ , pro H Q.

Porro, ad inveniendam K Q, investigetur ut prius K D  $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$ . Deinde fiat ut A D ad A G, seu 4 ad 9, ita  $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$  ad  $\sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$ , seu G I. Rursus, ut 4 ad 9, ita A K  $z - p$  ad  $\frac{9z - 2p}{4}$ , seu A I. quæ ex A Q sublata relinquit I Q  $\frac{13p}{4} - \frac{9z}{4}$ . Porro ut q ad r, ita quadratum Q I  $\frac{169pp}{16} - \frac{117pz}{8} + \frac{81zz}{16}$  ad  $\frac{169ppr}{16q} - \frac{117rpz}{8q} + \frac{81rzz}{16q}$ . Quod si auferatur à  $\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4}$ , rectangulo I Q O, & ex reliquo extrahatur radix, proveniet  $\sqrt{\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4} - \frac{169ppr}{16q} + \frac{117rpz}{8q} - \frac{81rzz}{16q}}$ , pro G I



GI  $\propto \sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$ , ante inventa. Quae æquatio si reducatur, habebitur  $z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$ .

Atque ita inventa sunt

$$MQ \text{ seu } x \propto \frac{4pp - 3pq}{2p - q}$$

$$HQ \text{ seu } y \propto \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$$

$$KQ \text{ seu } z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$$

Ad inveniendas jam BM, HC, & DK, quoniam ante inventa est BM  $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$ , loco  $x$  substituatur  $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$ , &

$\frac{16p^4 - 24p^3q + 9ppqq}{4pp - 4pq + qq}$  loco  $xx$ , fietque BM

$$\sqrt{\frac{16p^4r + 32p^3qr - 19ppqqr + 3pq^3r}{4ppq - 4pqq + q^3}}$$

Eodem modo, quoniam HC inventa est  $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$ , loco  $y$  scribatur  $\frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$ , &  $\frac{49p^4 - 56qp^3 + 16ppqq}{36pp - 36pq + 9qq}$  loco  $yy$ .

$$\text{eritque HC } \sqrt{\frac{49p^4r + 98p^3qr - 61ppqqr + 12pq^3r}{36ppq - 36pqq + 9q^3}}$$

Similiter, quoniam DK inventa est  $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$ , loco  $z$  ponatur  $\frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$ , &  $\frac{169p^4 - 104p^3q + 16ppqq}{324pp - 324pq + 81qq}$  loco  $zz$ ,

$$\text{fietque DK } \sqrt{\frac{169p^4r + 338p^3qr - 205ppqqr + 36pq^3r}{324ppq - 324pqq + 81q^3}}$$

Quibus inventis, facile est invenire rationem ipsius PA ad AQ. Cum enim 3 DK æquetur BM + HC, ut supra dictum est: hinc inventos terminos ad eandem denominationem reduco, utpote ipsius HC, multiplicando tam numeratorem, quam denominatorem ipsius BM per  $\sqrt{9}$ , & denominatorem ipsius DK dividendo per 3, fietque omisso communi denominatore, pro BM  $\sqrt{144p^4r + 288p^3qr - 171ppqqr + 27pq^3r}$ ,  
pro





Quod sanè fieri non potest, quandoquidem umbræ baculi A utrinque non sunt æquales. Hinc, cum  $pn$ , hoc est,  $\frac{143}{768} qq$ , fit  $\infty - pp + pq$ , seu  $pp \infty qp - \frac{143}{768} qq$ , cujus radix est  $p \infty \frac{1}{2} q -$

$$H \frac{7q}{16\sqrt{3}}, \text{ nec non } p \infty \frac{1}{2} q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}: \text{ fiet pro } PA \frac{1}{2} q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}, \& \frac{1}{2} q + \\ I \frac{7q}{16\sqrt{3}} \text{ pro } AQ. \text{ Unde porro innotescit } PA \text{ esse ad } AQ, \text{ sicut } \\ \sqrt{3} - \frac{7}{8} \text{ ad } \sqrt{3} + \frac{7}{8}.$$

*Quo pacto  
cognoscatur  
primam ob-  
servatio-  
nem matu-  
tino tempo-  
re non fuisse  
factam.*

Jam si in Ellipsi primam observationem matutino tempore ponamus factam esse, & PQ, ut ante, lineam meridianam designare, atque baculi A umbram, motum Solis insequentem, à P per F transiisse usque ad Q (quo tempore Sol humillimus existens mediam noctem efficit): erit B ex eadem parte sumendum qua punctum C, non autem qua punctum F. Quo posito, si per modum præcedentem quæratur æquatio, fiet  $ppnn \infty \frac{67qq}{160} pn - \frac{143q^4}{3200}$ : in qua numerus absolutus major est quadrato semissis numeri radicum. Unde, cum nulla sit linea, quæ Aequationis hujus radix esse possit: liquet, primam observationem matutino tempore non contigisse, sed ante mediam noctem. Sicut initio fuit suppositum.

*Quæ ratio-  
ne innot-  
escat um-  
bram non  
descripsisse  
Hyperbo-  
lam, aut  
Parabolam.*

*Quomodo  
inveniat  
latus re-  
ctum per  
Ellipsin.*

Deinde, si ponatur, umbram baculi A descripsisse Hyperbolam, invenietur æquatio  $ppnn \infty - \frac{335qq}{768} pn - \frac{143q^4}{3072}$ . Quæ cum nullam admittat radicem, quæ proposito convenire possit, indicio est, umbram non descripsisse Hyperbolam. Eodem modo ostenditur ipsam non descripsisse Parabolam.

Postea ad inveniendum  $r$ , latus rectum Ellipseos, quæratur AM, ut sequitur. Quoniam subducendo MQ ex AQ, hoc est,  $\frac{4pp-3pq}{2p-q}$  ex  $p$ , relinquitur  $\frac{-2pp+2pq}{2p-q}$ , pro AM: hinc si loco  $p$  substituatur  $\frac{1}{2} q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ , ante inventum, &  $\frac{1}{2} qq + \frac{7qq}{16\sqrt{3}} + \frac{49qq}{768}$  loco  $pp$ ; fiet  $\frac{143q}{112\sqrt{3}}$  pro AM. Porro, posito baculo  $A \infty 6 \infty c$ , erit  $AB \infty 33 \infty \frac{11c}{2}$ . (est enim ut 6 ad 33, seu 2 ad 11, sic  $c$  ad  $\frac{11c}{2}$ ). à cujus quadrato  $\frac{121cc}{4}$  si auferatur

# ADDITAMENTUM. 379

$\frac{143, 143, 99}{112, 112, 3}$ , quadratum ex AM; relinquetur  $\frac{121cc}{4} - \frac{143, 143, 99}{112, 112, 3}$ ,  
pro quadrato ex BM. Subductâ autem AM  $\frac{143q}{112\sqrt{3}}$  ex AQ  
 $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ , remanet  $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$  pro MQ seu x. Jam cum  
quadratum ex BM, primò inventum, sit  $rx - \frac{rxx}{q}$ , subrogato  
 $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$  in locum x, &  $\frac{1}{4}qq - \frac{47qq}{56\sqrt{3}} + \frac{47, 47, 99}{56, 56, 3}$  in locum xx; R  
habebitur  $\frac{143qr}{56, 56, 3}$ , pro quadrato ex BM. Ac proinde, cum paulò  
ante pro quadrato ex BM inventum quoque sit  $\frac{121cc}{4} - \frac{143, 143, 99}{112, 112, 3}$ ;  
erit  $\frac{143qr}{56, 56, 3} \propto \frac{121cc}{4} - \frac{143, 143, 99}{112, 112, 3}$ . Quæ æquatio si reducatur,  
proveniet  $r \propto \frac{11, 14, 56, 3cc}{13q} - \frac{143q}{4}$ .

Præterea, ad investigandum latus rectum r in aliis terminis, *Quando*  
addatur quadratum ex AS,  $qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$ , ad *latus re-*  
quadratum ex AR, cc; & habebitur  $cc + qqvv - 2fvvqq$  *ctum inve-*  
 $+ ffvvqq$ , pro quadrato ex RS: adeoque *niatur per*  
 $\sqrt{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}$ , pro RS. quæ brevitatis *Conum.*  
causâ nominetur n. Deinde, quoniam, propter similitudinem  
triangulorum ARS, TSV, & PYS, RS seu n est ad AR seu c,  
sicut SV seu fvq ad TV, & PS seu  $\frac{1}{2}q - fvq$  ad PY; invenietur  
 $\frac{fvqc}{n}$  pro TV, &  $\frac{\frac{1}{2}qc - fvqc}{n}$ , pro PY, quæ additæ efficiunt  
 $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$ , pro TX. Rursus, quia, propter eandem triangulorum si- L  
militudinem, RS, seu n, est ad AS seu qv - fvq, sicut SV  
seu fvq ad ST, & PS seu  $\frac{1}{2}q - fvq$  ad SY; fiet pro ST  
 $\frac{qqvv - ffvvqq}{n}$ , &  $\frac{\frac{1}{2}qqv - fvqq - \frac{1}{2}fvqq + ffvvqq}{n}$ , pro  
SY. quæ ab RS  $\frac{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}{n}$  subducta, re-  
linquit  $\frac{cc + qqvv - fvqq + \frac{1}{2}fvqq - \frac{1}{2}qqv}{n}$ , pro RY. Ad-  
ditis autem RS & ST, habebitur  $\frac{cc + qqvv - fvqq}{n}$  pro RT.  
Bbb 2 Jam





ADDITAMENTUM. 381

4fvrq. Ex qua æquatione quæro f, hoc modo: pro  $\frac{11, 14, 56, 3}{13}$

scribatur brevitatis causâ d, eritque  $\frac{d c c}{q} - \frac{143 q}{4} \propto q - 4fvrq$ .

Rursus pro  $\frac{143}{4}$  scribatur h, & erit  $\frac{d c c}{q} - h q \propto q - 4fvrq$ , hoc

est, subrogato fvrqq - qqvv +  $\frac{1}{2} q q$  -  $\frac{1}{2} q q$  in locum cc, habebitur

dfvrq - dvrq +  $\frac{1}{2} d q$  -  $\frac{1}{2} d q$  - hq ∝ q - 4fvrq. Unde, dividendo utrinque per q, & multiplicando per f, inveniatur,

quantitatibus in ff ductis ad unam partem translatis, dvrff + 4vrff ∝ f + hf +  $\frac{1}{2} d f$  + dvrff -  $\frac{1}{2} d$ : adeoque si restituantur

valores quantitatum d & h, atque in locum v substituatur  $\frac{7}{16 \sqrt{3}}$ ,

$\frac{317569}{2496} f f \propto \frac{137543}{208} f - \frac{6468}{13}$ , vel  $f f \propto \frac{33684}{6481} f - \frac{25344}{6481}$ , M

cujus æquationis radix est  $f \propto \frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$  seu N

$\frac{16842 - 390 \sqrt{785}}{6481}$ .

Deinde, ex iisdem terminis quæro q, ut sequitur. Resumptâ *Quâ ratione ex iisdem terminis ipsius v inveniatur q.*

æquatione  $\frac{25872 c c}{13 q} - \frac{143 q}{4} \propto q - 4fvrq$ , loco cc reponatur valor ejus datus 36, & ubique multiplicetur per q, fietque

$\frac{25872, 36}{13} - \frac{143 q q}{4} \propto q q - 4fvrq q$ , vel  $\frac{25872, 36}{13} \propto q q +$

$\frac{143 q q}{4} - 4fvrq q$ , adeoque  $q q \propto \frac{25872, 36}{13} - \frac{143}{4} q q$ . Quoniam

autem inventa est f & v, hinc in locum  $-4fvr$  substituatur

$-4, 7, 7, \frac{16842}{16, 16, 3, 6481} + 4, 7, 7, \frac{390 \sqrt{785}}{16, 16, 3, 6481}$ ,

seu  $\frac{196, 16842 + 76440 \sqrt{785}}{768, 6481}$ ,

Bb 3 seu



feu  $\frac{-24, 137543 + 24, 3185 \sqrt{785}}{24, 32, 6481}$ , hoc est,

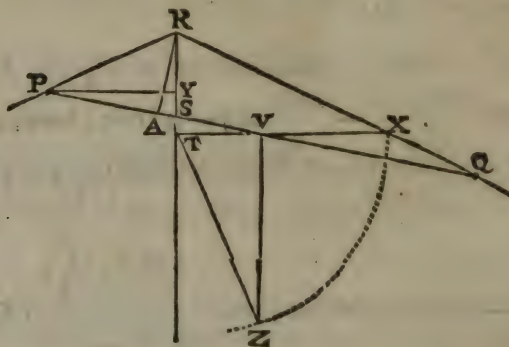
$\frac{-137543 + 3185 \sqrt{785}}{32, 6481}$ ; eritque  $qq \infty \frac{25872, 36}{13}$   
 $\frac{7484113 + 3185 \sqrt{785}}{32, 6481}$ ,

feu  $qq \infty \frac{25872, 36}{13}$ , hoc est,  
 $\frac{49, 13 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}{32, 6481}$ ,

$\frac{25872, 36, 32, 6481}{13, 13, 49 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}$ , feu  $\frac{528, 49, 36, 32, 6481}{169, 49 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}$ ,

hoc est,  $\frac{11, 48, 36, 32, 6481}{169 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}$ . Hinc posito  $cc \infty 1$ , erit

$qq \infty \frac{11, 48, 32, 6481}{169 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}}$ ; at verò existente



$cc \infty 169 \text{ in } 11749 + 5 \sqrt{785}$ , erit  $qq \infty 11, 48, 32, 6481$ , adeo-  
 que  $qq \infty \sqrt{11, 48, 32, 6481}$ , &  $qv \infty \frac{\sqrt{49, 11, 48, 32, 6481}}{16, 16, 3}$ ,  
 feu

# ADDITAMENTUM.

383

seu  $\sqrt[4]{49, 11, 48, 32, 6481}$ , hoc est,  $\sqrt[4]{49, 11, 32, 6481}$ ,  
 $\frac{16, 48}{16}$

seu  $\infty \sqrt[4]{49, 22, 6481}$ .

Jam, ut inveniatur ratio AS ad AR, quoniam  $1 - f$  multi- *Ita ratio*  
 plicata per  $qv$  producit  $qv - fvq$ , atque  $f$  est *AS ad AR.*

$\frac{16842 - 390 \sqrt[4]{785}}{6481}$ : ideo, si  $1 - f \infty \frac{390 \sqrt[4]{785} - 10361}{6481}$

multiplicetur per  $qv \infty \sqrt[4]{49, 22, 6481}$ , exsurget  $qv - fvq \infty$

$\sqrt[4]{49, 22, 6481}$  in  $\frac{390 \sqrt[4]{785} - 10361}{6481}$ , pro AS; seu AS  $\infty$

$7 \sqrt[4]{22, 6481}$  in  $\frac{13, 30 \sqrt[4]{785} - 14, 797}{\sqrt[4]{6481, 6481}}$ , hoc est, .

$\frac{7, 13 \sqrt[4]{22} \text{ in } 30 \sqrt[4]{785} - 797}{\sqrt[4]{6481}}$ ; & AR  $\infty 13$  in  $\sqrt[4]{11749 + 5 \sqrt[4]{785}}$ .

Quibus per 13 divisus, erit AS  $\infty \frac{7 \sqrt[4]{22} \text{ in } 30 \sqrt[4]{785} - 797}{\sqrt[4]{6481}}$ ,

& AR  $\infty \sqrt[4]{11749 + 5 \sqrt[4]{785}}$ , aut, si ponatur AS  $\infty 7 \sqrt[4]{22}$ , erit

AR  $\frac{\sqrt[4]{6481} \text{ in } \sqrt[4]{11749 + 5 \sqrt[4]{785}}}{30 \sqrt[4]{785} - 797}$ : multiplicatoque hujus tum

numeratore tum denominatore per denominatoris residuum,

proveniet AR  $\infty \frac{\sqrt[4]{6481} \text{ in } \sqrt[4]{11749 + 5 \sqrt[4]{785}} \text{ in } 797 + 30 \sqrt[4]{785}}{11, 6481 \text{ vel } 11, \sqrt[4]{6481}, \sqrt[4]{6481}}$ ,

hoc est, AR  $\infty \frac{\sqrt[4]{11749 + 5 \sqrt[4]{785}} \text{ in } 797 + 30 \sqrt[4]{785}}{11 \sqrt[4]{6481}}$ ;

seu  $\sqrt[4]{\frac{15951432541 + 568545725 \sqrt[4]{785}}{121, 6481}}$ , seu

$\sqrt[4]{20341 + 725 \sqrt[4]{785}}$ . Ac proinde si AS  $\infty 7 \sqrt[4]{22}$  sumatur

pro radio, erit AR  $\infty \sqrt[4]{20341 + 725 \sqrt[4]{785}}$ , tangens anguli

ASR sive elevationis Poli, videlicet 80 grad. 45 min. circiter.

Denique ad investigandam rationem TX ad TR, vel PY ad

YR; cum TX supra inventa sit  $\frac{1}{n}$ , & TR  $\infty \frac{cc + qqvv - fvqq}{n}$ ;

hinc



hinc ut inveniatur ratio horum terminorum, (quoniam supposita

AR seu  $c \propto 1$ , qq est  $\frac{11, 48, 32, 6481}{169 \text{ in } 11749 + 5\sqrt{785}}$ , vel, numeratore  
atque denominatore per  $11749 - 5\sqrt{785}$  multiplicato,

qq  $\propto \frac{11, 48, 32, 6481 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 138019376}$ , seu

$\frac{48, 2, 176, 6481 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 121, 176, 6481}$ , hoc est,  $\frac{48, 2 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 121}$ ,

& qq  $\propto \sqrt{\frac{48, 2 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 121}}$ , & vv est  $\frac{49}{256, 3}$ , adeoque qqvv

$\propto \frac{48, 2, 49 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 121, 256, 3}$ , seu  $\frac{96, 49 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 121, 96, 8}$ , hoc est,

$\frac{49 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 121, 8}$  neglecto communi denominatore n, mul-

tiplicetur 1 — f per qqvv, & fit qqvv — fvvqq  $\propto$

$\frac{390\sqrt{785} - 10361 \text{ in } 49 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{6481 \quad 169, 121, 8}$ , seu

$\frac{-6517, 11, 6481 + 49, 5, 11, 6481\sqrt{785}}{13, 11, 11, 8, 6481}$ , hoc est,  $\frac{-6517 + 49, 5\sqrt{785}}{13, 11, 8}$ .

Cui si addatur  $c \propto 1$ , fiet  $cc + qqvv - fvvqq \propto$

$\frac{-5373 + 49, 5\sqrt{785}}{13, 11, 8}$ , pro TR. Eodem modo multiplicato

q  $\propto \sqrt{\frac{48, 2 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 121}}$ , per  $\frac{1}{2}c$ , seu  $\frac{1}{2}$  (quandoquidem c est 1):

habebitur  $\frac{1}{2}cq \propto \sqrt{\frac{24 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}{169, 121}}$ , pro TX. Inventæ igitur

TX & TR si reducantur ad eandem denominationem, ac

deinde denominator communis omittatur, obtinebitur TX  $\propto$

$\sqrt{64, 24 \text{ in } 11749 - 5\sqrt{785}}$ , & TR  $\propto 49, 5\sqrt{785} - 5373$ , sive

TX  $\propto \sqrt{18046464 - 4630118400}$ , & TR  $\propto \sqrt{47119625 - 5373}$ .

Quarum si TX vel PY sumatur pro radio, erit TR vel YR tangens anguli TXR vel YPR, grad. 19, & 27 min. circiter, distantie loci Solis in Ecliptica ab Equatore.

Cum autem in exposita hujus Problematis solutione nonnulla  
occurrant, quæ illustrationem aliquam requirere videntur, atque  
minus

minùs exercitatis scrupulum injicere possent; placuit ea, quæ ad eorum explicationem Vir Clarissimus D. Erasmus Bartholinus, Casp. Fil. Medicinæ ac Mathematicum in Academia Hafniensi Professor Regius concinnavit, paucis hîc adjicere.

*Ita ut GA ad AD sit, ut 9 ad 4.*] Ostensum enim est Theo-  
remate præcedenti CA esse ad AF, hoc est, baculum C ad bacu-  
lum A, sicut CB ad AG. Unde cum baculus A ad baculum B sit,  
sicut DA ad CB: erit quoque ex æqualitate in proportione per-  
turbata, ut C baculus ad B baculum, hoc est, ut 8 ad 18, seu 4 ad 9,  
ita DA ad AG; & convertendo GA ad AD, ut 9 ad 4.

*AV ∞ qu, SV ∞ fu q.*] Puta hîc unitatem subintelligi, quæ  
sit a; ita ut a seu 1 sit ad q, sicut u ad qu; & rursus a seu 1 ad qu,  
sicut f ad fu q.

*Ac proinde BM + HC ∞ 3 DK.*] Nam cum, propter si-  
militudinem triangulorum α BM & α CH, α B sit ad BM, sicut  
α G ad CH, & permutando α B ad α C, sicut BM ad CH, com-  
ponendoque BC ad α C, sicut BM + CH ad CH: & propter  
similia triangula C α H & D α K, α C ad CH, sicut AD ad DK,  
permutandoque α C ad AD, sicut CH ad DK; erit ex æquo, ut  
BC ad AD, sic BM + CH ad DK. Unde cum BC ipsius AD  
tripla sit, erit quoque BM + HC ipsius DK tripla.

*E quibus porro invenitur PA ad A Q esse, ut  $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$*   
ad  $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ , hoc est, ut  $\sqrt{3} - \frac{7}{16}$  ad  $\sqrt{3} + \frac{7}{16}$ .] Quemadmo-  
dum postea perspicuum fiet.

*Tertia videlicet parti ipsius BM.*] Nimirum, propter simi-  
litudinem triangulorum ABM & AEN, ubi AB est ad BM,  
sicut AE ad EN, & permutando AB ad AE, sicut BM ad NE.  
Unde cum AB ad AE (ut supra) sit, sicut 3 ad 1: erit quoque  
BM ipsius NE tripla.

*Et hî rursus divisi per  $-p + q$ , &c.*] Ubi notandum, si  
BM  $\sqrt{-144p^3 + 288ppq - 171pqq + 27q^3}$ , HC  
 $\sqrt{-49p^3 + 98ppq - 61pqq + 12q^3}$ , & tripla DK  
 $\sqrt{-169p^3 + 338ppq - 205pqq + 36q^3}$  dividantur per  
 $-p + q$ , oriri pro BM  $\sqrt{+144pp - 144pq + 27qq}$ , pro  
Ccc HC



HC  $\sqrt{+49pp-49pq+12qq}$ , & pro tripla DK

$\sqrt{+169pp-169pq+36qq}$ ; non autem

$\sqrt{-144pp+144pq-27qq}$ ,  $\sqrt{-49pp+49pq-12qq}$ ,

&  $\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$ , ut habet Auctor. Ratio autem cur ita signa immutaverit, est, quod signa negata prævaleant signis affirmatis. quod sic ostendi potest.

Etenim cum  $2p$  major sit quàm  $q$  — — —  $2p$  major quàm  $q$   
 & utrinque multiplicetur per  $72q$  — — —  $72q$  utraq; in se  $2p$  — — —  $q$   
 erit quoque  $144pq$  — major quàm —  $72qq$ , & fiet  $4pp$  major quàm  $qq$ :  
 unde si auferatur \*  $144pp$  — major quàm —  $36qq$  adeoq; mul-  
 tiplicando u-  
 relinquetur  $144pq$  —  $144pp$  major quàm  $36qq$ : trinke per  $36$  — — —  $36$   
 adeoque addendo utrinque  $144pp$  — — — —  $144pp$  \* erit  $144pp$  major quam  $36qq$   
 erit quoque  $144pq$  major quàm  $144pp+36qq$ .

Ac proinde  $144pq$  multò major quàm  $144pp+27qq$ . Et sic de reliquis. Ubi notandum, si loco divisoris superioris  $-p+q$  sumatur divisor  $+p-q$ , eosdem terminos inveniri, iisdemque signis affectos, quemadmodum ab Auctore sunt propositi.

G *Vbi porrò si supponatur  $-p+q \propto n$ , habebitur*

$\sqrt{+144pn-27qq}$  pro BM.] Etenim existente  $-p+q \propto n$ , si utrobique multiplicetur per  $+144p$ , fiet  $-144pp+144pq \propto +144pn$ : adeoque  $-144pp+144pq-27qq \propto +144pn-27qq$ , ac proinde

$\sqrt{-144pp+144pq-27qq} \propto \sqrt{+144pn-27qq}$ . Et sic de reliquis.

H *Fiet pro PA  $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ , &  $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$  pro AQ.]*

*Vide pag. 165 vel 284.* Quoniam enim æquatio  $pp \propto qp - \frac{143}{768}qq$ , duas admittit veras radices, quarum summa est  $q$ , referens quantitatem cognitam secundi termini  $qp$ , atque designans lineam PQ: sit, ut si una  $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$  sumatur pro linea AQ, pro quâ supposita fuit  $p$ , altera  $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$  sumenda sit pro linea PA.

I *Vnde porrò innotescit PA esse ad AQ, sicut  $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$  ad  $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$ .] Quod sic liquet,*

AP

AP

AQ

Multiplicetur  $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$  ad  $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ .  
utrinque per 2, & fit  $q - \frac{7q}{8\sqrt{3}}$  ad  $q + \frac{7q}{8\sqrt{3}}$ :  
tum rursus

per  $\sqrt{3}$ , & fit  $q\sqrt{3} - \frac{7q}{8}$  ad  $q\sqrt{3} + \frac{7q}{8}$ .

Denique dividatur

utrobique per  $q$ , fietque  $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$  ad  $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$ .

Subrogato  $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$  in locum  $x$ , &  $\frac{1}{2}q + \frac{47q}{56\sqrt{3}}$  in locum  $x$ , habebitur  $\frac{143qr}{56,56,3}$ , pro quadrato ex  $BM$ .] Id quod hoc pacto fieri potest.

Ex  $rx \propto \frac{1}{2}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}}$   
subtrahatur  $\frac{rx}{q} \propto \frac{1}{2}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qr}{56,56,3}$ :  
& remanebit  $rx - \frac{rx}{q} \propto \frac{1}{2}qr - \frac{47,47,qr}{56,56,3}$ , vel  $\frac{142qr}{56,56,3}$ .  
Nimirum si reducatur  $\frac{1}{2}qr$  ad denominatorem ipsius  $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$ .  
utpote faciendo ut 4 ad 56, sic 1 ad 14, eritque  $\frac{1}{2}qr \propto \frac{14qr}{56}$ .  
& deinde multiplicando tam numeratorem quàm denominatorem hujus fractionis per 56, 3, fiet  $\frac{56,3,14qr}{56,56,3}$ , vel  $\frac{252qr}{56,56,3}$ :  
à quo subducto  $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$  seu  $\frac{2209qr}{56,56,3}$ , relinquetur  $\frac{143qr}{56,56,3}$ .

Quæ addita efficiunt  $\frac{1}{n}q$ , pro  $TX$ .] Est enim  $PY$  æqua-

lis  $VX$ . Quod facile demonstrari potest. Cum enim Sol quotidianâ suâ conversione circa mundi axem rectos Conos efficiat: fit, ut  $PY$ , si producta concipiatur, donec ipsi  $RQ$  occurrat, ab axe  $RT$  in puncto  $Y$  bifariam atque ad angulos rectos secetur, triangulumque efficiat, quod triangulo  $VXQ$  sit simile ac similiter positum. cujus latus  $PQ$  duplum existens lateris  $VQ$  trianguli  $VXQ$  (propter punctum  $V$ , quod centrum refert Ellipsis, cujus transversa diameter est  $PQ$ , &  $ZV$  semissis secundæ dia-

Ccc 2

metri)



metri) facit ut etiam linea P Y producta ipsius V X dupla sit futura, adeoque P Y æqualis V X.

M *Atque in locum v substituitur*  $\frac{7}{16\sqrt{3}}$ .] Convincitur autem esse  $\frac{7}{16\sqrt{3}}$ : est enim A Q supra inventa  $\propto \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ , & P A  $\propto \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ . Unde cum P Q sit  $\propto q$ , & V punctum medium ipsius P Q, adeoque P V vel V Q  $\propto \frac{1}{2}q$ ; erit A V  $\propto \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ . Hinc cum A V supposita sit  $\propto vq$ , erit  $vq \propto \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ , ac proinde  $v \propto \frac{7}{16\sqrt{3}}$ .

N *Cujus æquationis radix f est*  $\frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$ .

*seu*  $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$ .] Notandum hic, æquationem

$ff \propto \frac{33684}{6481}f - \frac{25344}{6481}$  aliam adhuc admittere radicem, nempe  $f \propto \frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$ , juxta ea, quæ habentur pag. 7.

Quam quidem radicem, cum major sit quam  $v \propto \frac{7}{16\sqrt{3}}$ , cujus non nisi partem designare debet, Author merito neglexit. Esse autem  $\frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$  quam  $\frac{7}{16\sqrt{3}}$  majorem, patet, si reducantur ad eandem denominationem, utpote ponendo  $\frac{16842, 7 + 390, 7\sqrt{785}}{6481, 16, \sqrt{3}}$ , &  $\frac{6481, 7}{6481, 16\sqrt{3}}$ .

O *Ac proinde si* A S  $\propto 7\sqrt{22}$  *sumatur pro radio, erit* A R  $\propto \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$ , *tangens anguli* A S R *sive elevationis Poli, videlicet* 80 grad. 45 min. *circiter.*] Est enim  $7\sqrt{22}$  in rationalibus  $\propto 32, 8' 3'' 1'''$ , circiter, &  $\sqrt{20341 + 725\sqrt{785}} \propto 201, 6' 2'' 8'''$ , circiter. Unde si fiat ut A S 32, 8' 3'' 1''' ad radium 100000, ita A R 201, 6' 2'' 8''' ad quartum 614105: erit 614105 tangens anguli A S R. proximè respondens tangenti grad. 80, & 45 min.

*Qua-*

Quarum si TX vel PY sumatur pro radio, erit TR vel YR tangens anguli TXR vel YPR, grad. 19, & 27 min. circiter, distantia loci Solis in Ecliptica ab Aequatore.] Cum enim pro TX inventa sit  $\sqrt{18046464} - \sqrt{46301184000}$ , quæ in rationalibus fere est 4222, 7' 1" 1", & pro TR  $\sqrt{47119624} - 5373$ , quæ in rationalibus est 1491, 3' 7" 4" circiter: hinc, si fiat ut TX 4222, 7' 1" 1" ad radium 100000, ita TR 1491, 3' 7" 4" ad quartum 35318; erit 35318 tangens anguli TXR vel YPR, congruens quàm proximè tangenti grad. 19, & 27 min.

Et tantum de solutione Problematis, quod in specimen huius Methodi afferre visum fuit: quæ cum talis sit, ut ad Arithmeticæ quæstiones enodandas, non minùs quàm ad Geometricæ Problemata resolvenda atque construenda deserviat, non abs re fuerit, si Coronidis loco hîc subijciam regulam quandam generalem, ex eadem Methodo depromptam, extrahendi radices quaslibet ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus, quæ unâ cum præcedenti solutione tunc temporis prodit; præsertim cum illa à nemine (quod sciam) antea sit inventa, nec ab aliquo ea in re cuiquam satisfactum, cujus demonstrationem, qualis à me inventa est, breviter sum subijuncturus.

*Regula generalis extrahendi quaslibet radices ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus.*

P R Æ P A R A T I O.

PRimo, si in dato Binomio reperiantur fractiones, oportet illas, multiplicando binomium per illarum denominatorem, eximere. Ut, exempli gratiâ, ad extrahendam  $\sqrt{3}$  ex  $\sqrt{242 + 12\frac{1}{2}}$ , multiplico binomium per 2, & fit  $\sqrt{968 + 25}$ . Similiter si sit  $\sqrt{\frac{242}{5} + \frac{125}{4}}$ , primum multiplico binomium per

Ccc 3 √ 5,



$\sqrt{5}$ , & fit  $\sqrt{242 + \frac{23}{2}}$ , deinde per 2, ut jam factum est, & sic de cæteris.

Deinde, si neutra pars binomii rationalis fuerit, reducendum est per multiplicationem aut divisionem ad aliud binomium, cuius altera pars sit rationalis. Id quod per multiplicationem alterutrius partis semper fieri potest; sed brevius plerumque per minoris numeri multiplicationem aut divisionem. Quemadmodum  $\sqrt{242} + \sqrt{243}$  multiplicari quidem potest per  $\sqrt{242}$ , & fit  $242 + \sqrt{58806}$ ; sed compendiosius per  $\sqrt{2}$ , & provenit  $22 + \sqrt{486}$ . Eodem modo  $\sqrt{3993} + \sqrt{17578125}$  potest bis multiplicari per  $\sqrt{3993}$ , & producitur aliud binomium, cuius absolutus numerus est 3993; sed brevius per  $\sqrt{39}$ ; & adhuc brevius, si dividatur per  $\sqrt{3}$ , fietque  $11 + \sqrt{125}$ .

Ubi notandum, postquam habetur binomium, cuius una pars est rationalis, tunc quoque quadratum alterius partis rationale esse debere; aut nullam ex eo radicem, nec etiam ex alio binomio, utramque partem irrationalem habente, à quo per multiplicationem aut divisionem deductum est, extrahi posse.

Tertiò, ad extrahendam  $\sqrt{6}$ , oportet primò radicem quadratam extrahere, & deinde ex hac  $\sqrt{3}$ . Et ad extrahendam  $\sqrt{9}$  oportet bis extrahere  $\sqrt{3}$ . Et sic de reliquis radicibus, quæ per numeros compositos, hoc est, qui per alios dividi possunt, designantur. Radicem verò quadratam quod attinet, regula ad illam extrahendam satis nota est: quapropter hîc tantum opus est, ut doceam, quo pacto extrahendæ sint  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{11}$ , & similes aliæ, quæ per numeros primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, denotantur.

Postremò ad extrahendam  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ , aut similem, per numerum primum designatam, explorandum primò est, utrum radix Binomium esse possit, cuius una pars sit rationalis. Id quod innotescit subducendo quadrata partium à se invicem, & ex reliquo extrahendo radicem, nempe cubicam si ex dato binomio  $\sqrt{3}$  sit extrahenda; aut surdesolidam, si  $\sqrt{5}$  sit extrahenda, & sic de cæteris. Quod ita in posterum, ubi radix aliqua extrahi debet, intelligendum est, licet expressè non dicatur. Etenim si radix hæc numerus rationalis non fuerit, certò constat, radicem quæsitam parte rationali carere. Sed cum binomium adhuc esse possit,

fit, cujus utraque pars sit irrationalis: hinc ad eam extrahendam datum binomium per differentiam quadratorum partium erit multiplicandum, si de radice cubica extrahenda quaestio fuerit; aut per quadratum hujus differentiae, si de  $\sqrt{3}$ ; aut per ejusdem cubum, si de  $\sqrt{2}$ ; aut per ipsius surdesolidum, si de  $\sqrt{11}$  quaeratur, atque ita de ceteris. Quâ ratione aliud semper binomium habebitur, in quo radix differentiae quadratorum partium erit differentia quadratorum partium prioris binomii. Ut ad extrahendam radicem cubicam ex  $25 + \sqrt{968}$ , subduco primum 625, quadratum ex 25, à 968, & remanent 343, cujus numeri radix cubica est 7, numerus nimirum rationalis. Id quod arguit, radicem, modò ex dato binomio extrahi possit, fore binomiam, cujus una pars futura sit rationalis. Similiter ad extrahendam  $\sqrt{3}$  ex  $22 + \sqrt{486}$ , oportet 484, quadratum à 22, subducere ex 486, & ex reliquo 2 elicere radicem cubicam. Quoniam verò id fieri non potest, constat radicem cubicam ex  $22 + \sqrt{486}$  parte rationali carere: ac propterea  $22 + \sqrt{486}$  per 2 multiplicandam esse, ut habeatur binomium  $44 + \sqrt{1944}$ , in quo radix differentiae quadratorum partium est 2. Sic ad extrahendam radicem sursolidam ex  $11 + \sqrt{125}$ , quoniam subductis 121 à 125, remanent 4, qui numerus surdesolidus non est: hinc  $11 + \sqrt{125}$  multiplicari debet per 16, quadratum ex 4, ut proveniat  $176 + \sqrt{32000}$ . In quo radix sursolidi differentiae quadratorum partium est 4. Denique ad extrahendam  $\sqrt{2}$  ex  $338 + \sqrt{114242}$ , in quo differentia quadratorum partium est 2, quoniam hic numerus B-surdesolidus non est: ideo datum binomium multiplicari debet per 8, hoc est, per cubum ex 2, & fit  $2704 + \sqrt{7311488}$ , in quo  $\sqrt{2}$  differentiae quadratorum partium est 2.

R E G V L A.

Per præcedentem præparationem semper invenitur binomium, cujus una pars, & alterius partis quadratum, nec non radix differentiae quadratorum partium, sunt numeri rationales integri; ex quo  $\sqrt{3}$ , aut  $\sqrt{2}$ , aut  $\sqrt{7}$ , &c. extrahi debet.

In quem finem inveniendus est numerus rationalis, radice quaesitâ paulò major; ita ut differentia non major sit quàm  $\frac{1}{2}$ . Quod facile per vulgarem Arithmeticam fieri potest.

Jam



Jam si pars rationalis dati binomii reliquâ parte major fuerit, oportet huic radici rationali addere radicem differentiae quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque semissis maximi integri numeri, in aggregato contenti, pars rationalis radice quæsita. A cujus partis quadrato si auferatur radix differentiae quadratorum partium, habebitur reliquæ partis quadratum; dummodo radix ex dato binomio extrahi possit. Id quod facillè per multiplicationem hujus inventæ radice experiri licet, quæ datum binomium, si aliqua ex eo extrahi possit, producere debet.

Verum, si dati binomii pars rationalis reliquâ parte minor fuerit, oportet à radice rationali, quam ex toto binomio extraximus, subducere radicem differentiae quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque media pars maximi integri numeri in reliquo contenti, pars rationalis, radice quæsita. Ad cujus partis quadratum si addatur radix differentiae quadratorum partium, habebitur quadratum reliquæ partis; modo radix fuerit binomium. Quod ex multiplicatione (ut supra) manifestum fiet.

Exempli causâ, ad extrahendam radicem cubicam ex  $25 + \sqrt{968}$ , cognito jam radicem cubicam differentiae quadratorum partium esse 7, extraho radicem quadratam ex  $\sqrt{968}$ , quæ est major quàm 31, at minor quàm 32; deinde ad 25, numerum absolutum, addo 31 aut 32, & fit summa 56 aut 57. Ex qua radicem cubicam extraho, quæ quidem minor est quàm 4, at major quàm  $3\frac{1}{2}$ ; ita ut 4 sit numerus quæsitus rationalis, verâ radice paulò major. Postea ex 4 subtraho  $\frac{7}{4}$  (hoc est, 7, radicem cubicam differentiae quadratorum partium, postquam per radicem inventam 4 est divisa), & remanent  $2\frac{1}{4}$ . Subtraho autem, quoniam numerus absolutus 25 minor est quàm  $\sqrt{968}$ ; si enim esset major addenda fuisset. Maximus verò integer numerus in  $2\frac{1}{4}$  contentus, est 2, cujus semissis est 1, pars rationalis, radice. Cujus quadrato 1, addo 7,  $\sqrt{3}$  nempe differentiae quadratorum partium, & fit summa 8, quadratum alterius partis. Ita ut  $1 + \sqrt{8}$  sit  $\sqrt{3}$  ex  $25 + \sqrt{968}$ , nimirum si  $\sqrt{3}$  ex eo extrahi possit. Quod ut cognoscatur, oportet per multiplicationem investigare cubum ex  $1 + \sqrt{8}$ ; aut si brevitati consulamus, tantum ejus partem rationalem: quod fit addendo 1, cubum partis rationalis radice, ad triplum ejus-

eiusdem partis 1, multiplicata per 8, quadratum alterius partis. Quod quia cum 25 parte rationali dati binomii convenit, constat,  $1 + \sqrt{8}$  esse veram radicem: si verò non conveniret, radicem extrahi non posse, liquidò constaret.

Eodem modo ad extrahendam  $\sqrt[3]{8}$  ex  $44 + \sqrt{1944}$ : radix cubica differentiae quadratorum partium est 2, & radix quadrata ex 1944 major quàm 44, at minor quàm 45. Quam addo numero absoluto 44, & fit summa 88 aut 89, cuius  $\sqrt[3]{8}$  major est quàm 4, & minor quàm  $4\frac{1}{2}$ . Quapropter subtractâ  $\frac{1}{2}$ , radice differentiae quadratorum partium, divisâ per radicem rationalem, ex  $4\frac{1}{2}$ , pro radice rationali assumptâ, remanent  $4\frac{1}{3}$ . Et fit 2, semissis ex 4, pars rationalis radicis. cuius quadrato 4, si addatur 2, radix differentiae, prodibit 6, quadratum reliquæ partis. Ut patet, addendo 8 ad ter 2, multiplicatum per 6, hoc est, 36; & fit summa 44, pars rationalis binomii dati; adeoque  $2 + \sqrt{6}$  radix quaesita.

Ad extrahendam  $\sqrt[3]{5}$  ex  $176 + \sqrt{32000}$ ; radix sursolidi differentiae quadratorum partium est 4; radix autem sursolidi rationalis ex dato binomio est  $3\frac{1}{2}$ , unde subductis 4, divisus per  $3\frac{1}{2}$ , hoc est,  $1\frac{1}{2}$ , remanebunt  $2 + \frac{1}{12}$ . Semissis verò ex 2 est 1, cuius quadratum 1 additum ad 4 efficit 5, & fit  $1 + \sqrt{5}$ , radix sursolidi quaesita ex  $176 + \sqrt{32000}$ ; saltem si aliqua inveniri possit. Id quod totius binomii multiplicatione indagari potest, vel brevius, addendo simul; surdesolidum partis rationalis, radicis; decuplum cubum eiusdem, multiplicatum per quadratum alterius partis; & quintuplum partis rationalis, multiplicatum per quadrato-quadratum eiusdem alterius partis. Nimirum addendo 1, 50, & 125, unde exsurgunt 176. Quod cum parti rationali dati binomii sit æquale, sequitur  $1 + \sqrt{5}$  propositi binomii esse veram radicem.

Ad extrahendam  $\sqrt[3]{7}$  ex  $2704 + \sqrt{731488}$ ; radix B-sur-solidi differentiae quadratorum partium est 2; radix autem B-sur-solidi rationalis totius binomii est  $3\frac{1}{2}$ , cui addo  $\frac{1}{2}$  (quoniam hic numerus absolutus major est), & fit summa  $4\frac{1}{4}$ : ac proinde 2 radicis pars rationalis. A cuius quadrato 4 subtraho 2, radicem B-sur-solidam differentiae quadratorum partium, & relinquetur alterius partis quadratum 2. Porro multiplico  $2 + \sqrt{2}$  B-sur-solidè, vel brevius, in unam summam colligo; 128, B-sur-solidum ex 2;

D d d

1344,



1344, vices & semel sursolidum ex 2, multiplicatum per quadratum ex  $\sqrt{2}$ ; 1120, trigesies & quinquies cubum ex 2, multiplicatum per quadrato-quadratum ex  $\sqrt{2}$ ; & 112, septies 2, multiplicatum per quadrato-cubum ex  $\sqrt{2}$ , & provenient 2704. Unde manifestum fit,  $2 + \sqrt{2}$  esse radicem quæsitam.

Caterum observandum hic est, postquam datum binomium per numerum aliquem multiplicatum aut divisum fuerit, atque ad aliud reductum, cujus radix jam sit inventa, quod, ad prioris binomii radicem obtinendam, radicem inventam dividere aut multiplicare oporteat per radicem numeri, per quem binomium multiplicatum fuit aut divisum.

Sic quoniam ad extrahendam  $\sqrt[3]{3}$  ex  $\sqrt{242} + 12\frac{1}{2}$ , ipsum per 2 multiplicavimus, & deinde hujus posterioris binomii radicem invenimus esse  $1 + \sqrt{8}$ ; dividendum erit  $1 + \sqrt{8}$  per  $\sqrt[3]{3}$  ex 2, & fiet  $\sqrt[3]{3}\frac{1}{2} + \sqrt[3]{6}$  128, radix cubica ex  $\sqrt{242} + 12\frac{1}{2}$ .

Multiplicavimus  $\sqrt{\frac{242}{5}} + \sqrt{\frac{125}{4}}$  per  $\sqrt{5}$ , & invenimus  $\sqrt{242} + 12\frac{1}{2}$ , cujus radix est  $\sqrt[3]{3}\frac{1}{2} + \sqrt[3]{6}$  128; quâ divisâ per  $\sqrt[3]{6}$  5, emerget  $\sqrt[3]{6}\frac{1}{25} + \sqrt[3]{6}\frac{128}{5}$ , pro radice ex  $\sqrt{\frac{242}{5}} + \sqrt{\frac{125}{4}}$ .

Multiplicatum est  $\sqrt{242} + \sqrt{243}$ , primò per  $\sqrt{2}$ , & deinde per 2; unde fit ut inventa radix cubica  $2 + \sqrt{6}$  dividenda sit per  $\sqrt{2}$ , & prodibit  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ , pro radice cubica quæsitâ ex  $\sqrt{242} + \sqrt{243}$ .

Divisimus  $\sqrt[3]{3993} + \sqrt[3]{17578125}$  per  $\sqrt[3]{3}$ , & multiplicavimus per 16, ad extrahendam  $\sqrt[3]{3}$ : quare necesse est inventam radicem  $1 + \sqrt{5}$  dividere per  $\sqrt[3]{3}$  16, & multiplicare per  $\sqrt[3]{15}$  3, ut habeatur vera radix sursolidâ ex dato binomio.

### SEQUITVR DEMONSTRATIO.

**I**N primis est ostendendum, quod, si binomium aliquod in se multiplicetur cubicè, proveniat semper aliud binomium, cujus partium quadrata, à se invicem subducta, relinquunt cubum differentiarum quadratorum partium radices sive primi binomii. Id quod

# ADDITAMENTUM. 395

quod manifestum fit, supponendo binomium illud designari per  $a\sqrt[3]{bc}$ , quod in se multiplicatum quadratè producit binomium  $aa+bc\sqrt[3]{2a\sqrt[3]{bc}}$ , & hoc rursus per  $a\sqrt[3]{bc}$ , producit binomium  $a^3+3abc\sqrt[3]{2a+bc\sqrt[3]{bc}}$ ; utpote cubum ex  $a\sqrt[3]{bc}$ .

Ubi notandum, quòd, licèt in binomio plures reperiantur partes, tamen non nisi pro duabus sint habendæ, quarum una, utpote,  $a^3+3abc$ , designet numerum rationalem, at verò  $3aa+bc\sqrt[3]{bc}$ , numerum irrationalem seu surdum. Deinde constat, partem rationalem  $a^3+3abc$ , compositam esse ex cubo partis rationalis radices, & ex triplo solido, quod fit ex eadem hac parte in quadratum reliquæ partis radices: ac denique, si dictarum partium  $a^3+3abc$  &  $3aa+bc\sqrt[3]{bc}$  quadrata  $a^6+6a^3bc+9aabbcc$  &  $b^3c^3+6aabbcc+9a^3bc$  à se invicem auferantur, relinqui  $a^6=a^3bc+3aabbcc=b^3c^3$ , cubum ex  $aa=bc$ , differentiâ quadratorum partium radices.

In numeris. Esto  $a\propto 2$ ,  $\sqrt[3]{bc}\propto\sqrt[3]{6}$ . Hinc multiplicato binomio  $2+\sqrt[3]{6}$  in se cubicè, fit binomium  $44+\sqrt[3]{1944}$ : in quo partium quadrata,  $1936$  &  $1944$ , à se invicem subducta, relinquunt  $8$ , cubum differentiæ quadratorum partium.

Deinde ostendendum, binomium multiplicatum per differentiam quadratorum partium producere semper aliud binomium, in quo differentia quadratorum partium sit numerus cubicus.

Quod patet si multiplicetur binomium  $a\sqrt[3]{bc}$ , per  $aa=bc$ , differentiâ quadratorum partium. Exsurgit enim binomium  $a^3=a^3bc\sqrt[3]{a^3bc}=2aabbcc+b^3c^3$ : cujus partium quadrata,  $a^6=2a^3bc+2aabbcc$  &  $a^3bc=2aabbcc+b^3c^3$  à se invicem subducta, relinquunt  $a^6=a^3bc+3aabbcc=b^3c^3$ , numerum cubicum, cujus radix cubica  $aa=bc$ , est, ut supra, differentia quadratorum partium prioris binomii  $a\sqrt[3]{bc}$ .

In numeris. Sit  $a\propto 22$ , &  $\sqrt[3]{bc}\propto\sqrt[3]{486}$ . Unde multiplicato binomio  $22+\sqrt[3]{486}$  per differentiam quadratorum partium  $2$ , prodibit binomium  $44+\sqrt[3]{1944}$ . in quo differentia quadratorum partium est  $8$ , utpote cubus differentiæ  $2$ , quæ est inter  $484$  &  $486$ , partium quadrata prioris binomii  $22+\sqrt[3]{486}$ .

Quibus expolitis, ad extrahendam  $\sqrt[3]{8}$  ex binomio  $20+\sqrt[3]{392}$ , in quo pars rationalis  $20$  est major reliquâ parte  $\sqrt[3]{392}$ :

D d d 2

cogi-

Signum =  
significat  
differentiam  
inter  
duas plures  
ve quantitates,  
cum  
non exprimitur aut  
cognoscitur,  
pones quas  
sit excessus.



cogitetur  $a^3 + 3abc$  esse 20, &  $3aa + bc\sqrt{bc}$  esse  $\sqrt{392}$ , ita ut  
 $+ a^3 + 3aa\sqrt{bc}$  designet datum binomium  $20 + \sqrt{392}$ , &  
 $+ 3abc + bc\sqrt{bc}$  ipsam radicem quærendam, cujus ma-  
 jor pars sit  $a$ , & minor  $\sqrt{bc}$ . Tum operare secundum regulam.

$$\begin{array}{r} 20 + \sqrt{392} \\ 20 \end{array}$$

subt.  $\left\{ \begin{array}{l} 400 \\ 392 \end{array} \right\}$  quadrata partium à se invicem.

reliq. 8,

2 radix cubica reliqui, sive  $aa - bc$ .

$$\begin{array}{r} x | 2 \\ 2 | x \\ x | 2 \\ \hline 1 | 9 \end{array}$$

Adde ad 20, partem rationalem binomii

19, præter propter valorem partis irrationalis.

& fit 39, valor dati binomii in rationalibus, circiter. utpote à vero unitate non discedens, quippe qui inter 39 & 40 consistit. Unde radix cubica fit major quàm 3 & minor quàm  $3\frac{1}{2}$ , ita ut  $3\frac{1}{2}$  radicem veram non supra  $\frac{1}{2}$  excedat. Sumatur autem quasi esset vera, & æqualis  $a + \sqrt{bc}$ .

Et divid. 2, hoc est,  $aa - bc$ ,

per  $3\frac{1}{2}$ , hoc est,  $a + \sqrt{bc}$ :

& fit  $\frac{4}{7}$ , sive  $a - \sqrt{bc}$ .

add.  $3\frac{1}{2}$ , hoc est,  $a + \sqrt{bc}$ ,

& fit summa  $4\frac{1}{14}$ , sive  $2a$ , duplum partis rationalis, radice. supponendo  $3\frac{1}{2}$  esse veram radicem. Sed cum  $3\frac{1}{2}$  sit major radice verâ; ita tamen, ut differentia non sit supra  $\frac{1}{2}$ , fit, ut  $4\frac{1}{14}$  quoque duplo partis rationalis major existat, & differentia minor quàm 1. sicut inferius ostensuri sumus. Unde cum eadem pars sit numerus rationalis integer, sequitur duplum ejus fore 4, utpote maximum integrum numerum in  $4\frac{1}{14}$  contentum, adeoque ipsam dictam partem fore 2. Quâ inventâ, facile est reliquam invenire. Etenim, si à 4, quadrato ejusdem partis, subducatur 2, radix cubica differentiarum quadratorum partium dati binomii, relinquetur 2, quadratum alterius partis: Ita ut radix inventa sit  $2 + \sqrt{2}$ .

Ubi

# ADDITAMENTUM. 397

Ubi notandum, operationem hanc sufficere ad investigandam radicem, cum constet illam binomium esse; sed quando id incertum fuerit, explorari poterit per multiplicationem inventi binomii in se cubice, aut etiam brevius per sequentem operationem.

Divid. 40, hoc est,  $2a^3 + 6abc$   
per 4, hoc est,  $2a$ :

& fit quotiens 10, sive  $aa + 3bc$ .

Cui addatur ter 2, seu 6, hoc est,  $3aa - 3bc$ .

& provenit 16, sive  $4aa$ : quod est quadratum superioris 4, minimum duplum partis rationalis inventæ 2. Unde radix binomia erit, & duplum ejusdem partis 4: adeoque  $2 + \sqrt{2}$  radix quæsitæ.

Vel etiam hoc modo:

Ad 8, hoc est,  $a^3$

add. 12, hoc est,  $3abc$ :

& provenit 20, sive  $a^3 + 3abc$ . quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur  $2 + \sqrt{2}$  esse radicem quæsitam.

Omnino ut supra fuit expositum.

Similiter, ad extrahendam  $\sqrt[3]{44 + \sqrt{1944}}$ , in quo pars rationalis 44 est minor reliquâ parte  $\sqrt{1944}$ ; cogitetur (ut supra)  $\sqrt[3]{44 + \sqrt{1944}}$  esse  $4 + \sqrt{bc}$ , &  $\sqrt[3]{1944}$  esse  $\sqrt{1944}$ , ita ut  $\sqrt[3]{44 + \sqrt{1944}}$  designet datum binomium  $44 + \sqrt{1944}$ , & illius radix cubica  $4 + \sqrt{bc}$  hujus radicem quærendam, cujus 4 sit minor pars, &  $\sqrt{bc}$  major. Tum operare secundum regulam.

$44 + \sqrt{1944}$

subt.  $\left\{ \begin{matrix} 1944 \\ 1936 \end{matrix} \right\}$  quadrata partium à se invicem.

reliq.  $\frac{8}{2}$

2, radix cubica reliqui, sive  $bc - aa$ .

$\frac{2}{19} \frac{4}{4} \frac{4}{4}$  Adde ad 44 partem rationalem binomii  
 $\frac{4}{4} \frac{4}{4} \frac{4}{4}$  — — 44, præter propter valorem partis irrationalis:  
 $\frac{4}{4} \frac{4}{4} \frac{4}{4}$  & fit 88, valor binomii dati in rationalibus, circiter.  
quippe qui à vero unitate non absit, cum inter 88 & 89 consistat.  
Radix autem ejus cubica est major quàm 4, & minor quàm  $4\frac{1}{2}$ ;

D d d 3

ita ut



ita ut  $4\frac{1}{2}$  sit major radice verà, excessu minore quàm  $\frac{1}{2}$ . Assumatur autem ut vera, & æqualis  $a + \sqrt{bc}$ .

Et divid. 2, hoc est,  $bc - aa$ ,

per  $4\frac{1}{2}$ , hoc est,  $\sqrt{bc} + a$ :

& fit quotiens  $\frac{4}{9}$ , sive  $\sqrt{bc} - a$ .

subt.  $\sum$  ex  $4\frac{1}{2}$ , hoc est,  $\sqrt{bc} + a$ ,  
 $\frac{4}{9}$ , hoc est,  $\sqrt{bc} - a$ :

& relinquitur  $4\frac{1}{9}$ , sive 2 a, duplum partis rationalis radice. videlicet supponendo  $4\frac{1}{2}$  esse veram radicem. Sed cum major sit, sit ut etiam  $4\frac{1}{9}$  excedat idem duplum, differentiâ minore quàm 1; sicut mox ostendemus. Unde cum eadem pars sit numerus integer rationalis: sequitur duplum ejusdem partis fore 4, utpote maximum integrum numerum in  $4 + \frac{1}{9}$  comprehensum: adeoque ipsam partem esse 2. Quâ inventâ, facile est reliquam partem invenire. Etenim si ad 4, quadratum dictæ partis, addatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium binomii dati, fit summa 6, quadratum alterius partis: ita ut radix inventa sit  $2 + \sqrt{6}$ .

Ubi (ut supra) notandum, non opus esse ut ulterius operemur, postquam constat radicem extrahi posse, hoc est, ipsam binomium esse: quandoquidem eo casu radix inventa sit quæ sita. Illud autem si ignoretur, dignosci poterit multiplicando radicem inventam in se cubicè, aut etiam brevius, hoc modò:

Divid. 88, hoc est,  $2a^3 + 6abc$ ,

per 4, hoc est, 2a:

& fit quotiens 22, sive  $aa + 3bc$ .

Subtr. ter 2, sive 6, hoc est,  $3bc - 3aa$ :

& relinquitur 16, sive  $4aa$ , quod est quadratum præcedentis 4. nimirum duplæ partis rationalis inventæ 2. Id quod monstrat, duplum ejusdem partis esse 4, adeoque radicem quæ sitam binomium esse, videlicet  $2 + \sqrt{6}$ . quemadmodum modò inventa fuit.

Vel etiam sic:

Ad 8, hoc est,  $a^3$

add. 36, hoc est,  $3abc$ :

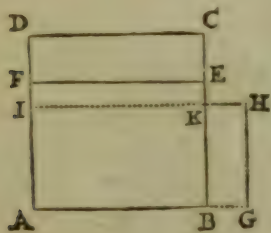
& provenit 44, sive  $a^3 + 3abc$ . quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur  $2 + \sqrt{6}$  esse radicem quæ sitam.

Ut

Ut supra expositum fuit.

Quibus explicatis, demonstrandum nunc est, quod superius polliciti sumus.

In quem finem, pro radice cubica rationali inventa, veram, ut dictum est, superante, scribatur  $m$ ; at pro vera, quam in allatis exemplis per  $a + \sqrt{b}$  designavimus, brevitatis causâ scribatur  $v$ ; similiterque pro  $a - \sqrt{b}$ , differentiâ quadratorum partium radicis, scribatur  $d$ . Hinc, cum  $d$  divisa per  $m$  dat  $\frac{d}{m}$ , quæ in primo exemplo ipsi  $m$  est addita, & in secundo exemplo ab  $m$  ablata; ostendendum est, differentiam, quâ  $m + \frac{d}{m}$  excedit  $v + \frac{d}{v}$ , quod duplum partis rationalis, antea  $\frac{1}{2} a$  nominatum, & quâ  $m - \frac{d}{m}$  excedit  $v - \frac{d}{v}$ , quod similiter duplum partis rationalis, superius  $\frac{1}{2} a$  nominatum, designat, unitate non esse majorem. Quod facile erit, si tantum ostendatur excessum ipsius  $\frac{d}{v}$  supra  $\frac{d}{m}$  minorem esse excessu ipsius  $m$  supra  $v$ . hoc modo:



Esto  $AB \propto v$ , supra quam describatur quadratum  $ABCD$ , quod majus erit quàm  $d$ , quippe quæ tantum differentiam designat, quæ est inter quadrata partium ipsius  $v$ , cujus quadratum earundem partium quadratis unâ cum duplo sub partibus rectangulo est æquale. Hinc si supponatur rectangulum  $ABEF \propto d$ , erit  $AF \propto \frac{d}{v}$ .

Tum assumptâ  $AG \propto m$ , ita ut  $BG$  non superet  $\frac{1}{2}$ , factoque rectangulo  $AGHI \propto d$ , hoc est, æquali rectangulo  $ABEF$ : erit  $AI \propto \frac{d}{m}$ ; nec non rectangulum  $IKEF$  æquale rectangulo  $KBGH$ . Atque adeò cum  $IK$  sit major quàm  $KB$ , erit  $IF$  minor quàm  $BG$ , hoc est, excessus ipsius  $\frac{d}{v}$  supra  $\frac{d}{m}$  minor erit excessu ipsius  $m$  supra  $v$ . Quod erat demonstrandum.

Eadem est ratio cum dati binomii partes per signum — disjunctum.



guntur. Si enim, exempli causâ, proponatur binomium  $20 - \sqrt[3]{392}$ . oportet tantum signum  $-$  transmutare in signum  $+$ , atque ut supra ex  $20 + \sqrt[3]{392}$  radicem cubicam extrahere, quæ est  $2 + \sqrt[3]{2}$ ; & fit  $2 - \sqrt[3]{2}$  radix cubica ex  $20 - \sqrt[3]{392}$ . Quemadmodum liquet ex iis, quæ superius sunt ostensa. Et sic de aliis.

Cæterum, quæ hic de radice cubica ostensa sunt, applicari quoque possunt ad ea, quæ ad reliquarum radicum extractionem sunt allata: cum eadem ubique sit demonstrandi ratio, idemque processus; ita ut plura hac de re afferre non sit opus. Tantum sciendum, modum, quo hæc regula inventa fuit, ad plures alias regulas, in Arithmetica hæcenus incognitas, inveniendas inservire posse. Qui quidem in eo consistit, ut, dum in aliqua quæstione ignoratur ratio inveniendi verum numerum, quem integrum esse certò constiterit, quæatur numerus fractus unitate verum non superans: eritque maximus integer numerus, in eo contentus, is qui quæritur.

F I N I S.







qua publico usui viriliter legenda terendaque permittuntur,  
 quasi suo quodam jure postulant: cum non tantum benevolorum  
 amicorum, sed etiam utilitigantium, acerborumque inimico-  
 rum, quorum si non in praesens, in posterum fortasse copia suppe-  
 tere possit, judicium subire debeant. At forte inquires, quod non  
 sub libelli, sed epistolarum, ad Te datarum, nomine, in lucem  
 proditura sint, idque iis temporibus datarum, quibus aliis stu-  
 diis animum applicassem, ideoque nullo merito accuratam illam  
 diligentiam, summamque curam, omniumque probationes de-  
 siderari posse. Sed quid cause est, quin paulo diutius expectem,  
 illaque, quibusdam praeerea additis, sub libelli nomine, accura-  
 tius elaborata publici juris faciam? maxime cum libellum quen-  
 dam, (quibusdam studiis ex voto ad finem perductis,) de Na-  
 tura, Reductione, Determinatione, Resolutione, atque  
 Inventione Aequationum prelo subicere proposuerim, (nisi  
 fontica quaedam causa denuo cursum meum remoretur,) cujus  
 maximam jam partem, quod materiam spectat, si pauca quaedam  
 excipias, in numerato habeo, adeo ut non nisi in ordinem redi-  
 gendi labor & quasi forma desideretur. Cum enim in animo  
 habeam, illum ita accurare, ut à quolibet, qui modo ab ovo,  
 quod dicitur, rem ipsam ordiri, & per numeros gradusque pro-  
 cedere, nec uno impetu montis verticem superare cupit, intelli-  
 gi & in usum transferri possit; certe multo magis, procul omni  
 dubio, utilitate suâ, quam hæc epistola, quæ non nisi partem con-  
 tinent, eamque ita, uti dictum est, scriptam, se publico commen-  
 daret. Sed jam mihi responsionem tuam audire videor: Quid  
 obstat, Huddeni, quo minus utriusque nos participes facias?  
 Nam bene conveniunt unaque in sede morantur.  
 Sed quid utilitatis imperfectior ille, & quasi abortivus fetus, tum  
 allaturus est? Nullum equidem, fortasse, inquires, ubi consumma-  
 tior se conspiciendum præbuerit, sed jam quidem quandiu ille in-  
 tra penetralia Vestæ latet, cum experiendi in omnibus pene  
 scientiis compertum sit, illos, qui earum amore tenentur, vel qui-  
 bus

bus res cura & cordi est, eamque quam penitissime, & quam maxime fieri potest, circumspicere rimari & penetrare cupiunt, raro quid amplius, quam rudi Minervâ delineatam, aut manu-  
 ctionem ad eam requirant, vel nudam modò, omnibus demon-  
 strationibus, quasi supervacaneis ornamentis, neglectis, verita-  
 tem expetant: Ita namque partim magis ad intimam rerum  
 medullam ingenio suo penetrare illis datur, cum ex parte iis  
 quoque investigandi labor incumbat; partim maiore voluptate  
 perfunduntur, atque adeo multo aptiores ad aliarum rerum  
 veritatem in apicem producendam evadunt. Cum etiam id  
 experientia doceat, eos, nec ferè alterius generis homines, ali-  
 quid, quod communem captum superet, & cornicum quasi ocu-  
 los configat, elaboratum dare posse. Vnde illud confici videtur,  
 scientiarum amatoribus satis superque dictum, nec mihi fas lici-  
 tumque esse, illud subducere aut invidere iis, quibus, si non aliis,  
 aliquo modo satisfacere queat. quibus addere posses: alios, licet  
 multis in locis, ejus quod dicitur, veritatem demonstrationibus  
 fulcitam, & ad unguem elaboratam, (quod variis in locis, levi  
 tantum brachio attingi,) non reperturi sint, nihilominus multas  
 regulas ad usum, ejus respectu non pauca ad amussim facta sunt,  
 transferre posse. Atque ita jam causam meam contra me ipsum  
 egisse videor, ut vix mutire vel hiscere adversus ea, qua dixi, mi-  
 hi licitum videri possit, si in Lectores, quales esse decet, incidere  
 mihi contingat: sed cum maxima hominum pars eò propendeat,  
 ut ante de re aliqua, quam illam clarè & distinctè perceperit,  
 judicium ferat, remque potius in deteriolem, quam meliorem  
 partem interpretetur, atque eorum judicium sit periculi plenum,  
 si circa res versetur, qua non exactè scripta, dilucidè explicata,  
 demonstrationibus subnixæ sunt: eoque magis si illa paucis ver-  
 bis indicata fuerint, ipsaque res ita sit comparata, ut non nisi  
 difficulter paucis verbis ita se comprehendi sinat, quin alicubi  
 aliquid, quod dubiam, variamque interpretationem suscipere  
 possit, irrepat, seque immisceat: Cumque multo maxima pars



eorum quæ epistolis meis continentur talia sint, demonstrationibusque destituta, verbisque paucis, uti iam dictum, indicata, cum Tibi hoc plusquam abunde sufficeret; Satis mihi vel hoc solum, causæ videtur, epistolarum editioni, nulla ex parte suffragari. Pone verò me majori felicitate quam cuiquam sperare fas sit, hac in parte uti, measque literas non nisi in genuinorum veritatis amatorum, qui nihil, exceptâ veritate, investigant, manus incidere, neque meos Lectores tales esse, qui, ubi ad dubium verbum, quasi scopulum, offenderint, veritati consonâ significatione insuper habitâ, eam magis quæ falsitatis aliquid secum trahit, veluti obtorto collo arripiunt, tanquam in sinu gaudentes, & castellanos nescio quos triumphos ducentes, quasi verò jam repererint aliquid, quo suspectam auctoris inventionem reddant, ejusque apud alios existimationem elevent, ut ipsi eò majores videantur, atque ita vel alterius nominis, si fieri possit, ruinâ gradum sibi ad gloriolam, licet inanem, faciant: Pone inquam

Omnia jam fieri, fieri quæ posse negamus, Tamen adhuc plura obstant: nam, cum non tantum typographice emendationis molestiam, satis sæpe tediosam, Te devoraturum, sed & illa, quæ vernaculâ linguâ à me scripta sunt, Latio Te donaturum, liberaliter, qui tuus est mos, obtuleris, videor mihi satis graviter in publica commoda peccaturus, nisi repulsam feras. Nonne enim tempus illud, quod opera illi impendere necesse habebis, nec id modicum, tum propter rite in Latinum sermonem convertendi, tum propter recte, ubi prælo subjecta fuerint, corrigendi molestiam, melioribus curis impendere, bonasque horas melius collocare posses? nisi enim me experientia docuisset, quid non possis, ubi penitus cogitationes tuas in rem aliquam defixeris, quamque multis in rebus, quarum ego sum conscius, optatum Tibi exitum consequutus fueris, facilius assensum præberem. Ne igitur impræsentiarum agrè feras, quòd is audire nolim, qui, cum tempori tuo non contemnendam partem suffuratus fuerit, meliora, quæ alioquin invenires, publico invidisse

vidisse videri possit. Atque adeo omnes ha rationes eo me impellerent, ut, nisi à mea consuetudine abhorreret, amicis aliquid denegare, jam sine omni dubio repulsam ferres. Quid ergo in re dubia consiliu? Si edendi copiam faciam, haud leviter peccabo; sin id recusam, optimo meorum amicorum prater consuetudinem refragabor. sed in omnes partes mentem versando, tandem videor mihi Gordio huic nodo gladium reperisse, & rationem, qua anceps malum effugere queam. Nimirum: nec assentior, nec repugno editioni epistolarum, sed totum hoc, quicquid est, Tibi planè trado & committo, ut id, quod optimum Tibi videbitur, probes & sequaris, ubi rationum mearum momenta non praoccupato, sed libero ac provido animo perpendaris, libaverisque. Vale, Vir Amicissime, & me, quod facis, amare perge.

Datum Amstelædami ipsis  
Calendis Aprilis 1658.

Ecc;

JΘ-



JOHANNIS HUDDENII  
EPISTOLA PRIMA  
DE  
REDVCTIONE  
ÆQVATIONVM.

*Clas-*

Clarissimo, Praestantissimoq; Viro  
 D. FRANCISCO SCHOTENIO  
 JOHANNES HVDDE  
 S. P. D.

**D**oleo, Vir Amicissime, quòd dubia valetudine & negotiis impeditus amicae petitioni tuae, de iis latius deducendis, quae de Reductione Aequationum ad amicum quempiam ante aliquot annos breviter perscripseram, hactenus satisfacere nequiverim. Imprescitiarum ergo aliquid temporis (quamvis parum eo abundem) decido, ut promissa si non in totum, ex parte saltem exsolvam, ne vel nimis longa te offendant mora, vel nomen malum apud te audiam; quamvis non videarui immerito mihi crimen illud impingere posse, sed tamen velim memor sis Belgici adagii: Die noch wat betaalt / wil noch betalen / eu is van de quaatste slag niet.

Quod igitur ad Reductionem Aequationum attinet, eam duobus modis considero, vel quatenus aequatio absolute considerari potest, vel relative in quantum scilicet illam ad aliquod Problema, è quo originem duxit, referre licet.

Primo verò eam absolute considerabo, omisâ vulgari Reductione, quae per additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem & extractionem procedit: ponamque tantum Reductionum Regulas quasdam, quarum plurimas non ita pridem inveni, easque exemplis, ut mentem meam melius percipias, illustrabo, relictis earum demonstrationibus, tum quòd maxima earum pars sit perquam inventu facilis, tum, quod rei caput



408 IOHANNIS HVDDENII EPIST. I  
caput est, quòd hominis foret otio suo abutentis, eas  
tibi (cui, quicquid in Mathefi inaccesum aliis videtur,  
perspectum est,) transmittere.

Et ut distinctius meos conceptus exprimam, primò  
restringam meas Regulas ad eas æquationes, in quibus  
una tantum incognita quantitas reperitur, quam sem-  
per nominabo  $x$ ; & in quibus Primus Terminus (Pri-  
mum Terminum eum dico, in quo  $x$  plurimarum est  
dimensionum; Secundum, ubi  $x$  est unâ dimensione  
minor, & sic porro) non est multiplicatus aut divisus  
per aliquam cognitam quantitatem, atque semper af-  
fectus signo  $+$ : Quia non tantum hoc pacto omnes  
æquationes considerare consuevimus, sed etiam quia  
nullo, aut parvo admodum labore, ut cuilibet no-  
tum est, ad talem formam, si eam non habeant, redigi  
possunt.

SEQUENTES NOVE REGVLÆ SE EXTENDVNT  
AD OMNEM ÆQVATIONEM, SIVE IN EA IR-  
RATIONALES QVANTITATES ET FRACTIO-  
NES, SIVE NVLLÆ INVENIANTVR.

I. REGVLA.

Si in æquatione literali una vel plures literæ seu  
quantitates cognitæ supponantur  $\infty 0$ , atque eo *ultimus*  
*Terminus non evanescat*, neque æquatio, quæ hinc resul-  
tat, reducibilis sit, certum est neque Propositam æqua-  
tionem reducibilem fore; at verò si *ultimus Terminus*  
*evanescat*, atque etiam inde Resultans æquatio non exi-  
stat reducibilis, æquatio Proposita ad pauciores dimen-  
siones quàm ista Resultans reduci non poterit.

*Exem-*

*Exemplum, ubi ultimus Terminus non evanescit.*

Sic in æquatione  $x^3 - a x x + b b x - a^3 \propto 0$ , si suppo-  
 $- b \quad + a b \quad - b^3$   
 $+ a a \quad - a a b$   
 $- b b a$

natur  $a \propto 0$ , resultabit, inde  $x^3 - b x x + b b x - b^3 \propto 0$ . Quia  
autem hæc æquatio reducibilis non est, certum est neque Propo-  
sitam reducibilem fore.

*Exemplum, ubi ultimus Terminus evanescit.*

Si in æquatione  $x^6 - a b x^4 + c^3 x^3 + a^3 b x x - a^3 a c^3 x + c^3 d \propto 0$   
 $- a a \quad + c c d \quad - a b c c d \quad - a b b c^3$   
 $- b b a \quad + a a b^3$

supponantur  $d$  &  $a \propto 0$ , resultat inde  $x^3 + c^3 \propto 0$ . Quia verò  
hæc æquatio trium dimensionum reduci nequit, argumentum est  
neque Propositam ad pauciores dimensiones quàm ad tres, redu-  
cibilem fore.

Sic etiam supponendo  $d$  &  $b \propto 0$ , vel tantum  $c \propto 0$ , orientur  
hæc duæ æquationes

$$x^3 - a a x^3 + c^3 x x - a^3 a c^3 \propto 0.$$

$$x^6 - a b x^3 - b b a x x + a^3 b x + a a b^3 \propto 0.$$

$$- a a$$

Quæ si reduci non poterunt, denotabunt Propositam æquatio-  
nem, ad pauciores dimensiones quàm ad 5, reduci non posse.

Dico, illam non ad pauciores dimensiones reducibilem fore, quippe  
aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem di-  
mensionum numerum sit reducibilis. quemadmodum contingit  
in hac  $x^4 - a x^3 + a a x x + b^3 x - a b^3 \propto 0$ , supponendo  
 $a \propto 0$ : exsurgit enim  $x^3 + b^3 \propto 0$ , quæ non potest reduci, &  
tamen æquatio Proposita est reducibilis per  $x - a \propto 0$ .

## II. REGULA.

Si in æquatione literali pro una, vel pluribus, vel  
omnibus literis seu quantitibus cognitis, supponan-

Fff

tur



tur numeri, vel aliæ quantitates ad libitum, atque eo  
*ultimus Terminus non evanescat*, neque æquatio, sive nu-  
 meralis, sive literalis, quæ hinc resultat, reducibilis sit,  
 certum est, neque Propositam æquationem reducibi-  
 lem fore; si verò *ultimus Terminus evanescat*, atque etiam  
 inde Resultans æquatio non existat reducibilis, æqua-  
 tio Proposita ad pauciores dimensiones, quàm ista Re-  
 sultans, reduci non poterit.

*Exempla, ubi ultimus Terminus non evanescit.*

1. Si in hac æquatione  $x^3 -^2 a x x +^3 b b x -^3 a^3 \propto 0$  sup-  
 $- b \quad +^3 a b \quad -^3 b^3$   
 $+^4 a a \quad -^6 a a b$   
 $+^9 a b b$

ponatur  $a \propto 1$ , &  $b \propto 1$ , resultabit inde æquatio numeralis  
 $x^3 -^3 x x +^3 x -^3 \propto 0$ . Quæ, quoniam non est reducibilis, in-  
 dicabit, neque Propositam æquationem reducibilem esse.

2. Sic etiam, si habeamus hanc  $x^5 +^4 a a b b x -^10 a^4 b \propto 0$ ,  
 $-^3 a^3 b b \quad -^2 b^3 a a$

atque supponamus  $+^4 a a b b \propto \frac{3 a^3 b b}{a - b}$ , seu  $b \propto \frac{1}{3} a$ , exsurget inde  
 $x^5 +^4 a^2 a^2 -^2 \frac{4 a^2}{9} a^2 \propto 0$ . Quia verò hæc æquatio reduci non  
 potest, certum est, neque Propositam reducibilem fore.

3. Non secus, si in æquatione  $x^5 -^8 a^3 x x +^4 c a^3 x -^2 a^3 c d \propto 0$   
 $-^2 a a c \quad +^4 a c c d$

supponatur  $-^8 a^3 -^2 a a c \propto 0$ , seu  $c \propto -^4 a$ ; ac  $+^4 c a^3 +^4 a c c d \propto 0$ ,  
 seu  $d \propto -^4 \frac{a a}{c}$ , fiet inde  $x^5 +^8 a^5 \propto 0$ . Quoniam verò  
 hæc æquatio non reducibilis existit, certum est, &c.

4. Eodem modo se res habet in æquationibus, ubi quantitates  
 Irrationales reperiuntur: nam, exempli gratiâ, si detur hæc æ-  
 quatio  $x^5 +^4 x x \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b} +^3 a^3 b \sqrt{C. \frac{1}{8} a^3 + \frac{1}{27} a b b} \propto 0$ ,  
 supponendo  $\frac{1}{4} a a + b b \propto 0$ , seu  $b b \propto -\frac{1}{4} a a$ , resultabit  
 $x^5 +^3 a^3 b \sqrt{C. \frac{25}{216} a^3} \propto 0$ . quæ, quoniam reduci non  
 potest, certum est, &c.

*Exem-*

*Exempla, ubi æquatio Resultans pauciores quàm Proposita dimensiones habet.*

$$1. \text{ Si habeatur } x^4 + c x^3 + c c x x - b b c x + b^4 = 0, \text{ ac}$$

$$\begin{array}{r} - d d \\ - b b d d \\ - b b \end{array}$$

supponatur  $c \propto 1$ ,  $b \propto 1$ ,  $d \propto 1$ , resultabit inde æquatio numerica  $x^4 + 4 x x + 1 x - 4 = 0$ . Quia verò hæc æquatio trium dimensionum non existit reducibilis, etiam æquatio Proposita ad pauciores dimensiones quàm ad tres reduci non poterit.

$$2. \text{ Si proponatur } x^4 - \frac{1}{2} a b \sqrt{x x} + a a - b b + \frac{1}{2} a x x + \frac{1}{2} a b x - a a b = 0,$$

$$\begin{array}{r} + b b \sqrt{\frac{1}{3} a a + b b} \end{array}$$

& supponatur  $a a - b b = 0$ , seu  $a \propto b$ , resultabit  $x^4 + \frac{1}{2} a x x + \frac{1}{2} a^3 = 0$ . quæ etiam non poterit reduci, ideoque indicabit Propositam æquationem ad pauciores quàm ad tres dimensiones reduci non posse.

Dico non ad pauciores dimensiones illam reducibilem fore, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. Quod etiam in 1<sup>ma</sup> Regula locum habuit, ibique explicatum est. Sed si roges, quot ego dimensiones 2<sup>do</sup> huic exemplo adscribam? respondeo, me tot dimensiones cuilibet æquationi adscribere, quot ejus incognita quantitas ad summum dimensiones habet, dempto omni signo radicali, quod illam incognitam quantitatem includit: ideoque illud 2<sup>dum</sup> exemplum habiturum 6 dimensiones, postquam signum radicale ante quantitatem incognitam, nempe  $\sqrt{x x + a a - b b}$ , ablatum fuerit.

NOTÆ due in hanc I & II Regulam.

I. Notandum est, utramque hanc Regulam non tantum magnum habere usum in inquirendo, utrum æquatio aliqua literalis reducibilis sit, verum etiam eodem modo inquirei posse:

1<sup>mo</sup>. Num æquatio illa vel etiam quantitas quævis composita, per aliam æquationem vel quantitatem, quæ rationalis sit, dividi possit.

2<sup>do</sup>. Num admittat radicem quadratam, cubicam, vel aliam.

Fff 2

3<sup>tio</sup>.



3<sup>tio</sup>. Num duæ vel plures æquationes, vel quantitates dictæ, admittant communem aliquem divisorem.

Nam, si non admittant divisorem rationalem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem, illud plerumque, monstratam jam ineundo viam, vel uno intuitu, vel saltem admodum facile, innotescet; præsertim in æquationibus vel quantitatibus valde compositis, atque ex multis diversis literis constantibus, quod sæpenumero incundo aliam viam valde difficile inventu esset, magnumque & laborem & industriam requireret. Hæc enim Methodus tantum exigit, ut æquationes, vel quantitates dictæ, determinentur (supponendo unam vel plures literas nihilo, vel unitati, vel numero, vel quantitati, ad libitum sumendis, æquales,) ad alias, quas aliunde scimus non admittere reductionem, vel rationalem divisorem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem. Quod omne, exemplis explicare, supervacuum erit, quemadmodum etiam omnem ejus methodi usum enumerare, quem satis insignem esse jam patuit; ac vel eo nomine, quod ipsa nec fractiones, nec irrationales quantitates moretur, non raro magnum adfert compendium.

Denique, si æquationes, vel quantitates compositæ, admittant reductionem, vel divisorem rationalem, vel aliquam radicem, vel communem divisorem, possunt etiam illa omnia in multis casibus hæc Methodo satis compendiosè inveniri. sed hæc non sunt hujus loci, posthac fortassis aliquid de iis indicabo.

II. Quid velim per æquationem ex Proposita Resultantem, necessarium videtur, ut paulò clariùs exponam: maxime quia id etiam in sequentibus Regulis, ubi litera aliqua  $\infty$  o supponitur, usum suum habebit. Quando enim una pluresve literæ vel quantitates  $\infty$  o sumuntur, liquet, omnes quantitates, ex multiplicatione harum per alias productas, etiam æquales nihilo fieri; ideoque in Proposita æquatione necessario evanescere. quemadmodum in allatis exemplis quoque est videre. Adeò ut in æquationibus, quæ literales fractiones non includunt, pateat, quid per æquationem Resultantem intelligam. Sed si literales fractiones dantur, tunc quidem facile, nisi quis probè animum advertat, error committi posset. Etenim fractionis numeratore  $\infty$  o existente, tollenda est ista fractio ex Proposita æquatione; at denominatore  $\infty$  o existente, oportet terminos omnes æquationis primum per ejusmodi deno-

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 413  
denominatores multiplicare. Quo peracto, erit æquatio hæc, in  
quâ scilicet nulla ampliùs reperitur fractio literalis, cujus deno-  
minator est  $\infty 0$ , & in qua conditiones omnes assumptæ, sive sup-  
positiones, sunt adimpletæ, illa, quam ex Proposita resultare  
dico.

*Exempla.*

ÆQUATIONES PROPOSITÆ.	ÆQUATIONES RESULTANTES.
$xx - \frac{cc}{a}x + cc \infty 0. \text{ supponatur } c \infty 0$ $+ b \quad -aa$ $- \frac{ccb}{a}$ $+ ab$	$xx + bx - aa \infty 0$ $+ ab$ $-ccx - cb \infty 0, \text{ seu } x + b \infty 0.$

$xx - cx + \frac{c^2}{2a} \infty 0.$ $+ a \quad - \frac{1}{2}cc$ $+ \frac{ac}{a+b} - \frac{cca}{2a+b}$ $- \frac{cc}{2a}$	$c \infty 0$ $xx + ax \infty 0, \text{ seu } x + a \infty 0$ $- \frac{ccx}{2} + \frac{c^2}{2} \infty 0, \text{ seu } x - c \infty 0.$
--	---

$$xx^{**} + \frac{2ac - ab}{3a - b}xx + \frac{ccb^2}{3aa - ab}x + \frac{b^3a^2}{a+b} \infty 0,$$

$$\text{suppositâ } a - b \infty 0:$$

$$\text{habebitur } a^2c - ab \text{ in } xx, + \frac{ccb^2}{a}x \infty 0, \text{ seu } + a^2cx + \frac{ccb^2}{a} \infty 0.$$

Unde, suppositione  $a \infty b$  adimpletâ, resultat  

$$+ a^2cx + 27aa^2c \infty 0.$$

$$- a^2a$$

Nec tantum hoc observandum in æquationibus, sed etiam in  
quantitatibus compositis, quarum communis mensura, vel divi-  
sor, vel radix petitur. Ut, exempli gratiâ, si inquirere velis, num  
✓Q extrahi possit ex  $cc - cd + dd + \frac{b^4}{cc - cd + dd} + bb$ , & in  
eum finem supposuisses  $cc - cd + dd \infty 0$ : retinendum esset  $b^4$ ,  
non autem  $bb$ . Si enim  $bb$  retineres, concludendum foret,  
Fff 3 ineam



414 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.  
 meam sequendo methodum, quòd  $\sqrt{Q}$  ex  $cc - ^2cd + dd +$   
 $\frac{b^4}{cc - ^2cd + dd} + ^2bb$  extrahi non posset, quæ tamen est  
 $c - d + \frac{bb}{c - d}$

SEQUENTES 3, 4, ET 5 REGVLÆ SE EXTENDVNT  
 AD OMNES ÆQVATIONES, QVÆ EX MVLTIP-  
 LICATIONE DVARVM ALIARVM PROD-  
 VCI POSSVNT, IN QVARVM VNA ALIQVA LI-  
 TERA INCLVDITVR, QVÆ IN ALTERA NON  
 CONTINETVR.

### III. REGVL A,

*Qua modum docet reducendi omnem æquationem, qua pro-  
 duci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una li-  
 teram aliquam comprehendit, qua in altera non continetur;  
 & qua litera non habet eundem dimensionum numerum in  
 diversis Terminis.*

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates,  
 in quibus *eadem litera* reperitur, quæque simul sic divi-  
 di possunt, ut litera illa evanescat,  $\infty 0$ . Atque hoc in  
*singulis literis* instituo, verum *uno tantum modo*. Quippe  
 id interdum variis modis fieri potest, quo casu illi præ  
 cæteris eligendi veniunt, qui facillimas æquationes  
 subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quæ-  
 situm pervenire licet. Et, si Proposita æquatio ex dua-  
 bus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit,  
 etiam per aliquam harum fictarum æquationum, in  
 quibus dictæ *literæ* sunt sublata, divisibilis erit.

*1<sup>mu</sup> genus exemplorum, in quibus Proposita æquationes  
 nec numerales nec literales fræctiones continent.*

1. Proponatur hæc æquatio  $x^4 - ^6ax^3 + ^2bcxx - ^6abcx + ^6bbca\infty 0$ .

$+ ^4ac$	$- ^6aac$	$+ ^8aabc$
$+ ^6aa$	$- ^8aab$	$+ ^3a^3c$
$+ ^4ab$	$- ^6a^3$	

Primò

Primo itaque periculum faciam in litera  $a$ , supponendo  
 $-16a^3x + 32a^2c \infty 0$ . Quæ sunt omnes quantitates per  $a^3$   
 divisibiles, quæ in Proposita æquatione inveniuntur, & in quibus  
 factâ divisione litera  $a$  evanescit: oritur enim  $-16x + 32c \infty 0$ ,  
 seu, dividendo per  $-16$ ,  $x - 2c \infty 0$ .

Jam tento, num Proposita æquatio dividi queat per  $x - 2c \infty 0$ .  
 Nam si per hanc dividi non possit, uti & si hac  $x - 2c \infty 0$  ab omni  
 fractione non libera fuisset, (quod huic quidem primo exemplorum generi est  
 proprium) ad aliam literam transissem. (Quamvis enim aliæ ad-  
 huc quantitates in æquatione reperiantur, in quibus  $a$  continetur,  
 quæque omnes per aliam quàm  $a^3$  dividi possunt, sic ut litera  $a$   
 ubique evanescat, utpote supponendo

$$+16a^2xx - 16aacx + 48aabc \infty 0, \text{ ut } \&$$

$$-8aab$$

$$-6ax^3 + 4acxx - 16abcx + 16bbca \infty 0;$$

$$+4ab$$

tamen id uno modo in hac Regula tentasse sufficit.) Hinc cum Pro-  
 posita æquatio per  $x - 2c \infty 0$  divisibilis non sit, transeo ad aliam  
 literam, puta  $b$ . Quoniam autem hic una tantum quantitas exi-  
 stit, in qua  $bb$  reperitur, nempe  $16bbca$ , idcirco & hanc transeo,  
 quandoquidem per  $16bbca$  nullus valor ipsius  $x$  obtineri potest,  
 & considero literam  $c$ , ponendo

$$4bcxx - 16abcx + 16bbac \infty 0. \text{ Hæc igitur cum absque}$$

$$4ac - 16aac + 48aabc$$

$$+32a^2c$$

fractione dividatur per  $+bc + 2ac$ , ac oriatur  $xx - 4ax + 4ab \infty 0$ :

$$+2aa$$

inquirendum ulterius restat, an Proposita æquatio dividi possit  
 per  $xx - 4ax + 4ab \infty 0$ . inveniturque divisionem fieri posse.

$$+2aa$$

Dixi in Regula, quod sufficiat, rem singulis literis uno tantum modo  
 tentasse, & quod illi modi præ cæteris eligendi veniant, qui facillimas æqua-  
 tiones subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quasitum pervenire  
 licet. Sic enim breviorẽ viam ingressus essem, si quantitates  
 sumplissem, in quibus  $a$  ubique unam tantum dimensionem ha-  
 bet. Nam quoniam tunc obtineo  $-6ax^3 + 4acxx - 16abcx$   
 $+16bbca \infty 0$ , primo intuitu apparet, cum 4 per 6 dividi ne-  
 queat, quod hæ quantitates non sine fractione dividi possint.

2. Eo-



2. Eodem modo, ad reducendam hanc æquationem

$$x^3 - {}^3cxx + abx - {}^2aab \infty 0:$$

$$- {}^2a + {}^6ac + {}^3abb$$

$$+ {}^3b - {}^2bc$$

quia quantitas  $- {}^2aab$  in eâ sola reperitur, in qua  $a$  duas habet dimensiones; & quantitas  $+ {}^3abb$  sola, in qua  $b$  duas dimensiones habet: idcirco transeo ad literam  $c$ , obtineoque

$$- {}^3cxx + {}^6acx \infty 0 \text{ seu } - {}^3cx + {}^6ac \infty 0. \text{ Id quod divisum}$$

$$- {}^2bc \quad - {}^2bc$$

per  $- {}^3c$ , dat  $x - {}^2a \infty 0$ . Cujus ope Proposita æquatio dividi

$$+ {}^3b$$

potest. Quod, si aliter evenisset, postquam jam periculum in omnibus factum esset literis, indicio fuisset, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

3. Similiter examinaturus hanc æquationem

$$x^3 + b \quad xx + {}^2b\sqrt{ab} + {}^3bb \text{ in } x - {}^6bb\sqrt{ab} + {}^3bb \infty 0,$$

$$- \sqrt{ab} + {}^3bb \quad + {}^{18}b^3$$

exordiens à litera  $a$ , invenio æquationem  $- \sqrt{ab} + {}^3bb \text{ in } xx,$   
 $+ {}^2b\sqrt{ab} + {}^3bb \text{ in } x, - {}^6bb\sqrt{ab} + {}^3bb \infty 0$ . Quam divido  
 per  $- \sqrt{ab} + {}^3bb$ , & evanescit  $a$ , obtineoque hanc  $xx - {}^2bx$   
 $+ {}^6bb \infty 0$ ; per quam Proposita dividi potest. Quòd si verò hæc  
 divisio non fieri potuisset, progrediendum fuisset ad literam  $b$ .  
 Quia autem liquet per  $b$ , secundum singulas etiam suas dimen-  
 siones considerata, non posse aliquem ipsius  $x$  valorem inveniri:  
 conclusissem, ut ante, æquationem Propositam ex duabus ejus-  
 modi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

4. Nec aliter se res habet in hac æquatione

$$x^3 - xx\sqrt{xx+aa} - {}^2cxx + {}^2cx\sqrt{xx+aa} - {}^6acx - a\sqrt{3cc+aa} \text{ in } \sqrt{xx+aa} \infty 0.$$

$$+ {}^2a + ax\sqrt{xx+aa} - {}^3aax \quad + {}^3aa\sqrt{3cc+aa}$$

$$+ ax\sqrt{3cc+aa}$$

Nam primò video literam  $a$  negligi posse, quia sola  $- {}^3aax$  re-  
 peritur, nec ulla alia, quæ per  $aa$  sic dividi possit, ut ipsa  $a$  prorsus  
 evanescat. Transeo itaque ad literam  $c$ , supponendo

$$- {}^2cxx + {}^2cx\sqrt{xx+aa} - {}^6acx \infty 0 \text{ seu } - {}^2cx + {}^2c\sqrt{xx+aa} - {}^6ac \infty 0,$$

& fit, dividendo ubique per  $- {}^2c, x\sqrt{xx+aa} + {}^3a \infty 0$ . Cujus  
 ope

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 417  
 ope Propositam æquationem dividere licet. Quæ si per hanc di-  
 vidi non potuisset, quia jam res singulis literis tentata esset, con-  
 cluissem, ut prius, Propositam æquationem, &c.

*2<sup>um</sup> genus exemplorum, in quibus Proposita æquationes  
 fractiones continent.*

Inter hæc & præcedentia exempla, nulla alia differentia res-  
 pectu operationis existit, quam quod Ficta æquatio, per quam di-  
 visio Propositæ tentatur, non necessariò, sicut ibi, ab omni fra-  
 ctione libera esse debeat. Quocirca unicum exemplum in me-  
 dium adduxisse suffecerit.

$$\text{Proponatur æquatio } x^3 + \frac{abb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x - \frac{1}{2}a^3 \propto 0.$$

$+^2b$	$+^2aa$	$+^1acc$
	$-^1cc$	$+^2abb$
	$+^1ab$	$-^2cbb$
		$+^2aab$
		$-^2bcc$

Transio literam  $a$ , propter quantitatem  $-\frac{1}{2}a^3$ , quoniam  $a$  nus-  
 quam amplius 3 dimensionum reperitur. Hinc transiens ad  $b$ , in-  
 venio  $^2bxx + ^1abx + ^2aab - ^1ccb \propto 0$ , seu, dividens ubique  
 per  $^2b$ ,  $xx + \frac{1}{2}ax + ^1aa \propto 0$ , per quam Proposita dividi po-

test. Quòd si verò hæc divisio fieri non potuisset, conclusissem;  
 cum tantum per literam  $c$  adhuc explorandum foret, atque hæc  
 ipsa  $c$  non magis quàm litera  $a$ , sicut ex quantitate  $-^2cbb$  ma-  
 nifestum est, ad rem quidquam faciat; æquationem Propositam  
 ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non  
 posse.

Ordo verò, quem in hac inquisitione, an nimirum Proposita  
 æquatio per hujusmodi Fictas divisibilis sit, observo, talis est:  
 Primum inquiri, an nullæ aliæ quantitates, in quibus hæc abla-  
 ta litera reperitur, in Proposita æquatione existant. Si enim plu-  
 res reperiantur, tum ipsas omnes, quæ ita per illam dividi pos-  
 sunt, ut ea ubique evanescat, in unam summam colligo. (ut in  
 hoc exemplo, quantitates omnes in quibus  $b$  duas dimensiones  
 habet.) Quo peracto, si quotiens non idem sit cum præcedenti,  
 per quod divisio examinatur, concludo, hanc divisionem fieri non

Ggg

posse.



posse. Denique, si nullæ amplius in Proposita æquatione supersint quantitates, in quibus dicta litera reperitur, divido ultimò per illam Fictam æquationem omnes reliquas quantitates, in quibus litera illa non reperitur; quæque simul per dictam Fictam divisibiles sunt futuræ, si quidem Proposita æquatio per eam divisibilis existat.

Ut  ${}^2bxx + abx + {}^2aab - {}^2bcc \infty 0$  div. per  ${}^2b$ , fit  $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty 0$ ,  
—cc

itemq;  $\frac{{}^2bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x + {}^2abb \infty 0$  div. per  $+\frac{{}^2bb}{a+c}$ , fit  $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty 0$ .  
—cc

Si igitur hoc quotiens cum præcedenti non convenisset, etiam Proposita æquatio per  $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty 0$  divisibilis non fuisset.

—cc  
Quoniam autem conveniunt, & nullæ amplius quantitates in Proposita æquatione supersunt, in quibus litera  $b$  reperitur, in-  
quiro tandem, num omnes reliquæ etiam per  $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty 0$

—cc  
dividi possint. Hinc cum reliquæ quantitates, in quibus  $b$  non re-  
peritur, sint  $x^3 + \frac{1}{2}aax - \frac{1}{2}a^3$ , ipsæque per  $xx + \frac{1}{2}ax + aa$

—cc +  $\frac{1}{2}acc$  —cc  
dividi queant, ac oriatur  $x - \frac{1}{2}a$ ; idcirco & Proposita æquatio  
per  $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty 0$  dividi poterit. Quæ aliàs, ut manife-

—cc  
stum est, per illam non divisibilis fuisset, si ultima hæc divisio fieri  
non potuisset; Quotiens verò est  $x - \frac{1}{2}a + \frac{{}^2bb}{a+c} + {}^2b \infty 0$ .

## IV. REGULA,

*Quæ modum docet reducendi omnem Equationem, quæ  
produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum  
una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non  
continetur; quæq; litera in aliquo termino tot dimensiones  
habet, quot in nullo alio.*

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates,  
in quibus eadem litera reperitur, quæque simul sic divi-  
di pos-

di possunt, ut illa *litera* evanescat,  $\infty 0$ . Atque hoc in *singulis literis* facio, verum *non uno duntaxat modo*, sicut in præcedenti 3<sup>ia</sup> Regula, sed *modis omnibus*, quibus id fieri potest. Et si Proposita Æquatio ex duabus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit, erit etiam divisibilis per aliquam harum Fictarum Æquationum, in quibus dictæ *litera* sunt sublata.

Quoniam autem hæc Regula omnino eadem facienda præscribit, quæ præcedens 3<sup>ia</sup>; hoc tantum excepto, quod illic in singulis diversis literis duntaxat *uno modo*, uti dictum est, hic *modis omnibus* sit tentandum; sufficit uno exemplo rem declarare.

Proponatur itaque hæc æquatio

$$\begin{array}{r} x^2 - ax^2 + \frac{1}{2} aaxx - \frac{1}{2} aabx - \frac{1}{2} aabb \infty 0. \\ - \frac{1}{2} b^2 + 1\frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} abb - \frac{1}{2} ab^2 \\ - \frac{1}{2} bb \end{array}$$

Exordiens à *litera a*, prout unam habet dimensionem, obtineo  $-ax^2 + 1\frac{1}{2} abxx - \frac{1}{2} abbx - \frac{1}{2} ab^2 \infty 0$ , seu  $-x^2 + 1\frac{1}{2} bxx - \frac{1}{2} bbx - \frac{1}{2} b^2 \infty 0$ . Cujus ope Proposita æquatio dividi nequit (quod ipsum in hoc exemplo vel hinc apparet, quod hic ultimus terminus  $-\frac{1}{2} b^2$ , ultimum terminum Propositæ æquationis non absque literalis fractione dividat). Jam, non quidem ad aliam *literam* transeo, quemadmodum in præcedenti Regula, sed tamen diu considerabo eandem *a*, quamdiu adhuc aliæ quantitates in æquatione extant, in quibus illa plurium aut pauciorum dimensionum reperitur. Atque ideo cum ipsa *a* hic adhuc 2 dimensionum reperiatur, suppono similiter quantitates omnes, in quibus 2 dimensiones habet,  $\infty 0$ : nimirum,  $\frac{1}{2} aaxx - \frac{1}{2} aabx - \frac{1}{2} aabb \infty 0$ , seu  $xx - \frac{1}{2} bx - \frac{1}{2} bb \infty 0$ , quæ Propositam æquationem dividere potest. Quod si secus evenisset, ad aliam *literam* transissem, quandoquidem omnes quantitates, in quibus *a* continetur, solummodo dividi possunt per *a*, vel *aa*. Quocirca facto periculo in singulis literis, & omnibus modis, si comperiat, divisionem æquationis Propositæ per nullam Fictarum succedere, certum est, neque Propositam æquationem, ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci posse.



## V. REGULA,

*Qua modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur aliqua litera  $\infty 0$ ; investigeturque num æquatio, quæ hinc resultat, habeat cum Proposita communem divisorem. Si non habeat, supponatur iterum alia litera  $\infty 0$ , investigeturque num ista Resultans habeat communem divisorem: atque sic porrò, donec aut communis reperiatur divisor, aut nulla amplius litera superfit, quæ non supposita sit  $\infty 0$ . Et si non inveniatur communis divisor, signum erit, æquationem Propositam, ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur, produci non posse.

Ex. gratiâ, si proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{r} x^5 + abx^3 + 30b^3xx + 34ab^3x + 20ab^4\infty 0, \\ + bb - 10abb + 7a^4 + 10a^4b \\ + \frac{a^4}{bb} - \frac{2a^4}{b} \end{array}$$

supponaturque litera  $a\infty 0$ , resultabit inde  $x^5 + bbx^3 + 30bbbx\infty 0$ , quæ cum Proposita communem habet divisorem, nempe  $xx - 3bx + 10bb\infty 0$ . Quod, si aliter evenisset, aliam literam, nimirum  $b$ , posuisssem  $\infty 0$ . & si inde Resultans æquatio etiam non habuisset communem divisorem, conclusissem æquationem Propositam, quoniam tantum duas istas  $a$  &  $b$  diversas habet literas, non resultare posse ex multiplicatione duarum aliarum, &c.

Res eodem modo se habet in æquationibus, quæ irrationales quantitates includunt, ita ut non opus sit alia exempla adungere.

SE-

SEQUENTES 6<sup>ta</sup>, 7<sup>ma</sup>, ET 8<sup>va</sup> REGVLÆ SE EXTENDVNT AD OMNES ÆQVATIONES, QVÆ EX MVLTIPPLICATIONE DVARVM ALIARVM PRODVCÍ POSSVNT, IN QVARVM VNA IRRATIONALIS QVANTITAS INCLVDITVR, QVÆ IN ALTERA NON CONTINETVR.

VI. REGVL A,

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem comprehendit, quæ in altera non continetur; quæq; quantitas non eundem dimensionum numerum in diversis Terminis habet.*

Suppono, &c.

VII. REGVL A,

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem comprehendit, quæ in altera non continetur; quæq; quantitas in aliquo Terminò tot habet dimensiones, quot in nullo alio.*

Suppono, &c.

VIII. REGVL A,

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur, &c.

Quoniam inter hanc 6<sup>tam</sup> & 3<sup>iam</sup> Regulam, & inter 7<sup>iam</sup> & 4<sup>am</sup>, nec non inter 8<sup>vam</sup> & 5<sup>am</sup> haud magna disparitas exiit, & tantum pro litera poni debet irrationalis quantitas; erunt hæ Regule per

Ggg 3

12 per



læ per illas jam explicatæ. Si enim pro unaquaque diversa quantitate irrationali duntaxat diversam literam concipias aut ponas, evadent hæc cum illis planè eadem. Atque ideirco hæc verba in 6<sup>ta</sup> Regula: *quæque quantitas æquè multarum dimensionum in diversis terminis non existit*; & hæc in 7<sup>ma</sup>: *quæque quantitas in aliquo termino talem dimensionum numerum habet, qualem in nullo alio*; itemque quid sit *quantitas alia irrationalis*, nullâ explicatione indigent.

Et Corollarii loco hîc annotari posset, hanc 8<sup>va</sup>m Regulam etiam comprehendere Reductionem omnis æquationis, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una est rationalis, hoc est, in qua nullum est signum radicale, & altera irrationalis.

Quia verò hæc 5<sup>ta</sup> & 8<sup>va</sup> Regula præsupponunt inventionem communis duarum æquationum divisoris, adjungam hîc, quo ego utor,

*Modum, inveniendi maximum, duarum (vel plurium) sive æquationum sive quantitatum, divisorem communem.*

Proponatur, exempli causâ, inveniendus maximus communis divisor duarum sequentium æquationum vel quantitatum, (considero enim quantitates haud secus atque æquationes, supponendo sc: illas  $\infty 0$ : cum suppositio hæc, ad inveniendum earum communem divisorem, nullum errorem inferre possit.)

$$d^3c - acdd + ^2aab - ^2abcd \infty 0, \text{ \& } d^4c - bbcd + caabb - caadd \infty 0.$$

Primò itaque inquiri, num aliqua litera vel numerus reperiatur, cujus ope singuli utriusque æquationis termini dividi queant. Hoc enim si contingat, oportet priùs ejusmodi divisionem instituere, ut hîc per literam *c*, fiuntque

$$d^3 - add + ^2aab - ^2abd \infty 0, \text{ \& } d^4 - bbdd + aabb - aadd \infty 0.$$

Deinde ad libitum sumatur aliqua litera, quæ in utraque harum æquationum reperiatur, ut *d*, *a*, vel *b*. Atque considerando ipsam, puta *d*, tanquam incognitam quantitatem, redigatur utraque in ordinem, habebiturque

$$\begin{array}{ll} \text{1<sup>ma</sup> Æquatio} & \text{2<sup>da</sup> Æquatio} \\ d^3 - add - ^2abd + ^2aab \infty 0. & d^4 * - bbdd * + aabb \infty 0. \\ & - aa \end{array}$$

Porro valor ipsius  $d^3$ , per 1<sup>am</sup> æquationem inventus, substituitur

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 423  
tuatur ubique in locum ipsius  $d$  secundæ æquationis: invenieturque

$$d^2 \propto ad^2 +^2 abdd -^2 aabd$$

seu

$$aadd +^2 aabd -^2 a^2b \\ -^2 aabd +^2 abdd$$

$$\text{Hoc est, } aabb -^2 a^2b +^2 abdd - bddd \propto 0$$

$$\& dd \propto \frac{a^2b - aabb}{ab - bb} \text{ seu } aa; \& d \propto a, \text{ seu } d - a \propto 0.$$

Si jam hujus  $dd$  valor substituatur in ipsius locum in 1<sup>ma</sup> æquatione, habebitur  $aad - a^2 -^2 abd +^2 aab \propto 0$ .

Denique substituatur ipsius  $d$  valor  $a$  in ejus locum in hac ultima, obtinebitur  $a^2 - a^2 -^2 aab +^2 aab \propto 0$ .

In hac igitur cum termini omnes se mutuò destruant, indicio est tam æquationem  $d^2 - add -^2 abd +^2 aab \propto 0$  quam  $d^2 - bddd + aabb \propto 0$  esse divisibilem per  $d - a \propto 0$ , &  $-aa$

$d - a$  utriusque maximum communem divisorem existere. Atque adeò, cum duæ Propositæ æquationes (vel quantitates) prius per  $c$  sint divisæ, manifestum est earundem maximum communem divisorem fore  $d - a$  in  $c$ , seu  $dc - ac$ .

Quòd si autem aliam literam quàm  $d$  seu incognitam quantitatem consideremus, licebit similiter illius ope eosdem semper divisores invenire. Exempli gratiâ, si  $a$  ut incognita quantitas consideretur, obtinebitur pro

1<sup>ma</sup> Æq.

$$aa - d a + \frac{d^2}{b} \propto 0. \\ - \frac{dd}{b}$$

2<sup>da</sup> Æq.

$$aa - \frac{bbdd + d^2}{bb - dd} \propto 0. \\ \text{vel } aa - dd \propto 0, \text{ seu } aa \propto dd \\ \text{vel } a - d \propto 0, \text{ seu } a \propto d.$$

Subrogetur jam  $dd$  valor ipsius  $aa$ , per 2<sup>dam</sup> æquationem inventus, in locum  $aa$  primæ æquationis, & invenietur pro ipsa

$$dd - da + \frac{d^2}{b} \propto 0. \\ - \frac{dd}{b}$$

Denuo



Denuo in hac ultima in locum ipsius  $a$  subrogetur ejus valor  $d$ ,  
 obtinebitur  $dd - dd + \frac{d^3}{2b} \infty 0$ .

$$-\frac{ddd}{2b}$$

In hac igitur cum rursus termini omnes se mutuò tollant, argumentum est, utramque æquationem, ut ante, &c.

Eadem est ratio, quæcunque tandem litera pro incognita quantitate sumatur.

Si verò accidisset, ut nec per subrogationem valoris ipsius  $d^3$ , nec ipsius  $dd$ , nec denique ipsius  $d$ , termini omnes se mutuò destruxissent, argumentum fuisset, quòd duæ illæ æquationes  
 $d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0$ , &  $d^4 - bdd^2 + aabb \infty 0$   
 $-aa$

nullum communem divisorem habuissent, & quòd duarum Propositionarum æquationum, quæ prius per  $c$  fuerunt divisæ, nullus communis divisor præter  $c$  extitisset. Excepto tantum, ubi divisio fieri potest per ejusmodi quantitates, quæ simul possunt fieri  $\infty 0$ , atque in causa esse, quòd valor ejus literæ, quæ tanquam incognita quantitas consideratur, per istam æquationem inveniri non possit.

Exempli gratiâ, si in Propositionis æquationibus literam  $b$ , ut incognitam quantitatem considerassem, obtinuisssem

$$b \infty \frac{d^3 - add}{2ad - 2aa} \text{ seu } \frac{dd}{2a}, \text{ \& } bb \infty \frac{d^4 - aadd}{dd - aa} \text{ seu } dd$$

vel  $b \infty d$ .

Ubi videmus, valores ipsius  $b$ , nempe  $\frac{dd}{2a} \infty d$ , se invicem non tollere, ideoque concludendum esset, has duas æquationes non habere communem divisorem, si nempe ejusmodi quantitates non reperirentur, quæ, dum  $\infty 0$  ponuntur, efficiunt, ut valor ipsius  $b$  inveniri nequeat. Quemadmodum si ponatur  $d - a \infty 0$ , non poterit valor ipsius  $b$  per 1<sup>am</sup> æquationem inveniri: quippe tum  $d^3$  erit  $\infty add$ .

Priusquam itaque concludatur, non dari duarum sive æquationum sive quantitatum communem aliquem divisorem: 1<sup>mo</sup> observandum venit, num ejusmodi quantitates in æquatione reperiantur, quæ in causa esse possunt, quòd valor incognitæ literæ,  
 seu

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 425

ſeu inſtar incognitæ conſiderata, per illam æquationem inveniri nequeat. 2<sup>do</sup> ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant. quemadmodum in hoc exemplo, ubi reperitur  $d - x \infty 0$ , cujus ope utraque æquatio dividitur, quod, ſubrogando  $a$  in locum  $d$ , uno intuitu videre eſt. At verò ſi aliter eveniſſet, concluſiſſem, non dari, &c.

Unum adhuc exemplum adjungam.

Proponamus inveniendum eſſe maximum communem diviſorem harum duarum æquationum ſive quantitatum

1<sup>ma</sup> Æq.

2<sup>a</sup> Æq.

$$12a^4 + 11a^3xx + x^4 - 4ax^3 - 10a^2x \infty 0, \& 11a^3xx - 4ax^3 + 12a^4 - 16a^2x + x^4 \infty 0.$$

Quoniam autem hæ non diviſibiles ſunt per aliquam literam nec per numerum, conſidero literam aliquam, ad libitum ſumendam, tanquam incognitam quantitatem, puta  $x$ , atque operationem porro inſtituo, ut ſequitur

$$\begin{array}{r} \text{per 1<sup>am</sup> invenitur } x^4 \infty 4ax^3 - 11a^3xx + 10a^2x - 12a^4 \\ \text{add.} \quad - 3ax^3 + 12a^3xx - 16a^2x + 24a^4 \\ \hline \text{fit pro 2<sup>a</sup> æquatione} \quad ax^3 + 4a^3xx + 4a^2x + 12a^4 \infty 0 \\ \text{div. per } a. \quad x^3 \infty 4ax^2 - 4a^2x - 12a^3. \end{array}$$

Subſtituatur jam hic valor ipſius  $x^3$  in ejus locum in alterutra æquatione, utpote primâ (quamvis autem in hoc exemplo parum interſit, poteſt tamen in multis caſibus magnum eſſe diſcrimen, tunc enim oportet, brevitatis cauſâ, eligere eam, per quam operatio facillimè procedit; quemadmodum vulgò, cum duæ ſunt, dimensionibus differentes, ea, quæ pauciores habet, eligenda venit), obtinebiturque  $xx \infty 4x - 6a$ .

Subſtituatur rursus hic valor ipſius  $xx$  ubique in ejus locum in una præcedentium æquationum, ſumendo, brevitatis cauſâ, præcedentem; dimensionum, inveniatur

2<sup>a</sup> Æq.

$$\begin{array}{r} x^3 \infty 4ax^2 - 6a^2x \text{ ſeu } \left. \begin{array}{l} + 4ax^2 \\ - 6a^2x \end{array} \right\} \infty 0 \\ + 4a^3xx \infty \quad \quad \quad + 4ax - 6a^2 \\ + 4a^3xx + 12a^4 \infty \quad \quad \quad + 4a^3xx + 12a^4 \end{array}$$

In qua videmus terminos omnes ſe invicem tollere, quod arguit, hæcæ Propoſitas æquationes ſive quantitates diviſibiles eſſe

H h h

per



per  $xx - ax + 6aa$ ; quæ ideo maximus est earum communis divisor.

Porro manifestum est, si quis omnes duarum vel plurium sive *Æquationum sive Quantitatum communes divisores* invenire velit, tantum inveniendos esse *divisores omnes Maximi earum communis divisoris*.

Præterea etiam liquet, non tantum in multis casibus, per 1<sup>am</sup> & 2<sup>am</sup> Regulam (uti annotatum est) uno intuitu videri posse, duas *Æquationes* vel *Quantitates* non habere communem aliquem divisorem; verum etiam Regulas omnes, de Reductione *æquationum* agentes, ad inveniendos omnes ipsarum communes divisores inservire posse.

## IX. REGULA,

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, quæ per aliam, cujus solummodo unus terminus datus est, dividi potest.*

Ostendam hoc in uno aut altero tantum exemplo, quoniam generalis modus ex iis deprehendi satis poterit.

Proponatur itaque æquatio  $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 300$ , deturque illam dividi posse per aliam duarum dimensionum, cujus ultimus Terminus sit  $-2$ . Esto autem illa  $xx + yx - 200$ , seu,  $xx - yx + 2$ . Hunc valorem ipsius  $xx$  ubique substituo in ejus locum, aliamque æquationem loco Propositæ obtineo, in qua  $x$  tantum unius dimensionis reperitur: nimirum,  $y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5$  in  $x$ ,  $-2y^3 - 8yy - 16y - 1600$ . quemadmodum ex sequenti operatione videre est.

xxo

$$\begin{array}{rcl}
 & \frac{xx\infty - yx + 2}{xx\infty - yx + 2} & \\
 \text{ergo } x^2\infty y y x x - 4yx + 4 & \text{seu} & -y^3x + 2yy \\
 & & -^4yx + 4 \\
 \frac{x^2\infty - y^3xx + 2yyx}{-4yx + 4x} & \text{seu} & +y^3x - 2y^2 \\
 & & +^4yx \\
 & & +^4yyx - 8y \\
 & & +^4x \\
 -4x^2\infty & & +^4y^3x - 16 \\
 & & +^4yx - 8yy \\
 +4x^3\infty - 4yx + 8x & \text{seu} & +^4yx - 8y \\
 & & +^4x \\
 +1^{\frac{1}{2}}xx\infty & & -1^{\frac{1}{2}}yx + 3 \\
 -7x - 3\infty & & -7x - 3 \\
 \text{summa} & & +y^3x - 2y^2 \\
 & & +4y^3 - 8yy\infty 0. \\
 & & +^4yy - 16y \\
 & & +14^{\frac{1}{2}}y - 16 \\
 & & +5
 \end{array}$$

Deinde confidero unumquemque terminum separatim æquationis hujus deductæ  $\infty 0$ , & cum hîc duo tantum sint termini, habeo inde hæc duas æquationes

$$\begin{array}{l}
 \text{I.} \quad y^3 + 4y^2 + 10yy + 14^{\frac{1}{2}}y + 5\infty 0, \text{ \& } -2y^3 - 8yy - 16y - 16\infty 0 \\
 \text{seu} \quad y^3 + 4yy + 8y + 8\infty 0.
 \end{array}$$

Quarum quidem æquationum, si juxta præcedentem methodum quærat maximus communis divisor, inuenietur pro ipso  $y + 2\infty 0$ ; ita ut Proposita æquatio, cum  $y$  sit  $\infty - 2$ , divisibilis sit per  $xx - 2x - 2\infty 0$ .

Eodem modo, proponatur hæc æquatio  $x^4 - 24x^3 + 244xx - 24^3x + 4^4\infty 0$ , deturque ipsam dividi

posse per æquationem duarum dimensionum, cujus ultimus terminus sit  $+44$ . Esto autem æquatio illa  $xx + yx + 44\infty 0$ , adeoque  $xx\infty - yx - 44$ . Hinc, subrogato hoc valore in locum  $xx$ , obtinebitur loco Propositæ æquationis alia, in qua  $x$  unius tantum erit dimensionis, nempe  $-y^3x - 44yy\infty 0$ .

$$\begin{array}{r}
 -^44yy - ^44^3y \\
 +^444y + 4444 \\
 \text{Hhh } 2
 \end{array}$$

Cujus





DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 429  
 methodum est  $y - a \propto 0$ , ideoque  $y \propto a$ ; cumque  $z$  sit  $\propto$ ;  $ay - y^2 - bby +^2abb -^2a^3$ , erit inde  $z$  etiam  $\propto +^2abb$ . Æquatio autem, per quam Proposita dividi potest, posita erat  $x^3 + yxx +^2aax + z\propto 0$ . Quocirca si in hac subrogentur valores quantitatum incognitarum  $y$  &  $z$ , inveniatur pro ipsa  $x^3 + axx +^2aax +^2abb \propto 0$ .

Atque ita de aliis omnibus Propositis æquationibus, sive rationalibus sive irrationalibus, & vel aliquam vel nullam fractionem habentibus, atque etiam sive ultimus Terminus, sive aliquis alius, quem libuerit, æquationis, per quam Proposita dividi queunt, datus fuerit, sive alicui quantitati (ut in his exemplis), sive nihilo æqualis sit; cujus quidem generis nullum exemplum assero, cum operatio haudquaquam diversa existat. Id tantum addam, hæc omnia etiam ex comparatione terminorum duarum ejusdem formæ æquationum inveniri posse.

10<sup>ma</sup>, ET 11<sup>ma</sup> REGVLÆ SE EXTENDVNT AD OMNEM ÆQVATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QVANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NVLLÆ REPERIANTVR, EXCEPTIS TANTVM ILLIS ÆQVATIONIBVS, IN QVIBVS SIGNA RADICALIA SVNT, QVÆ INCOGNITAM QVANTITATEM INCLVDVNT.

Cum autem hæ duæ Regulæ Methodum requirant, qua omnia signa radicalia, quæ incognitam quantitatem includunt, si in æquatione Proposita talia fortè fuerint, primum tollantur; sequentes verò Regulæ, quibus omnia signa sine discrimine primum auferantur: præmittam

*Modum tollendi signa radicalia ex qualibet æquatione Proposita.*

Proponatur, verbi gratiâ, æquatio  $n \propto e + g + h + k + m$ , &c. in qua 1<sup>o</sup>. quælibet litera quantitatem designet, signo radicali  $\sqrt{Q}$  adfectam. Multiplicetur utraque pars quadratè, & evanescet signum quantitatis  $n$ . Quoniam autem reliquæ literæ  $e, g, h, k, m$ , &c. aut unam aut duas dimensiones habebunt, signumque radicale, in quantum duas habent, evanescet; manifestum est, ob-

H h h 3

tineri



uineri posse æquationem, in qua  $e$  æquatur aliis terminis, in quibus  $e$  non comprehenditur. Quæ æquatio si rursus eodem modo in se ducatur quadratè, evanescet pariter signum radicale ipsius  $e$ ; & quoniam in hac ultima æquatione tunc reliquæ literæ habebunt aut 1, aut 2, aut 3, aut 4 dimensiones, ac ipsæ in quantum ex paribus dimensionibus constant nullum signum radicale habent, & quantum ex imparibus constant ratione tollendi signi radicalis solummodo considerandæ sunt tanquam unâ duntaxat dimensione constantes, cum duæ signo radicali semper carent: manifestum est rursus inveniri posse æquationem, in qua  $g$  sit æqualis aliquot terminis, in quibus  $g$  non comprehenditur. Quæ æquatione denuo quadratâ, sublatum item erit signum radicale ipsius  $g$ . Atque ita facile est intelligere, quâlibet quadratione unum signum radicale tolli.

Majoris perspicuitatis ergo addatur sequens operatio, existente  $n \propto e + g + h + k$ , ubi quadrando utramque partem æquationis prodit æquatio  $nn \propto ee + gg + hh + kk + 2eg + 2eh + 2ek + 2gh + 2gk + 2hk$ . Brevitatis autem causâ, pro  $\frac{nn - ee - gg - hh - kk}{2}$  scribatur  $pp$ ; cum hæc quantitates signo radicali careant; & fit  $pp \propto eg + eh + ek + gh + gk + hk$ , sive  $e \propto \frac{pp - gh - gk - hk}{g + h + k}$ . Unde quadrando rursus utramque partem invenitur:

$$ee \propto \frac{p^4 + gghh + ggkk + hhkk - ppgh - ppgh - ppgh + gghk + ghhk + ghkk}{gg + hh + kk + gh + gk + hk}$$

seu

$$p^4 + gghh + ggkk + hhkk - ppgh - ppgh - ppgh + gghk + ghhk + ghkk - ghkk - gg - hh - kk - gh - gk - hk \text{ in } ee \propto 0.$$

Supponatur, ut ante, brevitatis causâ,

$$p^4 + gghh + ggkk + hhkk - gg - hh - kk \text{ in } ee \propto q^4$$

$$+^4kk -^4pp -^4ee \propto rr$$

$$+^4hh -^4pp -^4ee \propto ss$$

$$+^4gg -^4pp -^4ee \propto tt,$$

erit-

eritque  $q^3 + rrgb + ffgk + tthk \propto 0$

$$\frac{q^3 + tthk}{rrb + ffgk} \propto -g$$

$$\frac{q^3 + t^3 b b k k + q^3 t t h k}{r^3 b b + f^3 k k + r r f f h k} \propto g g$$

$$q^3 + t^3 b b k k + q^3 t t h k - r^3 b b - f^3 k k - r r f f h k \text{ in } g g \propto 0.$$

Supponatur rursus, brevitatis causâ,

$$q^3 + t^3 h h k k - r^3 h h g g - f^3 k k g g \propto v^3,$$

$$\& q^3 t t - r r f f g g \propto w^6:$$

$$\text{fietque } v^3 + w^6 h k \propto 0$$

$$v^3 \propto -w^6 h k$$

& invenietur  $v^3 \propto w^6 h h k k$ . Quæ æquatio ab omnibus signis radicalibus liberata est.

Deinde ponatur unaquæque litera æquationis superioris  $n \propto e + g + h$ , &c. designare quantitatem signo radicali  $\sqrt{C}$ . affectam. In hac igitur si loco quadratæ multiplicationis utraque pars multiplicetur cubicè, evanescet signum radicale ipsius  $n$ , & unaquæque reliquarum literarum  $e, g, h$ , &c. acquirere 1, 2, aut 3 dimensiones. In quantum autem tres dimensiones habent, in tantum carent etiam signo radicali, adeò ut hâc ratione obtineri queat æquatio, in qua  $e$  non nisi 1 aut 2 dimensiones habere potest. Quocirca multiplicando omnes hosce terminos per  $e$ , obtinebitur æquatio, in qua  $e$  præter 1, 2, & 3 dimensiones habere nequit. In quantum autem 3 habet, in tantum quoque signum radicale, uti dictum est, evanescit; ac proinde ipsa  $e$  in hac æquatione etiam non nisi 1 & 2 dimensiones retinere poterit. Hinc si ope hujus æquationis quæratuor valor ipsius  $e e$ , isque in locum  $e e$  præcedentis substituat, obtinebitur æquatio in qua  $e$  unam tantum dimensionem habebit, atque ideo inveniri poterit  $e$  æqualis aliquot terminis, in quibus ipsa non comprehenditur. Quæ æquatio, si deinde cubetur, dabit aliam, in qua similiter signum radicale ipsius  $e$  prorsus evanescet. vel potest rursus per  $e$  multiplicari, & valor  $e e$  de novo inveniri, qui iterum, ut antea, positus loco  $e e$ , habes valorem ipsius  $e$  alio adhuc modo; ideoque duo hi valores invicem comparati, æquationem dabunt, in qua  $\sqrt[3]{C}$  am-  
ipsum



432 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.

ipsius  $e$  non reperies. Atque sic omnia alia signa radicalia ex æquatione tolli possunt; quod facillimè perspicitur, si tantum advertamus, quòd, verbi gratià,  $g, gg, g^3, g^5, g^7, g^9, g^{11}, g^{13}, g^{15}$ , &c. solummodo habendæ sint pro  $g, gg$ , cum  $g^3$  signum radicale deponat. Quæ ut magis perspicua evadant, sequentem operationem adjicere visum fuit.

Sit ex. gr.

$$\begin{array}{r} n \infty e + g \\ \hline n^3 \infty e^3 + 3 e e g + 3 e g g + g^3 \\ \hline n^3 - e^3 - g^3 \infty 3 e e g + 3 e g g. \end{array}$$

Esto jam, brevitatis causâ,  $n^3 - e^3 - g^3 \infty f^3$ , quoniam ipsæ Asymmetriâ carent, fietque  $f^3 \infty 3 e e g + 3 e g g$

$$\begin{array}{r} f^3 e \infty 3 e^3 g + 3 e e g g \\ \hline \& \frac{f^3 e - 3 e^3 g}{g} \infty 3 e e g. \end{array}$$

Invento valore ipsius  $3 e e g$  in ejus locum in æquatione præcedente subrogato, habebitur:

$$\begin{array}{r} f^3 \infty \frac{f^3 e - 3 e^3 g}{g} + 3 e g g \\ \hline f^3 g \infty f^3 e - 3 e^3 g + 3 e g^3 \\ \hline f^3 g + 3 e^3 g \infty f^3 e + 3 e g^3 \\ \hline \frac{f^3 g + 3 e^3 g}{f^3 + 3 g^3} \infty e. \end{array}$$

Denique ponatur, brevitatis causâ,  $f^3 + 3 e^3 \infty p^3$ , &  $f^3 + 3 g^3 \infty q^3$ , cum singulæ signum radicale deponant,

eritque  $\frac{p^3 g}{q^3} \infty e$

&  $\frac{p^3 g^3}{q^3} \infty e^3$ . Quæ æquatio ab Asymmetria libera est. Vel

hoc modo: multiplicetur  $\frac{p^3 g}{q^3} \infty e$  per  $e$ , erit  $\frac{p^3 g e}{q^3} \infty e e$ ; & quoniam inventa est  $f^3 \infty 3 g e e + 3 g g e$ , seu,  $\frac{f^3 - 3 g g e}{3 g} \infty e e$

$$\begin{array}{r} \text{erit } \frac{p^3 g e}{q^3} \infty \frac{f^3 - 3 g g e}{3 g} \\ \hline \& 3 g g p^3 e \infty q^3 f^3 - 3 q^3 g g e \end{array}$$

$$\text{ergo } e \infty \frac{q^3 f^3}{3 g g p^3 + 3 q^3 g g} \infty \frac{p^3 g}{q^3}$$

&  $q^6 f^3 \infty 3 g^3 p^6 + 3 g^3 p^3 q^3$ . Quæ æquatio itidem ab omni signo radicali libera est.

Pari

Pari ratione tolli quoque possunt signa quævis altiora, sive illa ejusdem, sive diversæ dimensionis sint. Sed notandum est, quòd signa hæc, sive ipsa cognitæ, sive incognitæ quantitibus præfigantur, per hunc modum semper quidem tolli possint, sed cum sæpius non esse brevissimum, quando scilicet signa radicalia ad quantitates cognitæ pertinent; quemadmodum pag. 75 Geometriæ cernere licet, ubi constat, quædam signa tolli posse multiplicando radicem æquationis per certam aliquam quantitatem, quo opere ipsa in aliam æquationem transmutatur, æquæ multas dimensiones habentem.

Dantur præterea adhuc alia compendia, quorum supra allatum exemplum specimen erit: hæc enim æquatio  $f^3 \propto 3ge + 3gge$  divisa per  $n$  ab una parte, & per  $e + g$  (quæ æqualis est  $n$ ), ab altera parte, dat  $\frac{f^3}{n} \propto 3ge$ , cujus partes cubicè multiplicatæ dabunt  $\frac{f^9}{n^3} \propto 27g^3e^3$ , æquationem, in qua nullum signum radicale invenitur: Sed quoniam proposui tantummodo hîc generalem modum indicare, quo semper omnia signa radicalia tolli queant, & non compendia, quibus in multis casibus faciliùs eò pervenire posses, monstrare; ideo huic rei finem imponam, & ad Regulas Reductionum revertar.

## X. REGULA,

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, cujus incognita quantitas, (vel alia litera, quæ tanquam incognita considerari potest) duos vel plures æquales habet valores.*

Primò si in Proposita æquatione duæ æquales radices existant, multiplico eam per Arithmeticam Progressionem pro libitu assumptam: nimirum, 1<sup>um</sup> terminum æquationis per 1<sup>um</sup> terminum progressionis; 2<sup>um</sup> terminum æquationis per 2<sup>um</sup> terminum progressionis, & sic deinceps; & Productum, quod inde fit, erit  $\propto 0$ . Deinde, cum sic duas habeam æquationes,

Iii

quæ-



quæro, per Methodum superius explicatam, maximum earum communem divisorem; atque hujus ope æquationem Propositam toties divido, quoties id fieri potest.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio  $x^3 - 4xx + 5x - 200$ , in qua duæ sunt æquales radices. Multiplico ergo ipsam per Arithmetica Progressionem qualemcunque, hoc est, cujus incrementum vel decrementum sit vel 1, vel 2, vel 3, vel alius quilibet numerus; & cujus primus terminus sit vel 0, vel +, vel - quam 0: Ita ut semper ejus ope talis terminus æquationis tolli possit, qualem quis voluerit, collocando tantum sub eo 0.

Ut si, exempli causâ, ultimum ejus terminum auferre velim, multiplicatio fieri potest ipsius  $x^3 - 4xx + 5x - 200$  per hanc progressionem

$$\begin{array}{r} 3. \quad 2. \quad 1. \quad 0. \\ \hline \end{array}$$

$$\text{fietque } 3x^3 - 8xx + 5x - 200.$$

Maxima autem communis divisor hujus & Propositæ æquationis est  $x - 100$ , per quam Proposita bis dividi potest; ita ut ejusdem radices sint 1, 1, & 2.

Sic si cupiam 1<sup>um</sup> æquationis terminum auferre, multiplicatio institui potest ipsius  $x^3 - 4xx + 5x - 200$  per hanc progressionem

$$\begin{array}{r} 0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \\ \hline \end{array}$$

$$\text{\& fit } * - 4xx + 10x - 600.$$

Cujus quidem ac Propositæ æquationis maximus communis divisor, ut antea, est  $x - 100$ .

Similiter si 2<sup>dum</sup> terminum tollere lubeat, multiplicatio fieri potest, hoc pacto:

$$\begin{array}{r} x^3 - 4xx + 5x - 200 \\ + 1. \quad 0. \quad -1. \quad -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{\& prodibit } x^3 * - 5x + 400.$$

Cujus item & Propositæ maximus communis divisor est  $x - 100$ .

Ubi notandum, non necessarium esse, semper uti Progressione cujus excessus sit 1, quanquam ea communiter sit optima.

Cæterum notandum, inter omnes has diversas operationes, quamvis eundem communem divisorem maximum exhibeant, tamen alias aliis sæpe esse præferendas, quandoquidem unius termini destructione sæpenumero multò facilius ad finem pervenitur quam

quàm alterius. Neque etiam tenemur hunc divisorem immediate ex Proposita æquatione & aliqua hujusmodi Progressione genita investigare: cum duæ ex his eligi possint, quarum beneficio cum invenire liceat. Ut sumendo, verbi gratiâ,  $3xx - 8x + 500$  &  $-4xx + 10x - 600$ , vel  $3xx - 8x + 500$  &  $x^3 - 5x + 400$ , vel  $-4xx + 10x - 600$  &  $x^3 - 5x + 400$ . Et sæpe etiam longè compendiosius est, duo hujusmodi producta sibi eligere, ac deinde illorum communem divisorem quærere, quàm uti uno aliquo producto & æquatione Proposita. Quæ quidem omnia usus hujus Regulæ abundè docebit.

Quemadmodum autem in hoc exemplo, ita in quovis alio Proposito procedo; cum perinde sit, sive æquatio numerica, sive literalis fuerit, & sive fractiones aut surdas quantitates includat, sive non; modò incognita quantitas inter surdas non contineatur: ita ut superfluum sit plura exempla hac de re afferre. Quocirca ad alteram hujus Regulæ partem transeo.

2<sup>da</sup>. Si in Proposita æquatione 3 æquales radices fuerint, multiplico illam per Arithmeticam Progressionem, ut antea; eritque Productum  $00$ : Hoc Productum rursus multiplico per Arithmeticam Progressionem; eritque hoc secundum Productum etiam  $00$ . Si æquatio Proposita 4 radices æquales habeat, ter multiplico; si 5, quater; & ita semper obtinebuntur tot æquationes, quot radices æquales in æquatione Proposita continentur.

Exempligratiâ, detur hæc æquatio  $x^4 - 6xx + 8x - 300$ , habens 3 æquales radices.

Primò multiplico eam per c. 1. 2. 3. 4.  
 & fit  $-12xx + 24x - 1200$ .

Hoc productum iterum multiplico per 0. 1. 2.  
 & provenit  $24x - 2400$ .  
 eritque communis divisor  $x - 100$ .

Ita ut Proposita æquatio habeat has 4 radices 1, 1, 1, &  $-3$ . Et sic de aliis omnibus.

Iii 2

Quod



Quod verò usum hujus Methodi concernit, is tantus est, in inveniendis Tangentibus, determinandis Maximis & Minimis, & quibuscumque extremis, ut, quamvis se ad alia non extenderet, immensus tamen dici posset. Etenim reductis talibus Problematis ad Aequationem, in qua hæc sola conditio ad ejus determinationem adhuc requiritur, ut incognita quantitas (aut alia quævis littera, quæ ut incognita consideratur) ad duas æquales radices determinetur: poterit Quæsitum beneficio hujus Methodi quàm facillimè inveniri. quippe nihil aliud opus est, quàm æquationem dicto modo per Arithmeticam Progressionem multiplicare: cum duæ hæc æquationes tunc omnes Problematis conditiones sint comprehensuræ, ita ut ipsæ tantum resolvendæ restent. Et notandum est, hoc sæpe beneficio solius productæ æquationis, nullo, aut exiguo admodum labore, præstari posse; quod patet in omnibus illis exemplis, quæ de inveniendis tangentibus pagin. 40, 41, & 42 à D<sup>no</sup> des Cartes in sua Geometria sunt allata, in quibus  $r$  &  $s$  incognitæ existunt &  $y$  quidem cognita, sed quæ ut incognita consideratur: omnes enim illorum Problematum conditiones æquationibus erunt comprehensæ, si illæ ipsæ æquationes sic determinentur, ut dicta quantitas  $y$  duas æquales radices obtineat.

Primum dictorum exemplorum est  $y \sqrt{\frac{qr - r^2}{q - r}} y \sqrt{\frac{r^2 - qv}{q - r}} \infty 0$   
 Multiplico per meam Methodum per 2.  $\frac{1}{2} \quad 0$

$$\begin{aligned} \text{fit } & y y + \frac{qr - r^2}{q - r} y \infty 0 \\ \text{seu } & \frac{qy - r}{q} y + qr \infty qv \\ & \& y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2} r \infty v. \end{aligned}$$

2<sup>dum</sup> exemplum est

$$\begin{aligned} y^6 - 2by^5 - 2cdy^4 + 2bcdy^3 - 2bbcdyy - 2bccddy + 2bbccdd \infty 0 \\ + bb - 2ddv + cdd \\ + dd - ddf \\ + ddvv \end{aligned}$$

Mult. per  $+4, +3, +2, +1, 0, -1, -2$

eritque productum

$$\begin{aligned} 4y^6 - 8by^5 - 4cdy^4 + 4bcdy^3 - 4bbcdyy - 4bccddy + 4bbccdd \infty 0 \\ + 2bb - 2ddv \\ + 2dd \end{aligned} \quad *$$

Divi-

Dividendo jam per  $2ddy$  & transferendo  $v$  ad alteram partem,

obtinebitur  $\frac{2yy}{dd} - \frac{2by}{dd} - \frac{2cy}{d} + \frac{2bc}{d} + \frac{bce}{yy} - \frac{bbce}{y^3} \propto v$ .

$$+ \frac{bbv}{dd}$$

$$+ y$$

; tunc autem exemplum ejusdem est naturæ cum 1<sup>mo</sup>.

Ubi patet, in omnibus hisce exemplis Quæsitum ex sola Producta æquatione uno intuitu inveniri,  $y$  enim cognita est, atque  $v$ , quæ erat incognita ac sola quærebatur, jam etiam innotuit.

At verò sæpe etiam accidit, ut Quæsitum ex sola hac Producta æquatione inveniri nequeat; quemadmodum contingit si valorem quantitatis incognitæ  $s$  investigare velimus. Quippe tunc valor ipsius  $v$  in prima æquatione in ejus locum subrogandus est, vel potius in alia æquatione, per aliam Progressionem productâ, cujus beneficio ex illa prima terminus aliquis pro lubitu (excepto eo, qui per 1<sup>am</sup> Progressionem est sublatus) tolli potest.

Exempli gratiâ, in 1<sup>mo</sup> exemplo multiplicatum fuit per  $2, 1, 0$ , ac inde inventum  $v \propto y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$ ; Jam si multiplicetur

$$yy + \frac{qr - qv}{q - r} y + \frac{qv - qss}{q - r} \propto 0$$

$$\text{per } +1, \quad 0, \quad -1 :$$

$$\text{obtinetur } yy \quad * \quad \frac{-qv + qss}{q - r} \propto 0$$

mult. per  $q - r$ .

$$\text{div. per } q. \quad \frac{qyy - ryy}{q} * \frac{-qv + qss}{q - r} \propto 0$$

$$ss \propto -yy + \frac{ryy}{q} + vv$$

$$\text{fit } s \propto v - yy + \frac{ryy}{q} + vv.$$

Quocirca si in hac æquatione in locum  $vv$  subrogetur ejus valor, innotescet inde etiam quantitas  $s$ .

Eodem modo, multiplicando in 2<sup>do</sup> exemplo per hanc Progressionem  $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ , inveniri potest valor quantitatis  $s$ . Ubi si similiter in locum  $vv$ , ejus valor substituat, quantitas  $s$  inde innotescet.

Quod si verò contingat, æquationem, per quam  $v$  quæritur, esse talem, ut valor ipsius  $v$  per eandem æquationem solam sine



438 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.

ipsius  $s$  inclusionem obtineri non possit; quemadmodum hic valor ipsius  $s$  absque inclusione ipsius  $y$  ex producta æquatione inveniri nequit; potest tamen semper, quotcunque etiam dimensiones quælibet incognita quantitas habeat, tandem inveniri æquatio (operando haud secus ac si illarum communis divisor, ut supra ostensum fuit, quæreretur), in qua duntaxat una incognita quantitas includitur, cuius radices deinceps sunt inveniendæ.

Exempli gratiâ, si habeatur hæc æquatio

$$y^4 * - 6 \chi \chi y y - 12 \chi^3 y + 9 \chi^4 \infty 0, \\ - 9 a a \chi \chi$$

in qua  $y$  &  $\chi$  sint incognitæ, &  $y$  ad 2 æquales radices determinari debeat: operationem instituo, ut sequitur.

$$y^4 * - 6 \chi \chi y y - 12 \chi^3 y + 9 \chi^4 \infty 0 \\ - 9 a a \chi \chi$$

$$\text{Mult. per } 0, 1, 2, 3, 4 \\ \text{fit } - 12 \chi \chi y y - 36 \chi^3 y + 36 \chi^4 \infty 0 \\ - 36 a a \chi \chi$$

$$\text{div. per } 12 \chi \chi. \quad - y y - 3 \chi y + 3 \chi \chi \infty 0 \\ - 3 a a \\ y y \infty - 3 \chi y + 3 \chi \chi. \\ - 3 a a$$

Similiter multiplicetur Proposita

$$y^4 * - 6 \chi \chi y y - 12 \chi^3 y + 9 \chi^4 \infty 0 \\ - 9 a a \chi \chi$$

$$\text{per } 4, 3, 2, 1, 0 \\ \text{fit } 4 y^4 * - 12 \chi \chi y y - 12 \chi^3 y * \infty 0$$

$$\text{div. per } 4 y. \quad y^3 * - 3 \chi \chi y - 3 \chi^3 \infty 0.$$

Substituendo jam valorem ipsius  $y y$ , supra inventum, in ejus locum, habebitur

$$y^3 \infty - 3 \chi y y + 3 \chi \chi y \text{ seu } + 9 \chi \chi y - 9 \chi^3 \\ - 3 a a y \quad + 3 \chi \chi y + 9 a a \chi \\ - 3 a a y \\ - 3 \chi \chi y - 3 \chi^3 \infty \quad . \quad . \quad . \quad - 3 \chi \chi y - 3 \chi^3 \\ \text{summa } + 9 \chi \chi y - 12 \chi^3 \infty 0 \\ - 3 a a y + 9 a a \chi \\ y \infty \frac{4 \chi^3 - 3 a a \chi}{3 \chi \chi - a a}.$$

Quo-

Quocirca substituendo rursus hunc valorem ubique in locum  $y$  in hac æquatione  $yyx - 3zy + 3zz$ , exurget inde alia æqua-

$$-3aa$$

tio, in quâ nulla incognita præterquam sola  $z$  reperitur, quæque per eam porro inveniri potest.

Denique, quicquid hic de duabus æqualibus radicibus dixi, eodem etiam modo de 3 aut pluribus æqualibus est intelligendum. Si enim æquatio habeatur, quæ omnes conditiones Problematis includat, exceptâ hac solâ, quod incognita quantitas, vel quæ ut incognita consideratur, ad 3 vel plures æquales radices adhuc sit determinanda: oportet ipsam primum multiplicare per Arithmeticam Progressionem, & hoc productum rursus eodem modo, & sic deinceps, donec totidem æquationes habeantur; quot æquales radices. ut supra dictum atque explicatum fuit. Quo peracto, tantum æquationes eodem modo resolvendæ sunt, ut in superiori exemplo ostensum est, donec una tandem obtineatur æquatio, in qua non nisi una incognita quantitas reperiat. Et demum notandum, infinita Problemata, quæ multis planè artificiosa ac ingeniosa dicuntur, ad talem æquationem, in quâ solummodo una huiusmodi determinatio adhuc implenda est, quàm facillimè reduci & deinde per hanc Methodum solvi posse.

# XI. REGULA,

*Quæ modum docet reducendi omnes æquationes, siue literales, siue numerales, quæ produci possunt ex multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus pluresve termini deficiunt.*

Brevitatis causâ, quantitatem cognitâ 2<sup>di</sup> termini, adfectam suis signis + & -, vocabo  $p$ ; 3<sup>ti</sup>  $q$ ; 4<sup>ti</sup>  $r$ ; 5<sup>ti</sup>  $s$ ; atque sic deinceps: & - $p$ , - $q$ , - $s$ , &c. easdem quantitates designabunt, sed contrariis signis adfectas.

Ex. gr. in hac æquatione  $x^4 - ax^3 - b^2xx + abbx - a^4x \propto 0$ ,  
 $+^2b \quad +^2aab$   
 erit  $-^2a +^2b \propto p$ ;  $-^2bb \propto q$ ;  $+^2abb +^2aab \propto r$ ;  $-^2a^4 \propto s$ ;  
 &  $+^2a -^2b \propto -p$ ;  $+^2bb \propto -q$ ; &c.

1 ma.



I<sup>ma</sup> Pars.

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit unius dimensionis, altera verò uno pluribúve terminis careat; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem sibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi hæ æquationes seu Divisores copulantur per voculam &; per *aliquam* verò, ubi disjunguntur per voculam vel.

$$x^3, pxx, qx, r\infty o \dots \text{ per } x+p\infty o, \& x+\frac{r}{q}\infty o.$$

$$x^4, px^3, qxx, rx, s\infty o \text{ per } x+p\infty o, \text{ vel } x+\frac{s}{r}\infty o.$$

$$x^4, px^3, *, rx, s\infty o \text{ per } x+p\infty o, \& x+\frac{s}{r}\infty o.$$

$$x^4, px^3, qxx, *, s\infty o \text{ per } x+p\infty o, \& xg\sqrt{-\frac{s}{q}}\infty o.$$

$$x^4, *, qxx, rx, s\infty o \text{ per } x+\frac{s}{r}\infty o, \& xg\sqrt{-q}\infty o.$$

$$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t\infty o \text{ per } x+p\infty o, \text{ vel } x+\frac{t}{s}\infty o, \\ \text{ vel } x+\frac{1}{2}p g\sqrt{\frac{1}{4}pp-q}\infty o.$$

$$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t\infty o \text{ per } x+p\infty o, \text{ vel } x+\frac{t}{s}\infty o.$$

$$x^5, px^4, *, rxx, sx, t\infty o \text{ per } x+p\infty o, \text{ vel } x+\frac{t}{s}\infty o.$$

$$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t\infty o \text{ per } x+p\infty o, \text{ vel } xg\sqrt{-\frac{t}{r}}\infty o.$$

$$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t\infty o \text{ per } x+\frac{t}{s}\infty o, \text{ vel } xg\sqrt{-q}\infty o.$$

$$x^5, px^4, *, *, sx, t\infty o \text{ per } x+p\infty o, \& x+\frac{t}{s}\infty o.$$

$$x^5, px^4, *, rxx, *, t\infty o \text{ per } x+p\infty o, \& xg\sqrt{-\frac{t}{r}}\infty o.$$

x<sub>2</sub>,

$x^6, *, qx^4, *, sx, t\infty$  per  $x + \frac{f}{s} \infty$ ,  $\mathcal{C} x \mathcal{R} \sqrt{-q\infty}$ .

$x^6, px^4, qx^2, *, *, t\infty$  per  $x + p\infty$ ,  $\mathcal{C} x + \sqrt{C. \frac{f}{q}} \infty$ .

$x^6, *, *, rxx, sx, t\infty$  per  $x + \frac{f}{s} \infty$ ,  $\mathcal{C} x + \sqrt{C. r\infty}$ .

$x^6, *, qx^4, rxx, *, t\infty$  per  $x \mathcal{R} \sqrt{-q\infty}$ ,  $\mathcal{C} x \mathcal{R} \sqrt{-\frac{f}{r}} \infty$ .

$x^6, px^4, qx^2, rxx, sx, v\infty$  per  $x + p\infty$ , *vel*  $x + \frac{v}{f} \infty$ ,

*vel*  $x + \frac{1}{2} p \mathcal{R} \sqrt{\frac{1}{4} pp - q\infty}$ ,

*vel*  $x + \frac{f}{2f} \mathcal{R} \sqrt{\frac{f^2}{4ff} - \frac{v}{f}} \infty$ .

$x^6, px^4, qx^2, *, sx, v\infty$  per  $x + p\infty$ , *vel*  $x + \frac{v}{f} \infty$ ,

*vel*  $x + \frac{1}{2} p \mathcal{R} \sqrt{\frac{1}{4} pp - q\infty}$ .

$x^6, px^4, qx^2, rxx, *, sx, v\infty$  per  $x + p\infty$ , *vel*  $x + \frac{v}{f} \infty$ ,

*vel*  $x + \frac{1}{2} p \mathcal{R} \sqrt{\frac{1}{4} pp - q\infty}$ .

$x^6, px^4, qx^2, rxx, sx, *, v\infty$  per  $x + p\infty$ , *vel*  $x \mathcal{R} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty$ ,

*vel*  $x + \frac{1}{2} p \mathcal{R} \sqrt{\frac{1}{4} pp - q\infty}$ .

$x^6, px^4, qx^2, *, *, sx, v\infty$  per  $x + p\infty$ , *vel*  $x + \frac{v}{f} \infty$ .

$x^6, px^4, qx^2, *, sx, *, v\infty$  per  $x + p\infty$ , *vel*  $x \mathcal{R} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty$ .

$x^6, px^4, qx^2, rxx, *, *, v\infty$  per  $x + p\infty$ , *vel* per utram-

que harum duarum

$x + \sqrt{C. \frac{v}{r}} \infty$ ,

$x + \frac{1}{2} p \mathcal{R} \sqrt{\frac{1}{4} pp - q\infty}$ .

$x^6, *, qx^4, rxx, sx, v\infty$  per  $x + \frac{v}{f} \infty$ , *vel*  $x \mathcal{R} \sqrt{-q\infty}$ ,

*vel*  $x + \frac{f}{2f} \mathcal{R} \sqrt{\frac{f^2}{4ff} - \frac{v}{f}} \infty$ .

$x^6, *, qx^4, rxx, *, sx, v\infty$  per  $x + \frac{v}{f} \infty$ , *vel*  $x \mathcal{R} \sqrt{-q\infty}$ .

$x^6, *, qx^4, rxx, sx, *, v\infty$  per  $x \mathcal{R} \sqrt{-q\infty}$ , *vel*  $x \mathcal{R} \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty$ .

Kkk

$x^6$ ,



442 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.

$x^6, *, *, r x^3, s x x, t x, v \infty \circ$  per  $x + \frac{v}{r} \infty \circ$ , vel  $x + \sqrt{C. r} \infty \circ$ .  
 $x^6, p x^5, *, r x^3, s x x, *, v \infty \circ$  per  $x + p \infty \circ$ , vel  $x \text{ g } \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty \circ$ .  
 $x^6, p x^5, *, r x^3, s x x, t x, v \infty \circ$  per  $x + p \infty \circ$ , vel  $x + \frac{v}{r} \infty \circ$ ,  
 $\text{vel } x + \frac{r}{2f} \text{ g } \sqrt{\frac{tr}{4ff} - \frac{v}{s}} \infty \circ$ .  
 $x^6, *, q x^4, *, s x x, t x, v \infty \circ$  per  $x + \frac{v}{r} \infty \circ$ , vel  $x \text{ g } \sqrt{-q} \infty \circ$ .  
 $x^6, p x^5, *, *, s x x, t x, v \infty \circ$  per  $x + p \infty \circ$ , vel  $x + \frac{v}{r} \infty \circ$ .  
 $x^6, p x^5, *, r x^3, *, t x, v \infty \circ$  per  $x + p \infty \circ$ , vel  $x + \frac{v}{r} \infty \circ$ .  
 $x^6, p x^5, q x^4, *, *, *, v \infty \circ$  per  $x + p \infty \circ$ ,  $\text{C} x - \frac{v}{p^3 q} \infty \circ$ ,  
 $\text{C} x \text{ g } \sqrt{-\frac{v}{p p q}} \infty \circ$ ,  
 $\text{C} x \text{ g } v \sqrt{-\frac{v}{q}} \infty \circ$ .  
 $x^6, *, q x^4, r x^3, *, *, v \infty \circ$  per  $x \text{ g } \sqrt{-q} \infty \circ$ ,  $\text{C} x - \frac{v}{q r} \infty \circ$ ,  
 $\text{C} x + \sqrt{C. \frac{v}{r}} \infty \circ$ .  
 $x^6, *, *, r x^3, s x x, *, v \infty \circ$  per  $x - \frac{r s}{v} \infty \circ$ ,  $\text{C} x \text{ g } \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty \circ$ ,  
 $\text{C} x + \sqrt{C. r} \infty \circ$ .  
 $x^6, *, *, *, s x x, t x, v \infty \circ$  per  $x + \frac{v}{r} \infty \circ$ ,  $\text{C} x - \frac{f t^3}{v^3} \infty \circ$ ,  
 $\text{C} x \text{ g } \frac{f}{v} \sqrt{-s} \infty \circ$ ,  
 $\text{C} x - \sqrt{C. \frac{f f}{v}} \infty \circ$ ,  
 $\text{C} x \text{ g } v \sqrt{-s} \infty \circ$ .  
 $x^6, p x^5, *, r x^3, *, *, v \infty \circ$  per  $x + p \infty \circ$ ,  $\text{C} x + \sqrt{C. \frac{v}{r}} \infty \circ$ ,  
 $\text{C} x + \frac{v}{p p r} \infty \circ$ .  
 $x^6, *, q x^4, *, s x x, *, v \infty \circ$  per  $x \text{ g } \sqrt{-q} \infty \circ$ ,  $\text{C} x \text{ g } \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty \circ$ .  
 $x^6, *, *, r x^3, *, t x, v \infty \circ$  per  $x + \frac{v}{r} \infty \circ$ ,  $\text{C} x \sqrt{C. r} \infty \circ$ .  
 $x^6, p x^5, *, *, s x x, *, v \infty \circ$  per  $x + p \infty \circ$ ,  $\text{C} x \text{ g } \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty \circ$ .  
 $x^6,$

$$x^6, *, qx^4, *, *, rx, v \infty 0 \quad \text{per } x + \frac{v}{r} \infty 0, \quad \sqrt{x^8 v - q \infty 0}.$$

$$x^6, px^4, *, *, *, rx, v \infty 0 \quad \text{per } x + p \infty 0, \quad \sqrt{x + \frac{v}{r} \infty 0}.$$

2<sup>da</sup> Pars.

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit duarum vel plurium dimensionum, ac duorum tantum terminorum; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi per unamquamque æquationem sibi adjunctam.

1<sup>mo</sup>. Per  $xx$  & quantitate aliquâ cognitâ  $\infty 0$ .

$$x^1, pxx, qx, r \infty 0 \quad \text{per } xx + q \infty 0, \quad (\sqrt{xx + p \infty 0}).$$

$$x^4, px^3, qxx, rx, s \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{r}{p} \infty 0, \quad \sqrt{xx + \frac{1}{2}q} \sqrt{xx + \frac{1}{2}q - s \infty 0}.$$

$$x^4, px^3, *, rx, s \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{r}{p} \infty 0, \quad \sqrt{xx} \sqrt{xx + \frac{1}{2}q - s \infty 0}.$$

$$x^4, *, qxx, *, s \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{2}q} \sqrt{xx + \frac{1}{2}q - s \infty 0},$$

$$x^4, *, *, *, s \infty 0 \quad \text{per } xx + \sqrt{\frac{1}{2}q} \sqrt{xx + \frac{1}{2}q - s \infty 0}.$$

$$x^6, px^4, qx^2, rxx, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{1}{2}q \sqrt{xx + \frac{1}{2}q - s \infty 0},$$

$$\sqrt{xx + \frac{r}{2p}} \sqrt{xx + \frac{r}{2p} - \frac{t}{p} \infty 0}.$$

$$x^6, px^4, qx^2, rxx, *, t \infty 0 \quad \text{per } xx + q \infty 0, \quad \sqrt{xx + \frac{r}{2p}} \sqrt{xx + \frac{r}{2p} - \frac{t}{p} \infty 0}.$$

$$\sqrt{\frac{rv}{4pp} - \frac{t}{p} \infty 0}.$$

$$x^6, px^4, qx^2, *, *, t \infty 0 \quad \text{per } xx + q \infty 0, \quad \sqrt{xx} \sqrt{xx + \frac{r}{2p} - \frac{t}{p} \infty 0}.$$

$$x^6, *, qx^2, rxx, *, t \infty 0 \quad \text{per } xx + q \infty 0, \quad \sqrt{xx} \sqrt{xx + \frac{r}{2p} - \frac{t}{p} \infty 0}.$$

$$x^6, *, *, rxx, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{t}{r} \infty 0, \quad \sqrt{xx} \sqrt{xx + \frac{t}{r} \infty 0}.$$

Kkk 2

x<sup>6</sup>,



$$x^5, *, q x^3, r x x, s x, t \infty \circ \quad \text{per } x x + \frac{r}{r} \infty \circ, \phi x x + \frac{1}{2} q 8$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} q q} - s \infty \circ.$$
$$x^s, p x^t, *, *, s x, t \infty 0 \text{ per } x x 8 \vee - s \infty 0, \text{ e } x x 8 \vee - \frac{t}{p} \infty 0.$$
$$x^r, p x^r, *, r x x, s x, t \infty \circ \text{ per } x x \text{ 8 } \sqrt{-s \infty \circ}, \mathcal{O} x x + \frac{r}{2p} \text{ 8 } \sqrt{\frac{r r}{4 p p} - \frac{t}{p} \infty \circ}.$$
$$x^*, p, x^4, q, x^3, *, s, x, t \infty 0 \quad \text{per } x, x \in \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0, \mathcal{O}^* x, x + \frac{1}{2} q$$

$$\in \sqrt{\frac{1}{2} q q - s \infty 0}.$$
$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v\infty \quad \text{per } xx + \frac{r}{2p} \& \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty \infty$$
$$x^6, p x^5, *, r x^3, s x x, t x, v \infty 0 \quad \text{per } x x + \frac{r}{2p} 8 \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0.$$
$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, \dots, tx, v \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{r}{2p} 8 \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0.$$
$$x^6, p x^5, *, r x^3, *, t x, v \infty \circ \quad \text{per } x x + \frac{r}{2p} 8 \sqrt{\frac{rr}{4pp}} - \frac{t}{p} \infty \circ,$$

$$\mathcal{C} x x + \sqrt{C.} v \infty \circ.$$
$$x^6, p x^5, *, r x^3, s x x, *, v \infty \circ \quad \text{per } x x + \frac{r}{p} \infty \circ.$$
$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{r}{p} \infty 0.$$
$$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sx^2, *, v \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{r}{p} \infty 0.$$
$$x^6, px^5, x^4, x^3, x^2, x, v \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{r}{p} \infty 0, \text{ e } xx + \sqrt{C} \cdot v \infty 0.$$
$$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, vx \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{t}{r} \infty 0.$$
$$x^6, *, *, r x^3, s x x, t x, v \infty \circ \quad \text{per } x x + \frac{t}{r} \infty \circ.$$
$$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, vx \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{t}{r} \infty 0.$$
$$x^6, *, *, vx^3, *, tx, v\infty \circ \text{ per } xx + \frac{t}{r} \infty \circ, \mathcal{O}^* xx + \sqrt{C} \cdot v\infty \circ.$$
$$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, vx \propto 0 \quad \text{per } xx \propto \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto 0.$$

$$x^6, p x^5, q x^4, *, *, t x, v \infty \circ \text{ per } x x \text{ g } \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^6, p x^5, *, *, s x x, t x, v \infty \circ \text{ per } x x \text{ g } \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ.$$

$$x^6, p x^5, *, *, *, t x, v \infty \circ \text{ per } x x \text{ g } \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty \circ, \mathcal{C} x x + \sqrt{C.} v \infty \circ.$$

$$x^6, *, q x^4, *, s x x, *, v \infty \circ \text{ per } x x + y \infty \circ, \text{ esistente } y^2 - q y y + s y - v \infty \circ.$$

$$x^6, *, *, *, s x x, *, v \infty \circ \text{ per } x x + y \infty \circ, \text{ esistente } y^2 + s y - v \infty \circ.$$

$$x^6, *, q x^4, *, *, *, v \infty \circ \text{ per } x x + y \infty \circ, \text{ esistente } y^2 - q y y^* - v \infty \circ.$$

$$x^6, *, *, *, *, *, v \infty \circ \text{ per } x x + \sqrt{C.} v \infty \circ.$$

2<sup>da</sup>. Per  $x^3$  g *quantitate aliquâ cognitâ*  $\infty \circ$ .

$$x^6, p x^3, *, r x, s \infty \circ \text{ per } x^3 + r \infty \circ, \mathcal{C} x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ (\mathcal{C} x + p \infty \circ)$$

$$x^6, p x^3, q x^2, r x x, s x, t \infty \circ \text{ per } x^3 + r \infty \circ, x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, \mathcal{C} x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ.$$

$$x^6, *, q x^3, r x x, *, t \infty \circ \text{ per } x^3 + r \infty \circ, \mathcal{C} x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, (\mathcal{C} x x + q \infty \circ)$$

$$x^6, p x^3, q x^2, r x^2, s x x, t x, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \mathcal{C} x^3 + \frac{1}{2} r \text{ g } \sqrt{\frac{1}{x} r r} - v \infty \circ.$$

$$x^6, p x^3, q x^2, *, s x x, t x, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \mathcal{C} x^3 \text{ g } \sqrt{-v} \infty \circ.$$

$$x^6, p x^3, *, *, s x x, *, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, \mathcal{C} x^3 \text{ g } \sqrt{-v} \infty \circ.$$

$$x^6, p x^3, *, r x^2, s x x, *, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{s}{p} \infty \circ, \mathcal{C} x^3 + \frac{1}{2} r \text{ g } \sqrt{\frac{1}{x} r r} - v \infty \circ.$$

Kkk 3

$x^6,$



$$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \mathcal{C} x^3 \& \sqrt{-v} \infty \circ;$$

$$x^6, *, qx^4, rx^3, *, *, tx, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{t}{q} \infty \circ, \mathcal{C} x^3 + \frac{1}{2} r \& \\ \sqrt{\frac{1}{4} rr - v} \infty \circ.$$

$$x^6, *, *, rx^3, *, *, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} rr - v} \infty \circ, \\ \mathcal{C} x^3 + \frac{1}{2} r - \sqrt{\frac{1}{4} rr - v} \infty \circ.$$

$$x^6, *, *, *, *, *, v \infty \circ \text{ per } x^3 + \sqrt{-v} \infty \circ, \mathcal{C} x^3 - \sqrt{-v} \infty \circ.$$

3<sup>tiò</sup>. Per  $x^4$  & quantitate aliquâ cognitâ  $\infty \circ$ .

$$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty \circ \text{ per } x^4 + s \infty \circ, \mathcal{C} x^4 + \frac{t}{p} \infty \circ, \\ (\mathcal{C} x + p \infty \circ)$$

$$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty \circ \text{ per } x^4 + s \infty \circ, x^4 + \frac{t}{p}, \mathcal{C} x^4 \\ + \frac{v}{q} \infty \circ.$$

$$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty \circ \text{ per } x^4 + s \infty \circ, \mathcal{C} x^4 + \frac{v}{q} \infty \circ \\ (\mathcal{C} xx + q \infty \circ).$$

4<sup>tiò</sup>. Per  $x^5$  & quantitate aliquâ cognitâ  $\infty \circ$ .

$$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \infty \circ \text{ per } x^5 + t \infty \circ, \mathcal{C} x^5 + \frac{v}{p} \infty \circ, \\ (\mathcal{C} x + p \infty \circ.)$$

3<sup>tiâ</sup> Pars.

Si aliqua æquatio 5 dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones, & nullum terminum  $\infty \circ$ , altera verò aliquem terminum  $\infty \circ$ ; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem sibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per unamquamque, ubi vocula  $\mathcal{C}$ ; per aliquam, ubi vel invenitur: ut antea.

Quan-

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 447

Quantitatem cognitam 2<sup>da</sup> termini æquationum sequentium  
quadratarum, adiectam suis signis + & -, brevitatis cau-  
sa, vocabo y, & ultimum terminum z.

$$x^2, px^2, qx^2, rxx, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \square^2 + \frac{t}{p} \infty 0},$$

$$\text{vel per } xx + \frac{1}{2}p + \frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{t}{2} \square^2 - 1}$$

$$\text{in } x, + \frac{1}{2} \infty 0,$$

$$\text{vel per } x^2 + t \infty 0.$$

$$x^2, px^2, *, rxx, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + px - \frac{r}{2p} \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p} \infty 0},$$

$$\text{vel per } xx + p + \frac{t}{2} \text{ in } x, + \frac{1}{2} \infty 0.$$

$$x^2, px^2, qx^2, *, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + px + \frac{1}{2}q \sqrt{\frac{1}{2}q + \frac{t}{p} \infty 0},$$

$$\text{vel per } xx + \frac{2}{p}x + \frac{1}{2}q \sqrt{\frac{1}{2}qq + t \infty 0}.$$

$$x^2, px^2, *, *, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + px \sqrt{\frac{t}{p} \infty 0},$$

$$\text{vel per utramque} \begin{cases} xx + p + \frac{t}{2} \text{ in } x, + \frac{1}{2} \infty 0, \\ \text{harum duarum} \end{cases} \begin{cases} xx, \sqrt{\frac{t}{2}} \text{ in } x, \sqrt{t} \infty 0. \end{cases}$$

$$x^2, px^2, qx^2, rxx, *, t \infty 0 \quad \text{per } xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p} \square^2 + \frac{t}{p} \infty 0},$$

$$\text{et per } xx + px + \frac{t}{2p} \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{pp}{r} \infty 0}.$$

$$x^2, px^2, *, rxx, *, t \infty 0 \quad \text{per } xx + p + \frac{1}{2}pp \sqrt{\frac{1}{2}p^2 + p t \infty 0},$$

$$\text{et per } xx + px + \sqrt{C} \cdot p t \infty 0,$$

$$\text{et per } xx + px - \frac{r}{2p} \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p} \infty 0}.$$

$$x^2, px^2, qx^2, *, *, t \infty 0 \quad \text{per } xx + px + pp \infty 0,$$

$$\text{et per } xx + px + \frac{1}{2}q \sqrt{\frac{1}{2}qq + \frac{t}{p} \infty 0}.$$

$$x^2, px^2, *, *, *, t \infty 0 \quad \text{per } xx + px + pp \infty 0,$$

$$\text{et per } xx + px \sqrt{\frac{t}{p} \infty 0}.$$

$$x^2, *, qx^2, rxx, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{t}{2f} \sqrt{\frac{rr}{4f}} - q \text{ in } x, + \frac{1}{2} \infty 0.$$

x<sup>r</sup>,



$$x^s, *, *, rxx, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{t}{s}x + \frac{t^2}{ss} \infty 0.$$

$$x^s, *, qx^3, *, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q8\sqrt{\frac{1}{4}qq + s \infty 0},$$

$$\text{et per } xx, 8\sqrt{\frac{s}{z}} \text{ in } x, + \frac{1}{2}q8\sqrt{\frac{1}{4}qq + s \infty 0},$$

$$\text{et per } xx, + \frac{t}{2f}8\sqrt{\frac{t^2}{4f} - q} \text{ in } x, + \frac{y^2}{s} \infty 0,$$

$$\text{et per } xx + x\sqrt{C. \frac{ss}{t}} + \sqrt{C. \frac{t^2}{s}} \infty 0.$$

$$x^s, *, *, *, sx, t \infty 0 \quad \text{per } xx, 8\sqrt{\frac{s}{t}} \text{ in } x, 8\sqrt{s} \infty 0,$$

$$\text{et per } xx, 8\sqrt{vs} \text{ in } x, 8\sqrt{s} \infty 0,$$

$$\text{et per } xx + \frac{t}{s}x + \frac{t^2}{ss} \infty 0,$$

$$\text{et per } xx, + \sqrt{C. \frac{ss}{t}} \text{ in } x, + \sqrt{C. \frac{t^2}{s}} \infty 0,$$

$$\text{et per } xx, + \sqrt{\beta. t} \text{ in } x, + \frac{t^2}{ss} \infty 0.$$

Ad 1<sup>am</sup> & 3<sup>tiam</sup> Partem annotandum venit; si non constet an Proposita æquatio ex duabus aliis, requisitas condiciones habentibus, produci possit, quod id facillimo negotio ut plurimum experiri liceat: quotiescunque enim divisores, qui per voculam & copulantur, inter se non secundum omnes terminos conveniant, concludendum est, Propositam æquationem ita produci non posse, adeò ut eo in casu divisio irrita foret. Exempli gratiâ, si Proponatur æquatio  $x^6, *, *, *, -xx\sqrt{3} - 2\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{s} \infty 0$ , quæ hujus est formulæ  $x^6, *, *, *, sxx, tx, v \infty 0$ , ea divisibilis erit secundum 1<sup>am</sup> Partem, per  $x + \frac{v}{t} \infty 0$ , & per  $x8\sqrt{v} - s \infty 0$ ; & per  $x8\sqrt{\frac{t}{v}} - s \infty 0$ ; & per  $x - \sqrt{C. \frac{ss}{v}} \infty 0$ ; & per  $x - \frac{ss^3}{v^3} \infty 0$ , si produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit unius dimensionis, altera verò uno pluribusve terminis careat. Ut autem sciatur, utrum hoc fieri queat, non opus est id divisione per aliquem ex divisoribus explorare, cum hic duo divisores reperiantur inter se non convenientes: nimirum,  $x + \frac{v}{t} \infty 0$ , &  $x8\sqrt{v} - s \infty 0$ , nam  $\frac{v}{t}$  rationalem, &  $\sqrt{v} - s$  irrationalem numerum designat. Atque cum indivisibilitas etiam sæpe

sape uno intuitu ex variis signis constet, ut, ex. gr. si loco  $-\sqrt{s}$  habuissimus  $+\sqrt{s}$ , quo casu  $\sqrt{Q}$ , ex  $-s$  extrahi non potuisset; Poterimus interdum operosas aliquot multiplicationes & divisiones, quæ alioquin essent faciendæ, insuper habere. Majoris perspicuitatis gratiâ alterum exemplum addam. Divisores æquationis  $x^5, *, *, *, s x, t \infty 0$  sunt, secundum 3<sup>iam</sup> Partem,  $x x 8 \frac{s}{s} \sqrt{s}$  in  $x, 8 \sqrt{s} \infty 0; x x 8 \sqrt{s} \sqrt{s} \sin x, 8 \sqrt{s} \infty 0; x x + \frac{s}{s} x + \frac{s s}{s s} \infty 0; x x + \sqrt{C} \cdot \frac{s s}{s} \sin x + \sqrt{C} \cdot \frac{s s}{s} \infty 0; \& x x + \sqrt{\beta} \cdot t \sin x + \frac{s s}{s s} \infty 0;$  si jam comperiatur  $8 \frac{s}{s} \sqrt{s}$  non esse  $\infty \sqrt{s}$ , vel  $\infty \frac{s}{s}$ , vel  $\infty \sqrt{C}$ .  $\frac{s s}{s}$ , vel  $\infty \sqrt{\beta} \cdot t$ , quæ sunt quantitates cognitæ 2<sup>di</sup> termini; vel ultimos terminos  $8 \sqrt{s}$ , &  $+\frac{s s}{s s}$ , &c. non inter se convenire; indicio esset æquationem Propositam produci non posse ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habet duas dimensiones, & nullum terminum  $\infty 0$ , altera verò aliquem terminum  $\infty 0$ .

4<sup>ta</sup> Pars.

Si æquatio aliqua 6 dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones, & nullum terminum  $\infty 0$ ; altera verò unum, pluresve terminos  $\infty 0$ ; erit ea divisibilis per  $x x + y x + z \infty 0$ , cujus  $y$  &  $z$  valores per sequentes æquationes ac sequenti modo sunt inveniendi.

Æquationem Propositam, sive in ea aliquis terminus deficiat, sive non, sic designabo:  $x^6 + p x^5 + q x^4 + r x^3 + s x x + t x + v \infty 0$ ; ubi  $p$  denotat quantitatem cognitam 2<sup>di</sup> termini, vel 0, si is deficiat;  $q$  quantitatem cognitam 3<sup>am</sup> termini, vel 0, si is deficit;  $r$  4<sup>ti</sup> termini, &c.



A  $\begin{array}{r} \cancel{z}\cancel{z} - q\cancel{z} + ppq\infty\infty \\ -pp -rp \\ +\frac{r}{p} +f \\ \hline -\frac{t}{p} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{z}\cancel{z} - \frac{t}{p}\cancel{z} + v\infty\infty \\ -f \\ +rp \\ -ppq \\ \hline \frac{r}{p} + pp \end{array} \quad y\infty p$

B  $\begin{array}{r} y^3 - p\cancel{y}\cancel{y} + q\cancel{y} - r\infty\infty \\ -\frac{2v}{t} + \frac{pv}{t} \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{y}\cancel{y} - \frac{qt}{v}\cancel{y} + \frac{t^4}{v^3}\infty\infty \\ -p + \frac{rt}{v} \\ +\frac{rtt}{vv} \\ -\frac{t^3f}{v^3} \\ \hline 2 \end{array} \quad \cancel{z}\infty \frac{yv}{t}$

C  $\begin{array}{r} y^4 - \frac{q}{p}y^3 + q\cancel{y}\cancel{y} - \frac{f}{p}\cancel{y} + \frac{t}{p}\infty\infty \\ -^2p + pp -^2pq + qq \\ -\frac{qq}{p} - \frac{rq}{p} \\ +r \end{array} \quad \begin{array}{r} y^4 - \frac{t}{f}y^3 + pp\cancel{y}\cancel{y} - ^2pq\cancel{y} + qq\infty\infty \\ -^2p + \frac{tp}{f} - \frac{tq}{f} - \frac{vp}{f} \\ +^2q + \frac{vp}{f} \end{array}$

$\begin{array}{r} -\frac{t}{f}y^3 + \frac{tp}{f}\cancel{y}\cancel{y} - \frac{tq}{f}\cancel{y} - \frac{vp}{f}\infty\infty \\ +\frac{q}{p} - q + \frac{vp}{f} - \frac{t}{p} \\ +\frac{f}{p} + \frac{rq}{p} \\ +\frac{qq}{p} \\ -r \end{array} \quad \begin{array}{r} \cancel{z}\infty - p\cancel{y} + \cancel{y}\cancel{y} + q \\ \cancel{z}\infty y\cancel{y} + q \end{array}$

D  $\begin{array}{r} +q\cancel{y}\cancel{y}^* + f\cancel{y} - t\infty\infty \\ +qq +rq \end{array} \quad \begin{array}{r} +f\cancel{y}^* - t\cancel{y}^2 + qf\cancel{y}\cancel{y} - tq\cancel{y} + qqf\infty\infty \\ -vq \end{array}$

$\begin{array}{ccc} c & f & g \\ y\infty p & y\infty p & y\infty \frac{t}{f} \\ \cancel{z}\infty q & \cancel{z}\infty q - \frac{r}{p}\infty \frac{vp}{t} & \cancel{z}\infty \frac{v}{f} \end{array} \quad \text{Quan-}$

Quando nulli termini in æquatione Proposita sunt  $\infty$ ,  
illa dividi poterit per aliquam harum A, B, C, e, f, g.

Quando est  $p \infty$  ... per aliquam harum B, D, g

q	—	—	—	A, B, C, f, g
r	—	—	—	A, B, C
f	—	—	—	A, B, C, e, f
t	—	—	—	A, C, e
p, q	—	—	—	B, D, g
p, r	—	—	—	B, D
p, f	—	—	—	B, D
p, t	—	—	—	D
q, r	—	—	—	A, B, C
q, f	—	—	—	A, B, C, f
q, t	—	—	—	A, C
r, f	—	—	—	A, B, C
r, t	—	—	—	A, C
f, t	—	—	—	A, C, e
p, q, r	—	—	—	B, D
p, q, f	—	—	—	B
p, r, f	—	—	—	B, D
p, r, t	—	—	—	D
q, r, f	—	—	—	A, B, C
q, r, t	—	—	—	A, C
q, f, t	—	—	—	A, C
r, f, t	—	—	—	A, C
p, q, r, f	—	—	—	B
p, q, f, t	—	crit $y^{\sigma***} + r y^{3**} + v \infty,$		
		& $\lambda \infty y y.$		
q, r, f, t	—	—	—	A
p, q, r, f, t	—	crit $y^{\sigma****} + v \infty,$		
		& $\lambda \infty y y.$		



1. Pro A, vel B, vel C assumere licet, vel unam æquationum juxta positarum, quam libuerit, quærendo ejus tantum ope valorem ipsius  $y$ , vel  $z$ ; vel duas eandem quantitatem incognitam habentes, quærendoque, ut superius ostensum est, earum communem divisorem, qui, aut unius, aut plurium futurus est dimensionum. si unius, habebitur quæsitus valor ipsius  $y$  vel  $z$ ; si plurium, eundem ex hoc communi divisore investigare oportet.

2. Si primò per capitales sive majusculas A, B, C, D explorare velimus, reliquæ e, f, g non sunt necessariae; sed non vice versâ.

Exempli gratiâ, proponatur

$$x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 3xx - 13x - 500.$$

Cum nullus terminus hîc deficiat, examinanda est æquatio per A, B, C, e, f, g. & quidem per omnes, si à minusculis g, f, e incipiamus, si autem à capitalibus, erunt minusculæ insuper habendæ. Incipiamus igitur à capitalibus, ac primùm ab A, pro qua itaque sumere licet æquationem  $zz - qz + ppq \infty 0$ ,

$$\begin{array}{r} -pp \quad -rp \\ +\frac{r}{p} \quad +f \\ \hline -\frac{r}{p} \\ \hline 2 \end{array}$$

vel  $zz - \frac{r}{p}z + 2r \infty 0$ , vel utramque.

$$\begin{array}{r} -f \\ +rp \\ -ppq \\ \hline \frac{r}{p} + pp \end{array}$$

Si primam sumamus, obtinebitur pro ipsa (quoniam  $p \infty 2$ ,  $q \infty -3$ ,  $r \infty 7$ ,  $f \infty -3$ ,  $t \infty -13$ , &  $v \infty -5$ )  $2zz + 5\frac{1}{2}z - 22\frac{1}{2} \infty 0$ ; si alteram, obtinebitur  $7\frac{1}{2}zz + 35\frac{1}{2}z - 100 \infty 0$ , quarum communis divisor est  $z + 5 \infty 0$ . Quoniam autem  $y \infty p$

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 453

$700x^2$ , dividendum est per  $xx + yx + 7000xx + 2x - 500$ , inveniaturque pro quotiente  $x^4 + 2xx + 3x + 100$ . Et manifestum est, nos etiam alterutra tantum duarum illarum æquationum uti potuisse. Facilior itaque via eligenda erit: non enim semper illa per communem divisorem brevior est, neque semper longior; verum hanc habet prærogativam, quæ sanè non parva est, quòd inutiles radices abscindat. Quemadmodum sequenti exemplo clariùs patebit.

Elto æquatio Proposita  $x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 3xx - 5x - 100$ . Quoniam hic  $p$  est  $0$ , reductio tentanda erit per B, D, g. Incipiendo à B, inveniatur pro  $1^{ma} y^2 - p yy + q y - 100$ ,

$$-\frac{2v}{f} + \frac{pv}{f}$$

hæc æquatio  $y^2 - 7yy - 2y - 300$ ; & pro  $2^{da} yy - \frac{qs}{v}y + \frac{t^2}{v^2}00$ ,

$$\begin{array}{r} -p + \frac{rs}{v} \\ + \frac{rss}{vv} \\ - \frac{stf}{v^2} \end{array}$$

2

hæc  $yy + 230y - 30500$ : est enim in hoc exemplo  $q0 - 2$ ,  $r03$ ,  $f0 - 3$ ,  $t0 - 5$ , &  $v0 - 1$ . Unde, quærendo earum communem divisorem, comperietur nullum dari, ac proinde divisionem per B fieri non posse. Hinc transeo ad D, ubi pro  $1^{ma}$  æquatione  $qy^2 + f y - 100$  invenio  $-2y^2 + 1y - 100$ ,

$$+qq + r q$$

& pro  $2^{da} f y^2 - t y^2 + 2qf yy - t qy + q q f 00$  invenio

$$-v q$$

$-3y^4 + 5y^3 + 12yy - 10y - 1400$ . Quarum æquationum divisor communis est  $y + 100$ ; adeoque  $700yy + q0 - 1$ ; ita ut divisio sit facienda per  $xx + yx + 7000xx - 1x - 1$ , eritque quotiens  $x^4 + 1x^3 + 4x + 100$ .

Ubi notandum, modum hunc quærendi communem divisorem in altioribus præsertim æquationibus permagni esse usus, non autem tanti usus, cum æquationes, quarum divisor communis investigandus est, solummodo sunt 2 dimensionum, aut etiam trium, quoniam tum divisores faciles sunt inventu. Ut in

LII 3

æqua-



æquatione superiori  $-2y^3 + 1y - 100$ , ubi protinus apparet  $y$  esse  $\infty - 1$ , adeoque si ipsa dividatur per  $y + 100$ , obtinebitur  $-2yy + 2y - 100$ . Cujus radices quoniam sunt impossibiles, solum superest  $y\infty - 1$ ; adeò ut divisio æquationis Propositæ tentanda sit per  $xx - 1x - 100$ .

Sic & si habeatur æquatio  $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2xx + 1x + 100$ , comperietur ejus divisionem fieri posse beneficio æquationum juxta B, ubi pro una invenitur  $2yy - 5y + 300$ , & pro altera  $y^3 - 4yy + 5y - 200$ , & pro communi divisore  $y - 100$ .

Et quoniam  $\zeta$  est  $\infty \frac{y}{x} \infty 1$ , erit  $xx + yx + \zeta\infty\infty xx + 1x + 100$ . Per quam igitur si Proposita æquatio dividatur, fiet pro quotiente  $x^4 + 1x^3 + 1xx^* + 100$ .

Si autem detur æquatio  $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 1xx + 14x + 200$ , in qua  $r$  est  $0$ , oportet ipsam examinare per A, B, & C. Incipiendo autem ab A, loco æquationis  $\zeta\zeta - q\zeta + ppq\infty$

$$\begin{array}{r} -pp \quad -rp \\ + \frac{r}{p} \quad + f \\ \hline - \frac{f}{p} \\ \hline 2 \end{array}$$

invenitur  $\zeta\zeta - 4\zeta + 100$ ; & loco æquationis  $\zeta\zeta - \frac{f}{p}\zeta + 2r\infty$

$$\begin{array}{r} -f \\ +rp \\ -ppq \\ \hline \frac{r}{p} + pp \end{array}$$

invenitur eadem  $\zeta\zeta - 4\zeta + 100$ . Ex qua, quia utriusque communis divisor est, radices invenire oportet, quæ sunt  $\zeta\infty 2 + \sqrt{3}$ , &  $\zeta\infty 2 - \sqrt{3}$ . Unde cum  $y$  sit  $\infty p$ , hoc est,  $2$ , pro  $xx + yx + \zeta\infty$  obtinebuntur hæ duæ  $xx + 2x + 2 + \sqrt{3}\infty$ , &  $xx + 2x + 2 - \sqrt{3}\infty$ . Per quas igitur si Proposita æquatio divisa fuerit, comperietur ipsam produci posse multiplicatione harum trium  $xx + 2x + 2 + \sqrt{3}\infty$ ,  $xx + 2x + 2 - \sqrt{3}\infty$ , &  $xx - 2x + 200$ .

5<sup>ta</sup> Pars.

5<sup>a</sup> Pars.

Si æquatio aliqua 6 dimensionum produci possit multiplicatione duarum aliarum, quæ singulæ 3 dimensiones habeant, in quarum alterutra unus pluresve termini sint  $\infty$ ; erit ipsa divisibilis vel per æquationem tantum 2 terminorum, juxta 2<sup>am</sup> partem, vel per æquationem  $x^3 + yxx + zx + w\infty$ , in qua tantum alterutra vel  $y$  vel  $z$  est  $\infty$ ; quarumque  $y, z$ , &  $w$  valores inveniuntur per sequentes æquationes.

Æquationem Propositam, siue in ea aliquis terminus deficiat, siue non, sic designabo:  $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v\infty$ ; ubi  $p$  denotat quantitatem cognitam 2<sup>di</sup> termini, vel 0, si is deficiat;  $q$  quantitatem cognitam 3<sup>ti</sup> termini, vel 0, si is desit;  $r$  quarti termini, &c.

$$\begin{array}{l} \text{A} \quad 2z^3 - 3qz^2 - rpz - f\infty + qqz + 4fqz - 4ff\infty + w\infty \frac{f+q}{p} \\ \quad + pp \quad + 2f \quad + p \quad + p^2 \quad - 3pqr - 4ppv \\ \quad \quad + qq \quad \quad - 4f \quad - 2pfs + 4pfr \\ \quad \quad \quad + 2pr \quad + 2tp \quad + fqq \\ \quad \quad \quad \quad - q^3 \quad - p^2q \quad y\infty. \\ \quad \quad \quad \quad - rp^3 \quad - fqp \\ \quad \quad \quad \quad + qp^2 \quad + tp^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{B} \quad y^4 - \frac{q^2}{u}y^3 + \frac{pqf}{u}yy - \frac{f^2}{u}y - qq\infty \quad y^4 - 2py^3 + qyy - ry + pr\infty \\ \quad - p \quad + qp - \frac{f^2}{u} \quad + \frac{2v}{f} \quad + pp - pq - f \\ \quad \quad - \frac{qq^2}{u} + \frac{r^2q}{u} \quad - \frac{3pv}{f} + \frac{2qv}{f} - \frac{pqv}{f} \\ \quad \quad \quad \quad + \frac{ppv}{f} \\ \quad \quad \quad \quad w\infty \frac{f}{q - py + yy} \\ \quad \quad \quad \quad z\infty. \end{array}$$

$$\text{C} \quad zz - qz + f\infty \quad ww - vw + v\infty \quad y\infty.$$

$$\text{D} \quad yy - py + q\infty \quad ww - vw + v\infty \quad z\infty.$$

$$\text{e} \quad z\infty q \quad w\infty \frac{f}{p} \quad y\infty.$$

$$\text{f} \quad y\infty p \quad w\infty \frac{f}{q} \quad z\infty.$$

Quan-



Quando nulli termini in æquatione Proposita sunt  
 $\infty 0$ , illa dividi poterit per aliquam harum A, B, e, f.

Quando est  $p \infty 0 \dots$  per aliquam harum C, B

$q$	—	—	—	A, B
$r$	—	—	—	A, B, e, f
$s$	—	—	—	A, B
$t$	—	—	—	A, D
$p, q$	—	—	—	C, B
$p, r$	—	—	—	C, B
$p, s$	—	—	—	B
$p, t$	—	—	—	C, D
$q, r$	—	—	—	A, B
$q, s$	—	—	—	A, B
$q, t$	—	—	—	A
$r, s$	—	—	—	A, B
$r, t$	—	—	—	A, D
$s, t$	—	—	—	A, D
$p, q, r$	—	—	—	C, B
$p, q, s$	—	—	—	B
$p, q, t$	—	—	—	C
$p, r, s$	—	—	—	B
$p, r, t$	—	—	—	C, D
$p, s, t$	—	—	—	D
$q, r, s$	—	—	—	A, B
$q, r, t$	—	—	—	A
$q, s, t$	—	—	—	A
$r, s, t$	—	—	—	A, D
$p, q, r, s$	—	—	—	B
$q, r, s, t$	—	—	—	A.

1. Pro A vel B assumere licet vel unam æquationum  
 juxta positarum, quam libuerit, quærendo ejus tan-  
 tum ope valorem ipsius  $y$ , vel  $z$ ; vel duas, eandem in-  
 cogni-

cognitam quantitatem habentes, quærendoque per earum communem divisorem valores ipsius  $y$  vel  $z$ , eodem modo quo in Parte 4<sup>a</sup> dictum est.

2. Si primò per capitales A, B examen fiat, tum examen per reliquas e & f superfluum habendum est, sed non vice versà.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio

$$x^6 + 1x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 5xx + 11x + 6 \infty 0.$$

Quoniam nulli termini desunt, Reductio erit tentanda per A, B, e, f; incipiendoque à minusculis, ac primùm ab e, habebitur  $z \infty q \infty 4$ , &  $w \infty \frac{f}{p} \infty 5$ , adeoque pro  $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ , fiet  $x^3 + 4x + 5 \infty 0$ . Cum verò Proposita æquatio per hanc dividi nequeat, transeo ad f, obtineoque  $y \infty p \infty 1$ ;  $w \infty \frac{f}{q} \infty \frac{1}{4}$ ;  $z \infty 0$ ; & in locum  $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$  obtineo  $x^3 + 1xx + \frac{11}{4} \infty 0$ . Et cum Proposita per hanc quoque non divisibilis existat, transeo ad A, & pro  $2z^3 - 3qzz - 7pz - 5q \infty 0$

$$+pp + 2f + 1p + qq$$

obtineo  $2z^3 - 11zz + 18z - 9 \infty 0$ , cujus radices sunt  $+3$ ,  $+1$ , &  $+1\frac{1}{2}$ . Quia autem omnes hæ radices sunt rationales, ac æquatio Proposita fractis numeris caret, non poterit nobis hæc ultima radix inservire. Unde explorandum tantùm restat per  $z \infty 3$ , &  $z \infty 1$ . Sumendo autem  $z \infty 1$ , reperitur divisionem fieri non posse, ac idcirco si sumatur  $z \infty 3$ , fiet  $w \infty \frac{f+zz-qz}{p} \infty 2$ .

Quoniam verò  $y$  est  $\infty 0$ , pro  $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$  obtinebitur  $x^3 + 3x + 2 \infty 0$ , per quam si divisio Propositæ tentetur, comperietur ipsam fieri posse, atque oriri  $x^3 + 1xx + 1x + 3 \infty 0$ . Sed loco 1<sup>mæ</sup> æquationis juxta A sumere potuissimus 2<sup>dæ</sup>, unâ dimensionem depressoire, pro qua obtinuissimus  $13zz - 60z + 63 \infty 0$ . Quæ unam tantùm radicem rationalem absolutam admittit, quæ, ut supra, est  $+3$ .

Et notandum, quòd, inventis duabus æquationibus, (quæ sentper, si per communem divisorem Quæsitum obtinere velimus, inveniri debent;) quæri potest radix alterutrius æquationis, si nempe ea facilis sit inventu, atque explorari, num & altera æqua-

M m m

tio



## 458 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.

tio dictam radicem admittat : Quo sæpe non nihil laboris abscindi potest.

Priusquam huic XI Regulæ finem imponam, adjungam, quòd, eodem modo, quo hæ Regulæ inventæ sunt, & reliquæ altiorum æquationum inveniri possint; uti & multæ, ne dicam infinitæ aliæ ad æquationes 6, & pauciorum dimensionum, quarum aliquot ex facilioribus indicare volui, prætermittens nonnullas, non quidem admodum difficiles, sed quæ determinationem aliquam invollebant. Ut in 1<sup>ma</sup> Parte, ubi æquationi  $x^6, p x^5, q x^4, * \int x x, t x, v \infty 0$ , loco divisoris  $x + \frac{1}{2} p \sqrt[4]{8 \sqrt[4]{p p} - q} \infty 0$ , adjungere potuissem divisorem  $x - \frac{v - q \int}{p \int - t} \infty 0$ : quem, cum determinationem involvat, (siquidem  $x + 3 \infty 0$ , divisor æquationis  $x^6 + 5 x^5 + 6 x^4 + 5 x x + 25 x + 30 \infty 0$ , per illum inveniri nequit:) omitendum duxi, præferendo ei alterum  $x + \frac{1}{2} p \sqrt[4]{8 \sqrt[4]{p p} - q} \infty 0$ , qui determinationi nulli obnoxius est.

Denique, usus hujus XI Regulæ se longè lateque extendit, quod nemo facile negaverit, qui modò viderit, non necesse esse, vel fractiones, vel cognitæ quantitates surdas prius ex æquatione tolli; & quot modis una eademque æquatio, præsertim valde composita, & multarum dimensionum, ex multiplicatione duarum aliarum produci queat; tumque inter omnes illas ex quibus produci possit, tantum unam requiri, in qua unus pluresve termini deficiant, ut Reductio per has Regulas inveniat.

SEQUENTES 12, 13, 14, 15 REGVLÆ SE EXTENDUNT AD ÆQUATIONES, IN QVIBVS NEC SIGNA RADICALIA, NEC LITERALES FRACTIONES INVENIUNTUR.

## XII REGVLÆ.

Si in æquatione Proposita reperiatur litera cognita, quæ in ultimo Terminò non contineatur; si illa non nisi semel in æquatione extet, vel semel tantum reperiatur secundum eundem dimensionum numerum, (ut in Æquatione  $x^4 - 2 a x^3 + a a x x - 2 a b b x + a a b b \infty 0$ ,

$$\begin{array}{r} - 2 c \quad + b b \quad - 2 a c c \\ + 4 a c \\ - d d \end{array}$$

in

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 459  
in qua  $dd$  semel duntaxat reperitur, duas habens di-  
mensiones) æquatio semper indivisibilis erit per  $x$ , aut  
 $xx$ , &c. + vel - quantitate quâvis cognitâ atque ra-  
tionali.

### XIII REGULA.

Si pluries in æquatione Proposita reperiatur litera  
cognita, *que in ultimo termino non contineatur*; si illa ubi-  
que eodem signo + vel - sit adfecta, ac per incogni-  
tam quantitatem, impares ubique aut ubique pares di-  
mensiones habentem, multiplicata: æquatio illa sem-  
per indivisibilis erit per  $x$  + vel -, vel per  $xx$ ,  $x^3$ , &c.  
- quantitate quâvis cognitâ atque rationali. ut hæc Æ-  
quatio  $x^4 + 4cx^3 - ddx + 4bbcx + b^4 \infty 0$ , in  
 $-2bbd$

quâ  $c$  bis tantum reperitur adfecta signo +, ac multi-  
plicata per  $x$  unius & trium dimensionum. aut hæc  
 $x^6 - ax^5 + cf x^4 - c^3 x^3 - c^4 xx - d d c c a x + c^3 d^3 \infty 0$ ,  
 $+b - dd - add + d d f f + d^3 b b$   
ubi  $a$  ter invenitur adfecta ubique signo -; aut  $b$  bis fi-  
gno +; ac ducta utraque in  $x$ , ubique habentem di-  
mensiones impares: aut in quâ etiam  $f$  bis reperitur  
adfecta signo +, ac ducta in  $x$ , ubique pares dimensio-  
nes habentem.

### XIV REGULA.

Si in æquatione Proposita reperiatur litera cognita,  
*que in nullo alio quàm in ultimo termino contineatur*; si ejus  
dimensionum numerus sit minor numero dimensio-  
num incognitæ quantitatis, ad summum considerato,  
(ut in hac  $x^6 - b b x^4 + b^3 c x x + b c d^4 \infty 0$ , in qua  
 $-bbcc + 2bd^4$

M m m 2

d tan-



*d* tantum in ultimo termino continetur, habens ad summum 5, & *x* plures, nimirum 6 dimensiones) certum est illam æquationem per  $x +$  vel  $-$  quantitate quavis rationali atque cognitâ esse indivisibilem; Si ejus dimensionum numerus sit minor semisse numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati, (ut in eodem exemplo, si loco ultimi termini  $bcd^4 + 2bd^5$  ponatur  $bc^3dd + 2b^5d$ ) certum est illam æquationem per  $xx +$  vel  $-$  quantitate quavis rationali atque cognitâ indivisibilem existere. Si ejus dimensionum numerus sit minor triente numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati, certum est illam æquationem per  $x^3 +$  vel  $-$  &c. non posse dividi. atque ita porro in infinitum.

## XV REGULA.

*Si in æquatione Proposita litera cognita reperiatur, quæ in ultimo termino non continetur, atque ea divisibilis sit per  $x, xx, x^3$ , &c.  $+$  vel  $-$  aliquâ quantitate rationali & cognitâ; facile erit beneficio alterius æquationis dictum divisorem invenire.*

Ut in hac æquatione

$$x^5 - fx^4 + bfx^3 - 16bcdxx + \frac{1}{2}bbcfx - 8ccdbb\infty o \\ + \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}bcf$$

in quâ *f* in ultimo termino non continetur, opus tantum est, ut omnes quantitates, in quibus *f* æquè multas habet dimensiones nihilo æquales ponantur, atque porro investigetur utriusque, inventa scilicet atque Propositæ æquationis, communis divisor.

Quocirca posito  $-fx^4 + bfx^3 - \frac{1}{2}bcfx + \frac{1}{2}bbcfx\infty o$ , seu  $-x^3 + bxx - \frac{1}{2}bcx + \frac{1}{2}bb\infty o$ , invenitur, secundum Methodum ante descriptam, pro earum communi divisore  $xx + \frac{1}{2}bc\infty o$ .

Sic

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 461

Sic etiam si proponatur hæc æquatio

$$x^4 - ax^3 + aaxx + c^3 \quad x - bc^3 \infty 0 \text{ in qua } a \text{ in ultimo ter-}$$

$$-b \quad +ab \quad -baa \quad +c^4$$

$$+c \quad -ac \quad +aac$$

mino non continetur;posito  $-ax^3 + abxx \infty 0$ , erit  $x - b + c \infty 0$ .

Divisio itaque tentanda est per  $x - b + c \infty 0$ ; quoniam nullus præter hunc communis divisor haberi potest. Eundem Divisorem obtinuissemus si quantitates omnes ubi  $a$  est duarum dimensionum posuissemus  $\infty 0$ . Notandum est in his 12, 13, 14 & 15 Regulis, non opus esse, ut literales Fractiones semper prius ex æquationibus auterantur: Nam si contingat, his Fractionibus sublatis, literam, de qua ibi agitur, nihilominus tamen in ultimo Termino tantum inveniri, quemadmodum in Regula 14 requiritur; vel illâ ablatione factâ in ultimo Termino non inveniri, quod in tribus aliis requiritur; ablatio talium Fractionum necessaria non est.

SEQUENTES 16, 17, 18, 19, ET 20 REGVLÆ SE  
EXTENDVNT AD ÆQVATIONES, VBI NEC  
SIGNA RADICALIA, NEC FRACTIONES LI-  
TERALES VEL NVMERALES INVENIVN-  
TVR.

Hucusque perinde est, an Propositæ æquationis omnia membra, sive terminorum partes separatæ per signum  $+$  vel  $-$  junctæ eundem habeant dimensionum numerum vel secus: In his sequentibus verò 16, 17, 18, 19, & 20 Regulis considerabo, brevitatis causâ, ejusmodi tantum æquationes, quarum omnia Membra habent eundem numerum dimensionum; potest enim omnis æquatio, hanc conditionem non habens, facîle in talem permutari, ut cuique notum est.

Quomodo omnia radicalia signa ex æquatione tolli possint, jam antea ostendi. Quomodo verò omnes Fractiones tolli queant, nihil difficultatis habet, & satis à D<sup>no</sup> des Cartes monstratum est in Fractionibus numeralibus, quod etiam eodem modo in literalibus locum habet. Sed cum in his Regulis sequentibus divisores rationales ultimi Terminum necessariò sciri debeant, præmittam

M m m 3

Mo-



*Modum inveniendi omnes rationales Divisores ultimi Termini surdis & Fractionibus carentis.*

Ultimus Terminus æquationis Propositæ aut ex uno aut ex pluribus *Membris* seu quantitativibus, per + & — junctis constabit. Si *unius tantum Membri* sit, notum est quâ ratione ipsius divisores inveniantur. Quòd si autem ex *pluribus Membris* constiterit, sæpenumero difficile est eos omnes reperire. Hinc ad eos inveniendos, considero seorsim ultimum Terminum æquationis Propositæ, supponendo ipsum  $\infty 0$ , atque pro lubitu eligo aliquam ex literis, quam pro incognita quantitate hujus fictæ æquationis habeo, cujus respectu fictam æquationem illam in ordinem redigo.

Exempli gratiâ, ex ultimo Termino hujus æquationis,

$$\begin{array}{r} x^4 - 4ax^3 + 2ccxx - 4accx + c^4 \quad \infty 0 \\ + 7aa \quad - 4aac \quad - 4a^4 \\ + 2ac \quad - 6a^3 \quad + 8a^3c \\ \quad \quad \quad + 2ac^3 \\ \quad \quad \quad + 3aacc \end{array}$$

sumendo literam  $c$  pro incognita quantitate, invenio æquationem hanc  $c^4 + 2ac^3 + 3aacc + 8a^3c - 4a^4 \infty 0$ .

Deinde inquiri per antecedentes vel sequentes Regulas utrum hæc Ficta per aliam rationalem dividi possit; Si enim hoc fieri nequeat, manifestum est ultimum Terminum æquationis Propositæ nullos quoque divisores rationales admittere (nisi unitatem atque ipsum ultimum Terminum integrum inter divisores numerare velimus; sed hi in æquationibus literalibus, ubi omnes quantitates eundem dimensionum numerum habent, nullius usus sunt); Quòd si verò dividi possit, oportet rursus eodem modo quærere divisores hujus divisoris & quotientis, atque ita evidens erit, quo pacto omnes rationales æquationes, quæ hanc Fictam

etiam æquationem dividere possunt, inveniri queant, quæ quidem æquationes tunc futuræ sunt quælitæ divisores ultimi Termini æquationis Propositæ.

Per præcedentes autem uti & per sequentes Regulas omnes divisores hujus Fictæ æquationis, non cognitis ejus divisoribus ultimi Termini, ut plurimum facillimo negotio inveniri poterunt. imo perpaucae æquationes occurrunt, quarum divisores ultimi Termini non per sequentem 21 Regulam, & dicto modo inveniri possent. Quoniam verò aliquando tales dantur, quarum divisores nec per hanc 21 Reg. nec per aliquam præcedentium obtineri queant; ulterius videndum est, num Fictæ æquationis ultimus Terminus, *unum an plura membra* habeat. Si enim *unum tantum membrum* habuerit, quemadmodum in hoc exemplo, in quo ultimus Terminus est  $-4a^4$ , notum est quo pacto ejusdem divisores investigare liceat, possuntque deinde eorum ope per sequentes Regulas inveniri æquationes omnes rationales, per quas hæc Ficta divisibilis erit, atque ita habebuntur etiam omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ, qui requirebantur.

Quod si verò ultimus Terminus Fictæ æquationis *plurium membrorum* fuerit, tum rursus eundem, ut ante, supponerem  $\infty 0$ , ac iterum agerem, quemadmodum jam dictum est, donec inveniatur æquatio, vel cujus rationales divisores per aliquam præcedentium, sive per 21 Regulam facillimè inveniuntur; vel cujus ultimus Terminus tantum *unius membri* existit. & ad alterutrum obtinendum parum temporis requiritur; & alterutro invento, Quæsitum obtineri potest, quoniam tunc per sequentes Regulas inveniri possunt æquationes omnes, ultimam hanc Fictam dividentes; atque ita inventis omnibus divisoribus ultimi Termini proximè ante-



antecedentis Fictæ æquationis possunt denuo per easdem Regulas, ope horum divisorum ultimi Termini, inveniri æquationes omnes, quæ huic proximè antecedentem Fictam dividere queunt, sicque ulterius ascendendo obtinebuntur tandem divisores omnes, quicunque fuerint, ultimi Termini Propositæ æquationis, qui inveniendi proponebantur.

Exempli gratiâ, si proponantur inveniendi divisores omnes ultimi Termini hujus æquationis

$$\begin{array}{rcl}
 x^4 * & - 14 a a x x & + 32 a a c x + a^4 \cdot \infty 0, \\
 + 4 a c & + 4 a c d & - 10 a a c c \\
 + 2 c c & - 16 a d d & - 2 a c c d \\
 + 4 d d & & + 4 a a d d \\
 + d c & & + 4 a c^3 \\
 & & + 4 a^3 c \\
 & & + d c a a \\
 & & + 24 a c d d \\
 & & + 4 c c d d \\
 & & + 4 c d^3 \\
 & & + c^4 \\
 & & + d c^3
 \end{array}$$

nimirum ope Regularum sequentium, æquationes omnes rationales, per quas aliqua Proposita dividi potest, detegentium beneficio divisorum ultimi Termini: suppono ejus ultimum Terminum  $\infty 0$ , atque unam ex ipsius literis considero ceu incognitam quantitatem, ut puta  $a$ , obtineoque æquationem in ordinem redactam,

$$\begin{array}{rcl}
 a^4 + 4 c a^3 & - 10 c c a a & - 2 c c d a + 4 c c d d \infty 0. \\
 + 4 d d & + 4 c^3 & + 4 c d^3 \\
 + d c & + 24 c d d & + c^4 \\
 & & + d c^3
 \end{array}$$

Quoniam autem hujus ultimus terminus etiam plura membra habet, suppono ipsum rursus, ut ante,  $\infty 0$ , sumendoque  $c$  pro incognita quantitate, obtineo inde hanc æquationem

$$c^4 + d c^3 + 4 d d c c + 4 d^3 c \infty 0.$$

Quæ divisa per  $c$  dat  $c^3 + d c c + 4 d d c + 4 d^3 \infty 0$ , quæ est æquatio in qua ultimus Terminus  $4 d^3$  tantum unum Membrum habet.

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 465

habet. Constat autem quo pacto divisores hujus ultimi termini inveniantur, qui, postquam cogniti erunt, inservire poterunt, ut eorundem ope per sequentes Regulas quarantur æquationes omnes rationales, hanc ultimam Fictam  $c^3 + dec + 4ddc + 4d^3 \infty$  dividentes, ac proinde etiam æquationes, quæ  $c^3 + dc^2 + 4ddc + 4d^3 \infty$  dividere possunt, quæ quidem est ultimus Terminus Fictæ æquationis proximè præcedentis

$$\begin{array}{r} a^3 + 4ca^2 - 10ccaa - 2ceda + 4ccdd \infty 0. \\ + 4dd - + 4c^3 + 4cd^3 \\ + dc + 24cdd + c^4 \\ + dc^3 \end{array}$$

Inventis verò divisoribus omnibus ultimi hujus æquationis Termini, possunt denuo per easdem Regulas inveniri omnes æquationes rationales hanc ipsam dividentes; quibus cognitis inventum est, quod quærebatur, cum æquatio hæc Ficta ultimus sit Propositæ æquationis Terminus.

Hinc liquet per solam sequentem XVII Regulam semper omnes divisores ultimi Termini inveniri posse: sed, quoniam per præcedentes uti & per reliquas sequentes Regulas sæpe primo intuitu cernitur tales divisores non dari, si non dentur, & ii qui dantur sæpe minori labore inveniuntur, poterunt & hæ Regula magno cum fructu adhiberi.

XVI REGULA,

*Quæ modum docet inveniendi omnes æquationes rationales, duos tantum Terminos habentes, quibus æquatio quavis rationalis & Fractione carens, sive literalis sive numeralis sit, dividi possit.*

Fiat alia æquatio pro libitu ex duabus aut pluribus quantitativibus, aut etiam terminis Propositæ æquationis; atque juxta hanc suppositionem inveniatur valor ipsius  $x$ ; vel sumatur tantum aliquis valor pro  $x$ , ut libet. Deinde substituto hoc valore Ficto ipsius  $x$ , vel eo quem ex æquatione Ficta invenimus, ubique in locum ipsius  $x$  æquationis Propositæ: Si termini se mutuo de-

N n n

fluere



struere reperiantur, erit Proposita æquatio divisibilis per  $x$  — hoc Fictio valore  $\infty 0$ ; si autem hi termini se mutuò non destruant, quærantur divisores aggregati horum omnium terminorum (quod quidem aggregatum, ut ab ultimo termino æquationis distinguatur, in posterum vocabo *Terminum Fictum*); atque ab unoquoque divisore unius dimensionis auferatur valor Fictus ipsius  $x$ , at ab unoquoque divisore duarum dimensionum auferatur ejusdem valoris quadratum, & sic deinceps. Quo peracto, videndum erit num aliqua horum reliquorum consentiant cum divisoribus ultimi Termini æquationis Propositæ; si enim nulla eorum cum iis consentiant, indicio est æquationem Propositam per aliam duos tantum Terminos habentem, seu per  $x$ , aut  $xx$ , &c. + vel — quantitate quâvis cognitâ atque rationali non esse divisibilem: Si verò aliqua consentiant, oportet, facto unoquoque consentiente +  $x$  earundem dimensionum,  $\infty 0$ , explorare per quam harum æquationum æquatio Proposita dividi possit; si enim per nullam ipsarum divisibilis sit, erit quoque Proposita per  $x$ , aut  $xx$ , &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali indivisibilis. Quæ quidem omnia sequenti exemplo clariora evadent.

Ut ad investigandos divisores, si qui sint, hujus æquationis  $x^3 - 21axx - bbx + 20abb\infty 0$ , suppono  $x^3 \infty 21axx$   
+  $20aa$

vel  $bbx \infty 20abb$ , vel ad libitum quemlibet pro  $x$  valorem assumo, utputa  $a$  vel  $b$ : sed assumamus  $x^3 \infty 21axx$ , sive  $x \infty 21a$ . Deinde subrogando  $21a$  ubique in locum  $x$  in æquatione Proposita  $x^3 - 21axx - bbx + 20abb\infty 0$  (reijciendo breviter  
+  $20aa$

tatis causâ terminos, ex quibus æquatio Ficta est constata, cum ipsi, dum nihilo sunt æquales positi, necessariò evanescant) obtineo pro terminorum omnium aggregatq.  $- 21abb + 21$ ,  
20a<sup>3</sup>

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 467

$20a^3 + 20abb$ , vel  $-abb + 21$ ,  $20a^3$ , quod quidem aggregatum voco *Fictum Terminum*, cujus divisores hi quatuor existunt  $+a$ , &  $-a$ ;  $-bb + 21$ ,  $20aa$ , &  $+bb - 21$ ,  $20aa$ . Porro subducto hoc Ficto valore  $21a$  ab utroque priorum; & ab utroque duorum sequentium ejusdem valoris quadrato, (quoniam ipsi duarum sunt dimensionum;) relinquentur  $-20a$ ,  $-22a$ ;  $-bb - 21aa$ ,  $bb - 41$ ,  $21aa$ . Quo peracto, si videatur num aliqua horum Reliquorum consentiant cum divisoribus ultimi Termini  $+20abb$  æquationis Propositæ, comperietur solummodo  $-20a$  consentire. Quocirca ad  $-20a$  additâ  $x$  unius dimensionis, siquidem  $-20a$  unius tantum dimensionis existit, explorandum duntaxat restat num æquatio Proposita dividi possit per  $x - 20a$ . quod, si non contingat, erit ea per  $x$ , aut  $xx$ , + vel  $-$  quavis aliâ quantitate cognita atque rationali indivisibilis, quemadmodum quoque si nulli divisores congruentes reperti fuissent. at verò hæc æquatio dividi poterit per  $x - 20a$ , orieturque pro quotiente  $xx - ax - bb30$ .

Hic autem quædam considerata veniunt, quæ breviter saltem indicabo.

1. Per hanc viam omnes æquationes duorum terminorum, quibus æquatio Proposita dividi possit, eadem operâ inveniuntur.

2. In formanda nova æquatione, aut cum ipsi  $x$  affingitur aliquis valor, observandum est, eum brevitatis causâ ita fingi posse, ut ipso in locum  $x$  subrogato resultet inde tale quantitatum aggregatum seu *Fictus Terminus*, cujus divisores faciles sint inventu, ac pauci numero. id quod communiter levi negotio obtineri potest.

3. Sæpenumero supervacaneum est, ut omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ quarantur; ut in superiore exemplo videre est, ubi quæ restabant Reliqua, ex divisoribus Ficti Termini & ex assumpto valore ipsius  $x$  &  $xx$  facta, hæc erant quatuor  $-20a$ ,  $-22a$ ,  $-bb - 21aa$ ,  $+bb - 41$ ,  $21aa$ , quorum duo posteriora non possunt congruere cum divisoribus ultimi Termini  $20abb$  æquationis Propositæ, cum duo Membra habeant, atque hic terminus tantum unus. deinde apparet etiam, quod  $22a$  divisor esse non possit ipsius  $20abb$ , quoniam numerus  $22$  major est numero  $20$ ; atque eapropter considerare tantum oportet

Nnn 2

-20



— 20 a, ita ut solummodo inquirendum sit num ultimus Terminus 20 a b b divisibilis sit per — 20 a. Possumus quoque eodem modo, quando divisores ultimi Terminis æquationis Propositæ cogniti sunt, invenire divisores omnes *Ficti Terminis*, qui nobis inservire queunt, reliquis qui inutiles sunt prætermittis. Quin imò in multis casibus, præsertim cum æquatio indivisibilis est, parcere possumus labori, qui in quærendis divisoribus tam ultimi Terminis æquationis Propositæ quàm *Ficti Terminis* esset impendendus, si modò ipsos inter se comparaverimus; quod modicâ experientiâ longè clariùs, quàm multis verbis patefcet.

4. Si fortè contingat ut divisores Congruentes multi adhuc numero existant, ita ut etiam nimis laboriosum foret omnibus istis divisoribus divisionem æquationis Propositæ tentare, poterimus aliam æquationem fingendo aut ipsi  $x$  alium valorem assignando rursus operari, & ut ante, *Reliqua* (quæ singulis divisoribus hujus ultimi *Ficti termini*, — ultimò ipsius  $x$ , aut  $xx$ , &c. fictis valoribus sunt æqualia, quemadmodum in Regula fuit dictum,) cum jam inventis Congruentibus comparare, & iterum congruentes, si qui sint, eligere; si verò nulli reperiantur, argumentum est æquationem per  $x$ , aut  $xx$ , &c. + vel — quavis quantitate cognitâ atque rationali esse indivisibilem. Et si adhuc nimis multi fuerint, eodem modo denuo quidam rescindi possunt. Sed hoc rarò accidit in æquationibus literalibus.

5. Si æquatio Proposita Fractionibus carens sit divisibilis per aliam æquationem rationalem, duos tantùm Terminos habentem, non opus est, ad inveniendum hunc divisorem, omnia signa radicalia ex Proposita æquatione auferre, sed ea solummodo, quæ in ultimo Terminis reperiuntur.

*Potest etiam hæc Regula XVI dividi in duas partes, hoc modo:*

Inquire primùm num Proposita æquatio sit divisibilis per aliam in qua unus pluresve termini desunt, secundùm XI Regulam? Si non sit, tantùm secundùm jam descriptam XVI Regulam inquirendum est, num sit divisibilis per  $x$  + vel — aliquo divisore ultimi Terminis,

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 469  
mini, omissis omnibus reliquis divisoribus duarum plu-  
riumve dimensionum.

## XVII REGULA,

*Qua docet modum inveniendi omnes æquationes ratio-  
nales, quibus æquatio quavis rationalis & Fractione carens,  
sive literalis, sive numeralis sit, dividi possit.*

Æquatio talis erit divisibilis per aliam rationalem  
fractionem carentem, in qua vel unus pluresve termini  
deficiunt, vel nullus. Primò itaque inquirendum est  
per XI Regulam, num per rationalem fractionem ca-  
rentem, in qua unus pluresve termini deficiant, dividi  
possit; si comperiat id fieri non posse, erit ea divisi-  
bilis per æquationem nullo termino carentem, & qui-  
dem unius dimensionis, si Proposita sit 3 dimensio-  
num; vel per aliquam unius vel duarum dimensionum,  
si Proposita sit 4 vel 5 dimensionum; vel per aliquam  
1, 2, 3, si Proposita sit 6 vel 7 dimensionum; vel per  
aliquam 1, 2, 3 vel 4 dimensionum, si Proposita habeat  
8 vel 9 dimensiones; & sic in infinitum.

Modum verò inquirendi an ea divisibilis sit per æ-  
quationem simplicem sive unius dimensionis, antea  
ostendi: unde solummodo restat, quò modo reliqui  
divisores, seu æquationes duarum, trium, &c. dimen-  
sionum inveniri queant.

• Et sciendum, me quantitatem cognitam 1<sup>di</sup> termini, adfectam  
suis signis + & — vocare *p*; 3<sup>di</sup> termini *q*; 4<sup>di</sup> *r*; 5<sup>di</sup> *s*; 6<sup>di</sup> *t*; 7<sup>mi</sup> *v*:  
at divisorem ultimi termini, similiter signis suis adfectum, *b*.

### REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 4<sup>ta</sup> DIMENSIO- NVM.

Si æquatio Proposita divisibilis sit per æquationem  
Nnn 3 ratio-



470 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.  
rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{r - bp}{s - b} x + h \infty 0.$$

Excepto tantùm, cùm  $\frac{s}{b}$  est  $\infty b$ , ac simul  $r \infty bp$ , id est,  $h \infty 8 \sqrt{s}$ , &  $h \infty \frac{r}{p}$ , tunc enim divisibilis erit per

$$xx + \frac{1}{2} p 8 \sqrt{\frac{1}{4} pp + {}^2 h - q} \text{ in } x, + h \infty 0.$$

1. Et cum æquatio Proposita sit liberata ab omnibus fractis & surdis quantitatibus, atque dividi queat per æquationem rationalem: sequitur,  $\frac{r - bp}{s - b}$  debere integram esse quantitatem rationalem. Patet etiam  $\sqrt{\quad}$  nunquam esse posse  $\infty h h$ , nisi  $\sqrt{\quad}$  quadratum fuerit, ac  $r$  per  $p$  dividi possit.

2. Sufficiet etiam illos solùm divisores ultimi Termini qui ipsius  $\sqrt{Q^{\text{am}}}$  non excedunt considerare, nimirum, si æquatio sit numeralis; sed si sit literalis, opus tantùm erit divisoribus uti duarum dimensionum, atque ex his semper alterutro tantùm duorum talium, quorum productum constituat ultimum Terminum.

Exempli gratiâ, si proponatur hæc æquatio numeralis  $x^4 - 3x^3 + 12xx - 30x - 200 \infty 0$ , quæ dividi potest per aliquam rationalem; & si compertum sit ipsam indivisibilem esse per  $x$ , + vel - aliquo divifore ultimi Termini, ut & per æquationem 2 dimensionum, in qua aliquis terminus deficit; dividi poterit per hanc  $xx + \frac{r - bp}{s - b} x + h \infty 0.$

Quia igitur hîc  $p$  est  $\infty - 3$

$q$ , quâ non indigemus in hoc exemplo, prætereo.

$r \infty - 30$

$s \infty - 200,$

hinc

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 471

$$\text{hinc erit } xx + \frac{r-hp}{s-b}x + h \infty xx + \frac{-30+3b}{-b-200}x + h \infty 0.$$

Sunt autem Divisores ultimi Termini radicem Quadratam non excedentes; seu valores ipsius  $h$ ,  $\infty + 1$  vel  $-1$

$$\begin{array}{rcl} & +2 & -2 \\ & +4 & -4 \\ & +5 & -5 \\ & +8 & -8 \\ & +10 & -10. \end{array}$$

Unde sumendo  $h \infty + 1$ , erit  $\frac{-30+3b}{-b-200}$  fractio, similiterque

si sumatur  $h \infty - 1$ ;  $\infty + 2$ ;  $\infty - 2$ ;  $\infty + 4$ ;  $\infty - 4$ , &  $\infty + 5$ . At si sumatur  $h \infty - 5$ , obtinebitur  $-1$ , ac proinde tentanda erit divisio per  $xx - 1x - 5 \infty 0$ . Quoniam autem per hanc fieri nequit, transeo ad alium valorem ipsius  $h$ , puta  $+8$ . Sed cum sic rursus prædicta quantitas fractio evaderet; ut & quando pro  $h$  assumitur  $-8$ , transeo ad  $h \infty + 10$ . Quia verò  $r$  fit  $\infty hp$ , ac idcirco  $xx + h \infty 0$ , non poterit similiter hic valor nobis inservire; ita ut nobis solum restet  $h \infty - 10$ . Unde obtinetur æquatio  $xx - 2x - 10 \infty 0$ , per quam Proposita dividi potest.

Eodem modo, si proponatur æquatio literalis

$$\begin{array}{rcl} & +4abb & \\ x^2 * -bb & -a^2 & -4b^2 \\ +2abxx & -4b^2 & +2aabb \infty 0, \\ & +aab & \end{array}$$

Quoniam  $p$  est  $\infty 0$

$$\begin{array}{rcl} r & \infty 4abb - a^2 - 4b^2 + aab \\ f & \infty 2aabb - 4b^2, \end{array}$$

$$\text{erit } xx + \frac{r-hp}{s-b}x + h \infty xx + \frac{4abb-a^2-4b^2+aab}{2aabb-4b^2-b}x + h \infty 0.$$

Divisores ultimi Termini, duas habentes dimensiones, seu valores ipsius  $b$ , sunt  $+bb$ , &  $-4bb + 2aa$ ,

$$\begin{array}{rcl} -bb, & +4bb - 2aa, \\ +2bb, & +2bb + aa, \\ -2bb, & -2bb - aa. \end{array}$$

Quorum tantum prioribus 4 indigemus, nimirum,  $+bb$ ,  $-bb$ ,  $+2bb$ ,



472 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.  
 $+2bb$ ,  $-2bb$ : quoniam reliqui per hos multiplicati ultimum  
 Terminum producant.

Sumendo autem  $bx + bb$ , 2<sup>us</sup> terminus erit fractio. Hinc  
 transeundo ad  $bx + 2bb$ , obtinebitur æquatio  $xx \frac{+b}{-a} x + 2bb \infty 0$ .  
 Per quam Proposita dividi potest, invenitur enim pro quotiente  
 hæc  $xx \frac{+a}{-b} x - 2bb \infty 0$ .

• REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 5<sup>que</sup> DIMEN-  
 SIONVM.

Si æquatio Proposita 5 dimensionum divisibilis sit  
 per æquationem rationalem, plures quàm unam di-  
 mensionem habentem, in qua nullus terminus desit;  
 poterit ipsa dividi per æquationem hanc

$$xx - \frac{x}{2b} + \frac{1}{2}p \sqrt{-\frac{x}{b} + \frac{1}{2}p \square^{\frac{1}{2}}} - q + b + \frac{x}{b} \ln x, + b \infty 0.$$

Et cum æquatio hæc debeat esse rationalis quæ nul-  
 las admittat fractiones; sequitur 2<sup>dum</sup> terminum debe-  
 re esse integram quantitatem rationalem.

*Exemplum.*

Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{rcl} x^5 + 8aabxx + 2ab^3x - b^5 \infty 0. & & \\ -6a^3 & +16a^3b & +a^4b \\ +8abb & +15aabb & -ab^4 \\ -b^3 & -b^4 & +a^3bb \\ & -4a^4 & \end{array}$$

Postquam constat, æquationem hanc dividi non posse per ul-  
 lam aliam, 2 aut 3 dimensiones habentem, in qua unus aut plu-  
 res termini deficiunt, nec per  $x$  aliquo divisore ultimi termini;  
 erit illa divisibilis per superiorem

$$xx - \frac{x}{2b} + \frac{1}{2}p \sqrt{-\frac{x}{b} + \frac{1}{2}p \square^{\frac{1}{2}}} - q + b + \frac{x}{b} \ln x, + b \infty 0.$$

Quan-

$q \propto 0$

et nullius hic est usus.

$$f \propto 2ab^2 + 16a^2b + 15aabb - b^4 - 4a^4$$

$$i \propto -b^2 + a^2b - ab^2 + a^2bb,$$

Et divisores ultimi Termini, duas dimensiones habentes, seu valores ipsius  $b$  sunt  $\propto ab + bb$ , vel  $-ab - bb$ , vel  $bb - aa$ , vel  $-bb + aa$   
vel  $ab - bb$ , vel  $-ab + bb$

$$\text{vel } aa + ab + bb, \text{ vel } -aa - ab - bb:$$

hinc si  $b$  fumatur  $\propto ab + bb$ , obtinebitur

$$xx - \frac{f}{2b} + \frac{1}{2}p \sqrt{-\frac{f}{2b} + \frac{1}{2}p \square^{\frac{1}{2}}} - q + b + \frac{f}{b} \ln x, + b$$

æquale  $xx - 4ax + ab \propto 0$ . Per quam si tentetur utrum Pro-

posita dividi queat, inveniatur divisionem fieri posse, atque pro  
quotiente oriri  $x^2 + 4axx + 16aax - b^2 \propto 0$ .

$$\begin{array}{r} - ab + a^2 \\ - bb \end{array}$$

REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 6 DIMENSIONVM.

Si æquatio Proposita 6 dimensionum divisibilis sit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus desit; erit ipsa divisibilis vel per æquationem 2 dimensionum, vel per aliquam 3 dimensionum. Si divisibilis sit per æquationem rationalem 2 dimensionum, poterit dividi per æquationem  $xx + yx + b \propto 0$ ,

$$\text{existente } y \propto \frac{ph - \frac{f}{b}}{2b - \frac{f}{b}} \sqrt{\frac{ph - \frac{f}{b}}{2b - \frac{f}{b}} \square^{\frac{1}{2}}} + f - \frac{v}{b} + bh - qb.$$

Si divisibilis sit per æquationem rationalem 3 dimensionum, erit divisibilis

000

per



per æquationem  $x^3 + yxx + zx + h\infty 0$ ,  
existente

$$y^3 - \frac{pv}{b} - \frac{p^2ph}{b} + \frac{ppb - p^2t}{b} - \frac{v}{b} + h \text{ in } r, -qb + t \text{ in } p \\ \frac{v}{b} + h \quad \frac{v}{b} + h \quad \frac{v}{b} + h \quad \frac{v}{b} - h \quad \infty 0, \\ + qy \\ \& \tilde{z} \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + h - r}{2y - p}.$$

Porro ob eandem rationem atque in præcedentibus  
Regulis sequitur  $y$  &  $\tilde{z}$  debere esse integras quantitates  
rationales.

Atque in hoc ultimo casu, ubi divisio per  $x^3 + yxx + zx + h\infty 0$  tentanda est, opus tantum est uti divi-  
soribus ultimi Termini qui ejus radicem quadratam  
non excedunt, nimirum quando æquatio numeralis est;  
at ipsâ literali existente, sufficit uti divisoribus 3 di-  
mensionum, atque ex his duntaxat alterutro duorum  
talium, quorum productum ultimum Terminum effi-  
cit, haud secus ac id in præcedenti Regula pro æqua-  
tionibus 4<sup>or</sup> dimensionum quoque annotatum fuit.  
Quæ porro animadversio locum etiam obtinet in o-  
mnibus æquationibus parium dimensionum, quas di-  
videre tentamus per aliam dimidium præcedentium  
dimensionum numerum habentem.

#### DETERMINATIO 1<sup>mi</sup> CASVS.

Cum  $2h - \frac{pv}{b}$  est  $\infty 0$ , hoc est,  $h^3 \infty v$ , &  $h \infty \sqrt{C.v}$ :

$$\text{erit } y \infty \frac{-f + q\sqrt{C.v}}{p\sqrt{b.v} - \frac{v}{\sqrt{C.v}}}.$$

Cum

Cum  $2b - \frac{2v}{b}$  est  $\infty 0$ , ac simul  $p\sqrt{C.v} - \frac{f}{\sqrt{C.v}} \infty 0$ , &  
 $-f + q\sqrt{C.v} \infty 0$ , hoc est,  $b\sqrt{C.v}$ ,  $b\sqrt{\frac{f}{p}}$ , &  $b\sqrt{\frac{f}{q}}$   
 erit  $y^3 - pyy + \frac{f}{\sqrt{C.v}}y + 2p\sqrt{C.v} \infty 0$ .

DETERMINATIO 2<sup>a</sup> CASVS.

Cum  $\frac{v}{b} + b$  est  $\infty 0$ , erit  $yy - \frac{p}{2t}y - \frac{2r}{p} + q - \frac{f}{b} \infty 0$ .

Cum  $p$  est  $\infty 0$ , ac simul  $\frac{v}{b} + b \infty 0$ , erit  $y \infty \frac{r}{b}$ .

Cum  $t$  est  $\infty 0$ , &  $r \infty 0$ , ac simul  $p \infty 0$ , &  $\frac{v}{b} + b \infty 0$ ,  
 erit  $y^4 + 2qyy + 8by + 4f \infty 0$ .

Cum  $2y$  est  $\infty p$ , &  $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r \infty 0$ ,  
 erit  $\frac{t + byy - qb}{\frac{v}{b} - b}$ .

Sed cum determinationes illæ manent, ac simul  $\frac{v}{b} - b$   
 est  $\infty 0$ , &  $t + byy - qb \infty 0$ , erit  $\frac{f}{2\sqrt{v}} \& \sqrt{\frac{f}{4v}} - f + p\sqrt{v}$ .

Denique in omnibus determinationibus adverten-  
 dum est, quod, si reperiatur  $2b - \frac{2v}{b} \infty 0$ , &  $p\sqrt{C.v} -$   
 $\frac{f}{\sqrt{C.v}} \infty 0$ , sed  $-f + q\sqrt{C.v}$  non simul esse  $\infty 0$ ; ut & si  
 reperiatur  $\frac{v}{b} + b \infty 0$ ,  $p \infty 0$ , &  $t \infty 0$ , sed  $r$  non simul  $\infty 0$ ;  
 itemque si reperiatur  $2y \infty p$ , &  $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b$   
 $-r \infty 0$ , &  $\frac{v}{b} - b \infty 0$ , sed  $t + byy - qb$  non simul  $\infty 0$ ;

Ooo 2

atque



atque similiter in Regula pro 4<sup>or</sup> dimensionibus, si  $\frac{f}{b} - h$  reperiatur  $\infty 0$ , sed non perinde  $r - hp \infty 0$ : quod tum inquam valor assumptus ipsius  $h$ , quod hoc contingit, nobis inservire non possit.

*Exempla 1<sup>mi</sup> Casus.*

Proponatur inquirendum, an hæc æquatio  
 $x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 4xx^* + 8\infty 0$   
 dividi possit per æquationem rationalem 2 dimensionum, in qua nulli termini deficient.

Cum igitur hic  $p$  sit  $\infty - 3$

$$\begin{array}{rcl} q & \infty & 7 \\ r & \infty & -5 \\ s & \infty & 4 \\ t & \infty & 0 \\ v & \infty & 8. \end{array}$$

$$\text{erit } y \infty \frac{ph - \frac{t}{b}}{2h - \frac{v}{b}} 8 \sqrt{\frac{ph - \frac{t}{b}}{2h - \frac{v}{b}} \square^{te} \frac{+s - \frac{v}{b} + hb - qb}{h - \frac{v}{b}}}$$

æqualis

$$\frac{-3h}{2h - \frac{16}{b}} 8 \sqrt{\frac{-3h}{2h - \frac{16}{b}} \square^{te} \frac{4 - \frac{8}{b} + hb - 7h}{h - \frac{8}{b}}}$$

Divisores autem ultimi Termini, seu valores ipsius  $h$  sunt

$$\begin{array}{rcl} +1, & \text{vel} & -1 \\ +2, & & -2 \\ +4, & & -4 \\ +8, & & -8. \end{array}$$

Hinc si primò sumatur  $h\infty + 1$ , non poterit radix ex

$$\frac{-3h}{2h - \frac{16}{b}} \square^{te} \frac{4 - \frac{8}{b} + hb - 7h}{h - \frac{8}{b}} \text{ extrahi, ac proinde transeo}$$

ad

ad  $b\infty + 2$ , sed cum sic  $b$  fiat  $\infty \sqrt{C.v}$ , deberet, juxta determinationes superiores,  $y$  esse  $\infty \frac{-f + q\sqrt{C.v}}{p\sqrt{C.v} - \frac{r}{\sqrt{C.v}}}$ , hoc est,  $\infty \frac{+10}{-6}$ . Id

quod cum fractio existat, transeo ad  $b\infty + 4$ , atque inde obtineo  $y\infty \frac{-12}{+7} 8\frac{2}{7}$ , hoc est,  $y\infty -2$ , aut  $\infty -\frac{10}{7}$ . Quorum quidem non nisi  $y\infty -2$  retinendum est, adeoque divisio tentanda per  $xx + yx + b\infty xx - 2x + 4\infty 0$ . Hæc autem procedere comperitur, oritur namque pro quotiente  $x^4 - 1x^3 + 1xx + 1x + 2\infty 0$ .

Eodem modo, si examinare velimus hanc æquationem  $x^6 + 1x^5 + 1x^4 - 2x^3 + 2xx + 4x + 8\infty 0$ : quoniam  $p$  est  $\infty 1$ ,  $q\infty 1$ ,  $r\infty -2$ ,  $f\infty 2$ ,  $t\infty 4$ , &  $v\infty 8$ , invenitur

$$y\infty \frac{1b - \frac{4}{b}}{2b - \frac{16}{b}} 8\sqrt{\frac{1b - \frac{4}{b}}{2b - \frac{16}{b}}} \square^{10} \frac{+2 - \frac{8}{b} + bh - b}{b - \frac{8}{b}}.$$

Sumendo autem  $b\infty + 1$ , non poterit  $\sqrt{Q}$ . extrahi; quocirca transeo ad  $b\infty + 2$ , invenioque  $b$  fore  $\infty \sqrt{C.v}$ , ac  $b\infty \sqrt{\frac{r}{p}}$ , ut &  $b\infty \frac{f}{q}$ . Unde fit ut juxta dictam determinationem valorem quæram ipsius  $y$  per hanc æquationem

$$y^3 - pyy + \frac{f}{\sqrt{C.v}}y + 2p\sqrt{C.v} - 3\sqrt{C.v} - r \infty 0,$$

hoc est,  $y^3 - 1yy - 5y + 6\infty 0$ .

E qua æquatione pro  $y$  nullus valor rationalis invenitur præter 2, ac proinde divisio tentanda relinquitur per  $xx + yx + b\infty xx + 1x + 2\infty 0$ . Comperitur autem fieri posse, oritur enim pro quotiente  $x^4 - 1x^3 + 1xx - 2x + 4\infty 0$ .

### Exempla 2<sup>di</sup> Casus.

Esto examinandum, an hæc æquatio

$$x^6 + 1x^5 + 3x^4 + 6xx + 3x - 4\infty 0$$

dividi possit per æquationem rationalem 3 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

O o o 3

Cum



Cum hinc  $p$  sit  $\infty$  0

$$q \quad \infty \quad 1$$

$$r \quad \infty \quad 3$$

$$s \quad \infty \quad 6$$

$$t \quad \infty \quad 3$$

$$p \quad \infty - 4,$$

$$\text{erit } y^3 - \frac{pv}{b} - 2ph - \frac{+pph - 2t}{\frac{v}{b} + b} y - \frac{-\frac{v}{b} + b \text{ in } r, -qb + t \text{ in } p}{\frac{v}{b} + b} + qy \quad \frac{\frac{v}{b} - b}{\frac{v}{b} + b}$$

æqualis

$$y^3 - \frac{+1}{-6} y - \frac{\frac{4}{b} + b \text{ in } 3}{-\frac{4}{b} + b} y \quad \frac{-\frac{4}{b} - b}{-\frac{4}{b} + b} \infty 0.$$

Divisores ultimi Termini, seu valores ipsius  $b$ , qui soli sunt considerandi, sunt  $+1$ , vel  $-1$ , vel  $+2$ . Unde sumendo  $b \infty +1$ , obtinebitur  $y^3 + 3y^2 \infty 0$ . Sed cum  $y$  hujus æquationis nullum valorem rationalem admittat, transeo ad alium, nempe  $+2$ .

Cum autem sic  $\frac{v}{b} + b$  fiat  $\infty 0$ , atque etiam  $p$  sit  $\infty 0$ , erit, juxta dictam determinationem,  $y \infty \frac{rb}{r}$ , hoc est,  $y \infty 2$ . At quoniam

$$\text{pro } \zeta \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r}{2y - p} \text{ invenitur fractio, transeo}$$

demum ad  $b \infty -1$ , atque hinc obtineo  $y^3 - 1y^2 \infty 0$ , hoc est,  $y \infty +1$ , &  $y \infty -1$ . E quibus tandem inveniendus superest valor ipsius  $\zeta$ . Quocirca si primum sumatur  $y \infty +1$ , invenietur inde  $\zeta \infty 1$ , &  $x^3 + yxx + \zeta x + b \infty x^3 + 1xx + 1x - 1 \infty 0$ . Per quam æquationem Proposita dividi potest, oritur enim pro quotiente  $x^3 - 1xx + 1x + 4 \infty 0$ . Quod si autem per eam dividi non potuisset, ut nec per aliam, ubi  $y \infty -1$ , æquatio Proposita dicto modo non divisibilis fuisset, quandoquidem sic omnes ipsius  $b$  valores examini subjecissemus.

Simi-

Similiter examinaturi hanc æquationem

$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 36x^3 + 3xx + 16x - 2800$ ,  
in qua  $p$  est  $\infty - 6$ ,  $q \infty 25$ ,  $r \infty - 36$ ,  $s \infty 3$ ,  $t \infty 16$ ,  $v \infty - 28$ ,  
&  $h \infty + 1$  vel  $-1$ , aut  $+2$  vel  $-2$ , aut  $+4$  vel  $-4$ , (negle-  
ctis scilicet reliquis divisoribus, radicem quadratam ultimi termi-  
ni excedentibus:) inveniemus, faciendo, ut ante, periculum cum  
unoquoque valore ipsius  $h$ , si pro  $h$  assumitur  $-2$ , æquationem  
hanc  $y^3 + 5yy + 16\frac{1}{2}y + 3100$ , in qua  $y$  admittit tantum-  
modo unum valorem rationalem, qui integer numerus est nem-  
pe  $-3$ . Per hunc autem quæro valorem ipsius  $\mathcal{Z}$ . Sed cum hic  
 $2y$  sit  $\infty p$ , &  $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \infty 0$ , non possum eun-

dem per hanc æquationem  $\mathcal{Z} \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r}{2y - p}$  in-  
venire, quo circa illum quæro per hanc  $\mathcal{Z} \infty \frac{t + byy - qb}{\frac{v}{h} - h}$ , atque

invenio  $\mathcal{Z} \infty 3$ , &

$x^3 + yxx + \mathcal{Z}x + h \infty x^3 - 3xx + 3x - 200$ .  
Per quam igitur examinando an Proposita dividi queat, compe-  
rietur divisionem fieri posse, oriaturque pro quotiente  $x^3 - 3xx$   
 $+ 13x + 1400$ . Si verò in hoc ultimo exemplo, ubi  $2y$  est  $\infty p$ ,  
non fuisset  $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \infty 0$ , oportuisset transire  
ad alium valorem ipsius  $h$ .

Ubi notandum per has Regulas pro æquationibus 4, 5, & 6 di-  
mensionum non solum sciri posse, an Proposita aliqua æquatio per  
aliam rationalem, in qua omnes Termini extant, divisibilis sit;  
sed etiam utrum ipsa divisibilis sit per rationalem, in qua aliquis  
Terminus deficiat. Verùm cum idem facilius cognosci queat per  
XI Regulam, hanc iis duntaxat æquationibus, in quibus nulli  
termini deficiunt, applicare volui.

2. Quoniam autem usus harum Regularum vel eo major est,  
quo pauciores divisores ultimus Terminus Propositæ æquationis  
admittit, haud inconsultum fuerit hic adungere modum, quo  
plerumque levi negotio Propositam æquationem in aliam trans-  
mutare licet, in qua ultimus Terminus pauciores habeat dimen-  
siones, quæque indivisibilis sit si Proposita sit indivisibilis, at di-  
visi-



visibilis, si Proposita divisibilis fuerit, & ex cujus æquationibus ipsam dividendum facile quoque inveniri possint æquationes, Propositam dividentes.

Assumpto in hunc finem valore aliquo pro  $x$ , ut lubet, eoque subrogato ubique in locum  $x$ , quarantur divisores omnes aggregati omnium terminorum; & si divisores hi non pauciores numero fuerint divisoribus ultimi Termini æquationis Propositæ, sumatur rursus alius valor pro  $x$ , exploreturque num hinc aggregatum pauciorum divisorum inveniatur; quod si non fiat, denudò pro  $x$  alius valor assumendus est, idque tam diu continuetur, donec inde aggregatum resultet, quod pauciores divisores habeat. Quo peracto, ponatur  $x \propto \zeta$ , + assumpto ipsius  $x$  valore, huiusmodi aggregatum pauciorum divisorum suggerente, atque hic valor  $\zeta + \&c.$  ubique in locum  $x$  substituatur, obtinebiturque alia æquatio, in qua  $\zeta$  erit incognita quantitas, & ultimus Terminus dictum aggregatum inventum pauciorum divisorum; ita ut hæc æquatio talis futura sit, qualis requiritur, nimirum indivisibilis si Proposita indivisibilis sit, at divisibilis si Proposita divisibilis fuerit.

Exempli gratiâ, esto invenienda ejusmodi æquatio loco hujus

$$x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \propto 0.$$

$$\text{Sumatur } x \propto 1, \text{ fietque } x^5 \propto + 1$$

$$+ 2x^4 \propto + 2$$

$$- 58x^3 \propto \dots - 58$$

$$- 49xx \propto \dots - 49$$

$$- 50x \propto \dots - 50$$

$$- 600 \propto \dots - 600,$$

&  $x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \propto + 3 - 757$ , hoc est,  $\propto - 754$ . cujus quidem numeri divisores multò pauciores existunt quàm ipsius  $- 600$ .

Hinc ponendo  $x \propto \zeta + 1$ ,

erit

$$\begin{array}{rcl}
 \text{erit} & x^3 \propto \zeta^3 + 5 \zeta^2 + 10 \zeta^3 + 10 \zeta \zeta + 5 \zeta + 1 & \\
 + 2 x^2 \propto & + 2 \zeta^2 + 8 \zeta^3 + 12 \zeta \zeta + 8 \zeta + 2 & \\
 - 58 x^1 \propto & - 58 \zeta^3 - 174 \zeta \zeta - 174 \zeta - 58 & \\
 - 49 x x \propto & - 49 \zeta \zeta - 98 \zeta - 49 & \\
 - 50 x \propto & - 50 \zeta - 50 & \\
 - 600 \propto & - 600, & \\
 & \& \zeta^3 + 7 \zeta^2 - 40 \zeta^3 - 201 \zeta \zeta - 309 \zeta - 754 \propto 0. &
 \end{array}$$

Quæ æquatio per præcedentes Regulas examinata divisibilis reperitur per  $\zeta \zeta + 3 \zeta - 58 \propto 0$ , ac proinde cum  $x$  sit  $\propto \zeta + 1$ , erit  $\zeta \propto x - 1$ . Unde si in locum  $\zeta$  subrogetur  $x - 1$ , obtinebitur  $\zeta \zeta + 3 \zeta - 58 \propto x x + 1 x - 60 \propto 0$ . per quam itaque Proposita quoque æquatio divisibilis erit.

Quòd si autem post primam positionem ipsius  $x \propto + 1$  obtinuissemus aggregatum, quod nobis non inservisset, id est, quod non pauciores aut adhuc nimis multos divisores admisisset, ponere potuissemus  $x \propto - 1$ ; quòd si verò & hinc quæsitum aggregatum nondum invenissemus, ponere possemus  $x \propto + 2$ ; deinde  $x \propto - 2$ , atque ita porro; vel etiam possemus nonnullos terminos supponere  $\propto 0$ , si aliqui fuerint è quibus idonea quantitas pro  $x$  inveniri posset. Exempli gratiâ, possemus in æquatione allata duos priores terminos  $x^3 + 2 x^2$  supponere  $\propto 0$ , atque sic invenire  $x \propto - 2$ , quærendo tantum ulterius aggregatum reliquorum Terminorum  $- 58 x^1 - 49 x x - 50 x - 600$ . Porro, quod hîc de æquationibus numeralibus diximus, idem quoque locum obtinet in literalibus. Si enim, verbi gratiâ, habeatur æquatio literalis hæc  $x^3 - 6 a b x^2 + 30 a a b x x - 24 a^3 b x + 120 a b^2 \propto 0$ ,  
 $+ 104 a^4$

ponere possumus  $x \propto + a$ , vel  $x \propto - a$ , vel  $x \propto + b$ , vel  $x \propto - b$ , &c. vel etiam supponere terminos aliquos  $\propto 0$ , ut  $- 6 a b x^2 \propto + 30 a a b x x$ , prout visum fuerit.

3. Verum enimvero magnum hîc commodum in literalibus æquationibus elucet: Nam *non tantum, cum hoc aggregatum nullos divisores præter unitatem ac se ipsum admittit* (quos quidem divisores in æquationibus literalibus, ubi omnia cujusque termini membra eundem dimensionum numerum habent, quemadmodum in his de quibus agimus, prætermittere soleo, cum nulla divisio per eos fieri possit), *manifestum est, æquatio-*

P p p

nem



nem Propositam per aliam rationalem, in qua siue omnes siue non omnes termini extant, & siue unius siue plurium est dimensionum, penitus esse indivisibilem; Sed præterea etiam liquet, æquationem Propositam nunquam fore divisibilem per æquationem rationalem, cuius dimensionum numerus non congruit cum dimensionum numero alicuius ex divisoribus ultimi Termini vel dicti aggregati. Quocirca si æquatione existente 6 dimensionum divisores non nili 1 & 5 dimensionum fuerint, erit ea indivisibilis per æquationem 2, 3, & 4 dimensionum; & si divisores tantum 2 & 4 dimensionum fuerint, erit ipsa indivisibilis per æquationem 1, 3, & 5 dimensionum, atque ita de omnibus aliis.

Ita ut per hanc considerationem non tantum multi casus rescari queant, quando æquatio per aliam rationalem divisibilis est; sed etiam si inquirere velimus, num Proposita aliqua æquatio rationalis per aliam rationalem divisibilis sit, poterit sapissime parvo admodum labore indivisibilitas, si ea sit indivisibilis, cognosci.

Si enim, exempli causâ, proponatur æquatio

$$x^5 - 6abx^3 + 30a^2bxx - 24a^3bx + 120a^4x^0, \\ + 10a^4$$

ponaturque  $x \propto a$ , obtinebitur  $x^5 \propto + a^5$

$$\begin{array}{rcl} - 6abx^3 \propto & . & . & . & - 6a^4b \\ + 30a^2bxx \propto & + & 30a^4b \\ - 24a^3bx \propto & . & . & . & - 24a^4b \\ + 10a^4x \propto & + & 10a^5 \\ + 120ab^4 \propto & + & 120ab^4 \end{array}$$

& fit aggregatum  $+ 11a^5 + 120ab^4$ .

Cujus divisores (omissis unitate ac ipso aggregato) tantum sunt  $+a$ ,  $-a$ ,  $11a^4 + 120b^4$ , &  $-11a^4 - 120b^4$ , unius scilicet & 4<sup>or</sup> dimensionum: ita ut Proposita æquatio, si per rationalem unius dimensionis divisibilis non fuerit, penitus per rationalem futura sit indivisibilis. Quoniam autem hic  $x$  est  $\propto \zeta + a$ , addi debet  $a$  divisoribus  $+a$ , &  $-a$ , ad habendos valores ipsius  $x$ , idcirco tantummodo  $x - 2a \propto 0$  pro divisore assumi posset. Sed per

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 483  
 per hunc æquatio Proposita non est divisibilis, quare illa etiam  
 per nullam æquationem rationalem dividi poterit. Quod si juxta  
 unam positionem non ita accidisset, facile fuerit aliam instituere,  
 ponendo  $x \propto b$ , vel  $x \propto a$ , vel  $x \propto b$ , &c. Et rarò continget,  
 quin per hanc transmutationem æquationis Propositæ in aliam  
 aliquod commodum consequuturi atque operæ plurimum sub-  
 levaturi simus.

XVIII REGULA,

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem sive  
 litteralem sive numeralem, cujus ultimus Terminus Fractio-  
 ne caret, & qua ex multiplicatione duarum aliarum, qua-  
 rum ultimi Termini sunt quantitates rationales, produci  
 possunt.*

Hæc Regula parùm à præcedenti differt, nisi quòd se latius  
 extendat, & per hanc quoque Reductiones ejusmodi æquatio-  
 num semper inveniri possint, quæ ex duabus aliis, sive rationales,  
 sive irrationales sint, produci possunt, hoc tantùm excepto, quòd  
 ultimi earum termini sint quantitates rationales; cum præcedens  
 Regula se solùm extendat ad æquationes, quæ non nisi ex ratio-  
 nalibus produci possunt: ideoque tantùm opus est, ut solummo-  
 do iisdem Regulis utamur, omnibus illis particularibus relictis,  
 quæ originem duxerunt ex eo, quòd necesse sit, ut illæ æquatio-  
 nes, ex quibus Proposita æquatio produci potest, sint rationales,  
 quod hîc non requiritur. Exempli loco sit prima

REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 4<sup>or</sup> DIMENSIO-  
 NVM.

Si æquatio Proposita divisibilis sit per aliam, plures  
 quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus  
 terminus deficiat, & cujus ultimus terminus sit ratio-  
 nalis; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{r-bp}{s-b}x + b \propto 0.$$

Ppp 2

Ex-



Excepto tantum, cum  $\frac{s}{h}$  est  $\propto h$ , ac simul  $r \propto hp$ , id est,  $h \propto 8\sqrt{s}$ , &  $h \propto \frac{r}{p}$ , tunc enim divisibilis erit per

$xx + \frac{1}{2}p \ 8\sqrt{\frac{1}{4}pp + 2h - q}$ , in  $x$ ,  $+h \propto 0$ .  
ubi patet nunquam esse posse  $\propto hh$ , nisi  $s$  quadratum fuerit, ac  $r$  per  $p$  dividi possit.

2. Sufficit etiam illos solum divisores ultimi termini, qui ipsius radicem quadratam non excedunt, considerare, &c.

Exempli gratia, examinaturus hanc æquationem

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0:$$

quoniam  $p \propto -2a$ ,  $q \propto 2aa - cc$ ,  $r \propto -2a^3$ ,  $s \propto a^4$ , hinc erit

$$xx + \frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}x + h \propto xx \frac{-2a^3+2ah}{\frac{a^4}{h}-h}x + h \propto 0.$$

Sunt autem divisores ultimi Termini, seu valores ipsius  $h$ ,  $+aa$  &  $-aa$ . Unde sumendo  $h \propto aa$ , obtinebitur  $\frac{a^4}{h} - h \propto 0$ , ac etiam  $-2a^3 + 2ah \propto 0$  (hoc est,  $\frac{s}{h} \propto h$ , & simul  $r \propto hp$ .) ac proinde tentanda erit divisio per  $xx + \frac{1}{2}p \ 8\sqrt{\frac{1}{4}pp + 2h - q}$ ,  $x$ ,  $+h \propto 0$ , hoc est, per  $xx - ax + \sqrt{aa + cc}$ ,  $x$ ,  $+aa \propto 0$ , vel per  $xx - ax - \sqrt{aa + cc}$ ,  $x$ ,  $+aa \propto 0$ : Quæ divisio per utramque succedit.

Ita etiam se res habet in

REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 5<sup>que</sup> DIMENSIONVM.

Si enim æquatio Proposita 5 dimensionum divisibilis sit per aliam plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, cujusque ultimus terminus sit rationalis; erit ea divisibilis per

$$xx - \frac{s}{2h} + \frac{1}{2}p \ 8\sqrt{-\frac{s}{2h} + \frac{1}{2}p} \square^{\frac{1}{2}} - q + h + \frac{s}{h}, \text{ in } x, +h \propto 0.$$

Et

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 485

Et sic porro de cæteris Regulis, tantum, uti dictum est, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quod necesse sit, ut illæ æquationes, ex quibus Proposita æquatio produci potest, illic sint rationales, quod solum hic non requiritur.

Animadvertendum quoque est, hanc Regulam se non solum extendere ad æquationes, in quibus nec signa radicalia, nec Fractiones inveniuntur, (quemadmodum præcedens illis tantum quadrat,) sed quoque ad illas, in quibus & radicalia signa & Fractiones reperiuntur, hoc tantum excepto, quod non sint in ultimo Termino, ut antea dictum.

Denique notandum est, quod idem etiam sequenti modo inveniri possit.

REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 5 DIMENSIONVM.

Quære communem divisorem duarum æquationum,  
 $yy + \frac{s}{b}y + q \infty 0$ , &  $yy - \frac{f^b}{s}y - hbp - r + rh$   
 $-p - b \quad + \frac{f^b}{s} \quad \frac{s}{b}$   
 $- \frac{s}{b}$

& per eum, valorem ipsius  $y$ ; eritque Proposita æquatio divisibilis per  $xx + yx + b \infty 0$ .

REGULA PRO ÆQUATIONIBVS 6 DIMENSIONVM.

Si Proposita æquatio divisibilis est per

$$xx + yx + b \infty 0,$$

quærratur communis divisor duarum æquationum,

$$hyy - \frac{v}{b}yy - pby - f \infty 0, \text{ \& } y^3 - pyy + qy - r \infty 0,$$

$$+ \frac{s}{b} \quad + \frac{v}{b} \quad - 2b + pb$$

$$- hb \quad - \frac{v}{hb} + \frac{s}{b}$$

$$+ qb$$

& per eum, valor ipsius  $y$ .

Ppp 3

Si



Si Proposita æquatio est divisibilis per  $x^3 + yxx + zx + h\infty 0$ , possunt per eandem methodum, quâ priores æquationes inventæ sunt, etiam inveniri duæ aliæ, altera trium, altera 4<sup>or</sup> dimensionum, quarum communi divisore invento, per eum valor incognitæ quantitatis  $y$  inveniri potest; valor verò ipsius  $z$  quærat eodem modo, quo antea. Eadem est ratio in altioribus æquationibus.

Sed si nullus inveniatur communis divisor, assumptum valorem ipsius  $h$  relinquo, & alium assumo. Et si omnes termini alterius æquationis se invicem tolerant, per alteram inveniendus est valor ipsius  $y$ .

## XIX REGULA,

*Qua modum docet reducendi omnem æquationem rationalem Fræctione & 2<sup>do</sup> termino carentem, quæ dividi possit per aliam cuius 2<sup>du</sup>s terminus sit rationalis, &c.*

Primum inquiri per XI Regulam, an Proposita æquatio divisibilis sit per aliam in qua non omnes termini extant; quod si fieri nequit, erit divisibilis per aliam in qua omnes termini extant, quam sequenti modo invenio, 1<sup>mo</sup>. Experiatur num dividi possit per  $x +$  vel  $-$  aliquo divisore ultimi Termini; si neque hoc succedat, facio æquationem ejusdem formæ, quam multiplicatione deduco ex tot aliis paribus, quot paria ita sumi queunt, ut productum totidem habeat dimensiones quot Proposita æquatio, non annumerando æquationem unius tantum dimensionis. Exempli gratiâ, si æquatio Proposita habeat 8 dimensiones, considero duas æquationes, habentes 2 & 6, 3 & 5, 4 & 4 dimensiones; aut, si 9 dimensiones habeat, duas, quæ 2 & 7, 3 & 6, 4 & 5 dimensionum fuerint, ex quarum multiplicatione

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 487  
plicatione Proposita posset produci. 3<sup>to</sup>. Post hæc  
transmuto Propositam æquationem in aliam, cujus in-  
cognita quantitas designet quantitatem 2<sup>di</sup> Termini,  
unius harum duarum æquationum, quæ, (si inæqua-  
lium dimensionum fuerint,) pauciores dimensiones  
habeat. 4<sup>to</sup>. Postremò inquirò num inventa æquatio  
divisibilis sit per incognitam quantitatem + vel - ali-  
quo divisore ultimi sui Termini. &c.

Sumamus, verbi gratiâ, hanc æquationem 6 dimensionum,  

$$x^6 * + q x^4 + r x^3 + f x x + t x + v \infty 0,$$
 in qua  $q$  designet quantitatem cognitam tertii termini suis signis  
 + & - affectam;  $r$  quarti;  $f$  quinti;  $t$  sexti; &  $v$  ipsum ulti-  
 mum terminum: Et quam suppono indivisibilem per aliam æ-  
 quationem, in qua unus aut plures Termini deficiunt, ut & per  $x$ ,  
 + vel - aliquo divisore ultimi Termini.

Primò itaque inquirò utrum ipsa divisibilis sit per æquatio-  
 nem 2 dimensionum, in qua omnes termini extant, hoc pacto:

$$\begin{array}{r} x^4 - y x^3 + z x x + k x + l \infty 0 \\ x x + y x + w \infty 0 \\ \hline x^6 - y x^5 + z x^4 + k x^3 + l x x \\ + y \quad - y y \quad + y z \quad + y k \quad + y l x \\ \quad + w \quad - w y \quad + w z \quad + w k \quad + w l \\ \hline x^6 * + q x^4 + r x^3 + f x x + t x + v \infty 0. \end{array}$$

Unde hæc 5 æquationes resultant

$$\begin{array}{ll} 1^{ma}. & z - y y + w \infty q \\ 2^{da}. & k + y z - w y \infty r \\ 3^{tia}. & l + y k + w z \infty f \\ 4^{ta}. & y l + w k \infty t \\ 5^{ta}. & w l \infty v. \end{array}$$

Per 1<sup>am</sup> fit  $z \infty q + y y - w$ , qui valor si in locum ipsius  $z$  in  
 reliquis æquationibus subrogetur, habebitur

$$\begin{array}{ll} \text{pro } 2^{da}. & k + q y + y^3 - 2 w y \infty r \\ 3^{tia}. & l + y k + q w + y y w - w w \infty f \\ 4^{ta}. & y l + w k \infty t \\ 5^{ta}. & w l \infty v. \end{array}$$

Per



488 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.

Per 2<sup>dam</sup> fit  $k_{\infty} r - qy - y^3 + 2wy$ , qui valor in locum ipsius  $k$  in reliquis æquationibus substitutus dat

pro 3<sup>ta</sup>.  $l + ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww_{\infty} f$

4<sup>ta</sup>.  $yl + yw - qwy - y^3 w + 2wy_{\infty} f$

5<sup>ta</sup>.  $w l_{\infty} v$ .

Per 3<sup>tiam</sup> fit  $l_{\infty} f - ry + qyy + y^4 - 3wyy - qw + ww$ , qui valor in reliquis æquationibus substitutus dat

pro 4<sup>ta</sup>.  $fy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wyy + rw_{\infty} t$

5<sup>ta</sup>.  $fw - ryw + qyyw + y^4 w - 3wyy - qww + w^3_{\infty} v$ .

Per 4<sup>tam</sup> æquationem invento valore ipsius  $ww$  (aut ipsius  $3ww$ ), substituo ipsum in locum  $ww$  (aut  $3ww$ ) in 5<sup>ta</sup> æquatione, obtineoque 6<sup>tam</sup> æquationem, in qua  $w$  tantum 1 dimensionem habet, nimirum:

$$wy^8 + 6qy^6 - 4ry^5 + 5fy^4 + 9qy^4 - 5ty^3 - rry^3 + 9fy - 2wy - qy + fy - tr$$

Qui valor si jam in 4<sup>ta</sup> æquatione in locum  $w$  subrogetur, habebitur pro ipsa

$$y^{15} + 4qy^{13} - 2ry^{12} + 6qy^{11} + 10ty^{10} - 2qfy^9 + 12qty^8 - 3rt^2y^7 + 10fst^2y^6 - 2f^2 - 6qr - 26v + 6rf - 24qv - 30rv + 4q^3 - 6qqr - 7ff + 2qqf + 4qrf + q^4 + 2r^3 - 2q^3r$$

$$\begin{aligned} & -12t^2y^5 + 2qf^2y^4 - 5q^2t^2y^3 - 6rt^2yy - qqt^2y - qrt^2_{\infty} \\ & + 6qrt - 6qr^2 + 7r^2f + 2r^3f + 3f^2t + t^3 \\ & -18qqv - 6rrt + 3rrv + 4qr^2 + rrr^2 \\ & - 6qff + 8rff + 9qqr + 3qrrv - r^3v \\ & - 6rrf - 2qqr^2 - 4q^3v - 9rtv \\ & + 2q^3f + 2qr^3 + 9qff - r^3t \\ & + 54fv - 18tv + 18qfv - rrf^2 \\ & - 4f^3 \\ & - 2qrrf \\ & - r^4 \\ & - 27vv \end{aligned}$$

Hæc autem æquatio ea est, quæ juxta Regulam erat querenda, nempe in qua  $y$  designat quantitatem secundi Terminii hujus æquationis  $xx + yx + w_{\infty} o$ , quæ una est duarum, ex quarum multiplicatione Proposita supponitur esse producta, quæque pauciores habet dimensiones.

Nunc verò inquirendum restat, num hæc æquatio divisibilis sit per  $y +$  vel  $-$  aliquo divisore ultimi Terminii  $-qrtt + t^3 + rrt - r^3v$ ; Si enim divisibilis sit, erit quoque  $w$  cognita, poterit-

teritque Proposita æquatio dividi per  $xx + yx + w\infty$ . Invenitur namque valor ipsius  $w$  per quartam æquationem

$$\frac{fy - ryy + qy^3 + y^4 - 4wy^2 - 2qwy + 3wwy + rww\infty}{ww\infty + y^3w + \frac{r}{3y} \frac{-f + r y - q y y - y^4}{3}} \\ - \frac{\frac{2}{3}q}{\frac{1}{3}r}$$

Vel ipsa inveniri quoque potest per  $5^{am}$ ; ut & per  $6^{am}$ , cum  $5^{ta}$  per  $4^{tam}$  non est divisibilis.

Quod si jam hæc æquatio 15 dimensionum non fuerit divisibilis per  $y +$  vel  $-$  aliquo divisore ultimi Termini, poterimus rursus eodem modo æquationem ejusdem formæ facere, supponendo Propositam esse productam per multiplicationem duarum aliarum, quæ singulæ 3 dimensiones habeant, investigando æquationem, in quâ incognita quantitas rursus designet quantitatem  $2^{di}$  termini alterutrius harum æquationum. Hæc autem ascendet ad 20 dimensiones, sed ubique parium erit dimensionum; ita ut hic divisio tunc exploranda sit per incognitæ quantitatis quadratum  $+$  vel  $-$  aliquo divisore ultimi Termini.

Haud secus si Proposita æquatio sit 5 aut 4 dimensionum, atque constet ipsam dividi non posse per aliam æquationem in qua unus pluresve Termini deficiant, nec per  $x +$  vel  $-$  aliquo divisore ultimi Termini, erit ea divisibilis per æquationem 2 dimensionum, in qua omnes Termini extant. Itaque ex hac æquatione 5 dimensionum

$$x^5 + qx^3 + rxx + sx + t\infty,$$

si solummodo in operatione præcedenti ponamus  $l$  &  $r\infty$ , inveniemus

$$\text{pro } 3^{ia}. ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww\infty,$$

$$\& \text{pro } 4^{ia}. rw - qwy - y^3w + 2wwy\infty.$$

Per  $3^{iam}$  autem valor ipsius  $w$  est  $\infty ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - f$ , qui valor in locum ipsius  $ww$  substitutus in  $4^{ia}$  dabit

$$\text{pro } 5^{ia}. w\infty \frac{-2ryy + 2qy^3 + 2y^4 + 2fy + t}{r + 5y^3 + qy}.$$

Porro subrogato hoc valore ubique in locum ipsius  $w$  in  $3^{ia}$ , obtinebitur

Qq q

y<sup>10</sup>



$$\begin{aligned}
 y^{10}x^* + 3qy^8 - ry^7 + 3qqy^6 - 2qry^5 - 2qsy^4 + 4sr^2y^3 - 4ssyy - 4st^2y - tt\infty o. \\
 - 3s^2 + 11st - rr + 4qt + 7rt + r^2 - rrsf \\
 + q^3 - qqr + qqs + tqg + tqr \\
 - qrr
 \end{aligned}$$

Et hæc est æquatio quæ inservit dividendis æquationibus 5 dimensionum, quæ quærebatur.

Pro æquationibus autem quatuor dimensionum, utpote  $x^{**} + qxx + rx + f\infty o$ , concipiendo  $k, l, t$ , &  $v\infty o$ , invenio

pro 2<sup>di</sup>.  $qy + y^3 - 2wy\infty r$ ,  
& pro 3<sup>ti</sup>.  $qw + yyw - ww\infty s$ .

Ponendo jam valorem ipsius  $w\infty \frac{qy + y^3 - r}{2y}$  in 3<sup>ti</sup>a, obtinebitur

$$y^6 + 2qy^4 + qqyy - rr\infty o.$$

Quæ æquatio erit divisibilis per  $yy$ , + vel - aliquo divisore ultimi Termini, atque æquatio Proposita  $x^{**} + qxx + rx + f\infty o$  per  $xx + yx + w\infty o$ , ut & per  $xx - yx + z\infty o$ ; hoc est,

$$\text{per } xx + yx + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}yy - \frac{r}{2y}\infty o,$$

$$\& xx - yx + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}yy + \frac{r}{2y}\infty o.$$

Ubi notandum, hanc Regulam, quâ omnes reducibiles æquationes Quadrato-quadrata reduci possunt, esse planè eandem cum illa, quam D. des Cartes pag. 79, 80, & 81 suæ Geometriæ descripsit. Nec dubitare possim, quin ipsam eodem modo, vel certè non multùm absumili invenerit; præsertim si ea, quæ pagin. 84 in genere de æquationum Reductione docuit, conferantur cum ipsius Methodo secantium, & quæ deinceps pag. 49 exposuit. Aded ut, iudicio meo, ne quidem verisimile videatur, imprimis si concinnam præcedentium cum sequentibus coherentiam spectemus, ipsum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam desumpsisse. Quippe pro excellenti, quâ pollebat, animi generositate, (ut novisti & tu & quotquot ejus familiaritate usi sunt,) non modò nunquam tantopere animo indulgebat, sed parvus etiam hic ejus tractatus tam varia profunda & admirandæ eruditionis specimina summique ingenii inventa exhibet, & quæ

& quæ præ Antiquorum monumentis aded sunt generalia, utilia, ac à vulgo remota, ut nemo, qui illum intellexerit atque ipso- rum scripta cum hujus scriptis comparaverit, in hæc cogitationes incidere unquam possit; Quemadmodum nemo tam præposito est ingenio, ut fulgentem solis lucem à micantibus stellis derivandam arbitretur. Non tamen hic quicquam Veteribus detractum volo, dum eos micantibus stellis assimilo; credo enim stellas dari, quæ in se sint ipso etiam sole majores ac fulgidiores, quanquam non quidem nostrum respectu, qui terram inhabitamus. Namque inter illos, Archimedes imprimis ac Diophantus, multiq; alii, qui superiori & hoc nostro sæculo vixerunt, viri celebres, magni certè apud me nominis & æstimationis sunt, ac suis etiam monumentis immortalem in omnes Posteris nominis gloriam promeritos lubentissimè fateor. At majorem post illos lucem mundo exortam esse, ipsi etiam, si reviviscerent, in nostro Cartesio non tantum agnoscerent, sed etiam sibi ex ejus lumine majus lumen accendere satagerent, aliosq; ut illo potius, quam suo uterentur, monerent: quia non modò jucundius sed tutius etiam in solis lumine vivitur, & per compendiosiores vias ad multò plura objecta pervenitur, eaq; multò luculentius ac distinctius quàm in stellarum lumine oculis patent. Sed quid nudam veritatem tot verbis palliare conor, idq; apud te, qui incomparabilem illum Virum, non tantum ex ipsius scriptis, sed præsertim ex intima familiaritate, quæ tibi cum eo à multis retro annis intercessit, penitus pernovisti, quemq; interea non semel maximo cum stupore admiratus es, cum videres eum quæstiones in Mathesi difficillimas è vestigio tantà promptitudine resolvere, ac si non difficilliores, quàm omnium facillimæ, ipsi fuissent, quæ nihilominus à præstantissimis etiam Mathematicis in ea usque tempora, aut non, aut non nisi maximà cum perplexitate inveniri potuerant. Et cum te pœniteat, (uti aliquando coram ipse fassus es) quod non omnia, quæ ullo unquam tempore ex ejus ore emanarunt, fideliter chartis mandata custodieris, id mihi satis amplum testimonium est, unde certus sim, tibi, ut mihi, ne quidem verisimile fieri posse, Illum hanc Reductionis Regulam ex aliorum scriptis ad se potius transtulisse, quàm ex propriis fundamentis, fecundissimis illis omnium scientiarum seminariis, eruisse atque invenisse. Sed de his satis.



Jam ad Regulam revertar, & paucis innuam, quòd ex operatione hìc factà eluceat generalis Methodus tollendi ordine omnes, quæ quidem possunt, quantitates incognitas, vel eas quæ ut incognitæ considerantur; quod, meo quidem iudicio, magni usus est, cum sæpenumero quæstiones difficiliores, unam tantum incognitam quantitatem supponendo, aut non resolvi posse, aut multo majori labore, aut certè ad eas resolvendas alias vias quàm hactenus imitari consuevimus ineundas esse, deprehenderim; quod etiam Cartesium nostrum non latuisse ex pag. 4, aliisque passim locis luculenter constat. quod nihilominus haud ita pridem ab insigni Mathematico in dubium revocari comperi, cujus rei causam hanc conjicio, quòd in aliorum scriptis magis quàm in hujus versatus fuerit. Dixi autem hanc Regulâ tolli eas quantitates, quæ quidem tolli possunt: non enim semper omnes possunt, neque etiam unâ exceptâ, neque duabus, &c. Nam si quæstio non sit Theorema, omnes tolli nequeunt; & si determinata sit, omnes unâ exceptâ tolli possunt; si verò una deficiat conditio, quò minus determinata existat, omnes tolli queunt duabus exceptis, & sic deinceps, ut nosti. Neque, quod sedulò observo, etiam semper per quamlibet æquationem una quantitas incognita tolli potest. Exempli gratiâ, in duabus hisce æquationibus

$$\begin{aligned} x^3 - 3zx + bbx - zzb\infty 0, \\ + bz - zbb \\ + 2zz \end{aligned}$$

$$\& x^3 - 4zx + zbx - 2zzb\infty 0, \text{ in quibus } x \& z \text{ duas}$$

$$\begin{aligned} + 4zz - 2zb \\ + bb \end{aligned}$$

incognitas quantitates designant, potest  $x$  vel  $z$  per neutram ex altera tolli. Quod, ubi accidit, indicio est, Problema, è quo hæ duæ æquationes fuerunt deductæ, si omnes ejus conditiones includant, non determinatum esse, atque unam in eo conditionem, ut prorsus determinatum sit, deficere. Non rarò etiam licet in resolvendo aliquo Problemate determinato diversas invenire æquationes, unam eandemque incognitam quantitatem habentes, idque magno cum emolumento. Sed de his aliàs.

Porro quomodo easdem Regulas aliâ adhuc Methodo inveniam, breviter adjungam.

Sit

Sit æquatio Proposita, ut ante,

$$x^6 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + v = 0,$$

& inquiretur num dividi possit per æquationem duarum dimensionum cui nullus terminus desit, pone per  $xx + yx + w = 0$ . si itaque per eam divisibilis sit, erit  $xxw - yx - w$ , quo valore ipsius  $xx$ , ubique in locum  $xx$  subrogato, resultabit æquatio in qua  $x$  unam tantum habebit dimensionem, nimirum

$$\begin{aligned} & -3wwyx - w^3 = 0. \\ & -y^5 - wy^4 \\ & +4wy^3 + 3wyy \\ & -qy^3 + qww \\ & +2qwy + rwy \\ & -rw - sw \\ & +yyr - qwyy \\ & -sy + v \\ & + t \end{aligned}$$

Deinde pono singulos terminos  $= 0$ , adeò ut tum habeas has duas æquationes,

$$-3wwy - y^5 \text{ \&c. } = 0. \quad \& \quad -w^3 - wy^4 \text{ \&c. } = 0.$$

easdem quæ præcedentes 4<sup>a</sup> & 5<sup>a</sup>; Ita ut  $w$ , eodem quo ibi modo, ablata, eandem tandem æquationem nanciscaris

$$y^5 + 4qy^3, \text{ \&c. } = 0$$

Eodem modo se res habet in reliquis.

Illud verò notandum est, hanc positionem  $xx - yx - w = 0$  seu  $xx = yx + w$  paulò faciliorem reddere operationem, cum in subrogatione valoris ipsius  $xx$  non opus sit ut signa mutantur, quod alioqui secundum priorem positionem  $xx + yx + w = 0$  contingit: Itaque hæc pro illa potius est eligenda. Et quod hanc non elegerim, ideo factum est, ut idem effectus utriusque methodi evidentius pateret. Eodem modo, si præcedens æquatio inquirenda esset, num dividi posset per æquationem trium dimensionum, in qua nullus terminus deficiat, ponerem illam  $x^3 = yxx + wx + z$ , sed non  $x^3 + yxx + wx + z = 0$ , quemadmodum, si aliam Methodum sequerer, facturus essem.

Qq q 3

Super-



## 494 IOHANNIS HUDDENII EPIST. I.

Supervacaneum verò est me dicere, has tres præcedentes Regulas æquationum 6, 5, & 4<sup>or</sup> dimensionum, (quamvis illæ tanquam exemplum generalis Regulæ in medium allatæ sint) se extendere ad omnes casus: nam cum  $q$  denotet quantitatem cognitam tertii termini Propositæ æquationis, affectam suis signis + & -; manifestum est in Regulis valorem ipsius  $q$  tantum subrogandum esse in locum  $q$ ; vel si fortè tertius hic terminus in æquatione deficiat, omnes quantitates per  $q$  multiplicatas, cum etiam tum sint  $\infty 0$ , delendas esse. ita quoque se res habet in  $r$ ,  $s$ , &  $t$ . Verbi gratiâ, si hæc æquatio 5 dimensionum  $x^5 + 6xx - 25x - 39\infty 0$  divisibilis esset per rationalem duarum dimensionum, in qua nullus terminus deest; Oportet, cum in hac æquatione  $q$  sit  $\infty 0$ ,  $r\infty 6$ ,  $s\infty -25$ ,  $t\infty -39$ , loco hujus  $y^{10} + 3qy^8 - 7y^7$  &c.  $\infty 0$ , scribere hanc  $y^{10} + 6y^7 + 75y^6 - 429y^5 - 36y^4 - 600y^3 - 4138yy - 3684y - 621\infty 0$ . quâ  $y$  invenitur  $\infty -1$ , ideoque  $w\infty \frac{-27yy + 2qy^3 \&c.}{r + 5y^3 + qy} \infty -3$ ; & pro  $xx + yx + w\infty 0$ , hæc  $xx - 1x - 3\infty 0$ , per quam Proposita æquatio erit divisibilis. atque ita in reliquis. Adeò ut hinc pateat, sicut etiam in 17<sup>ma</sup> aliisque Regulis, quomodo omnes casus æquationum æqualium dimensionum, sive aliqui termini desint, sive non, vel quo tandem modo signis + & - affecti sint, sub una eademque Regula comprehendi possint, adeò ut sexcenti ejusmodi casus ad unum referri & multi labores rescindi queant. Quod satis superque Regula æquationum 4 dimensionum, cum omnibus casibus, quos aliqui elaborarunt, comparata, immensusque labor, quem illis hoc negotium peperit, demonstrant; præsertim si eadem ratione omnes casus æquationum 5 & 6 dimensionum describere vellent.

Denique notandum, cum dico, primùm inquirendum esse num æquatio Proposita dividi possit per aliam in qua omnes termini non extant, non adeò rigidè illud sequendum esse; non enim id, necessarium, sed plerumque brevissima via est ad æquationem Propositam reducendam.

## XX REGULA,

*Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationalem*

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 495  
*nalem & dimensionum, fractioneq; carentem, 2<sup>da</sup> verò ter-  
 mino, si adsit, manente, ad aliam trium, & hanc iterum, si  
 fieri potest, ad alias pauciorum dimensionum.*

Postquam exploratum est æquationem Propositam  
 non esse divisibilem per aliam, duos duntaxat terminos  
 habentem, inveniendus est valor hujus æquationis

$$y^3 - qyy - 4fy - spp \infty 0.$$

$$+ pr + 4qf$$

$$- rr$$

ubi *p* designat quantitatem cognitam, suis signis + vel  
 — affectam 2<sup>di</sup> termini; *q*, tertii; *r*, quarti; *f*, quinti.  
 Invento autem valore ipsius *y*, poterit æquatio Propo-  
 sita ejusdem ope dividi in duas æquationes sequentes,  
 quæ singulæ duas dimensiones habent, nimirum in

$$xx + \frac{1}{2}px + \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \text{ in } x, + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} \infty 0,$$

$$\& xx + \frac{1}{2}px - \sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y} \text{ in } x, + \frac{1}{2}y - \frac{\frac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp - q + y}} \infty 0.$$

Quòd si verò valor ipsius *y* non sit æqualis alicui ex di-  
 visoribus ultimi termini  $-spp + 4qf - rr$ , non pote-  
 rit æquatio Proposita ulterius quàm ad tres dimensio-  
 nes reduci.

Exempli gratia, si reducere velimus æquationem  $x^4 - 2x^3 -$   
 $2xx - 2x + 1 \infty 0$ , quæ per æquationem, duos solummodo ter-  
 minos habentem, est indivisibilis, invenio

$$y^3 - qyy - 4fy - spp \infty y^3 + 2yy^2 - 16 \infty 0.$$

$$+ pr + 4qf$$

$$- rr$$

(nam  $p \infty - 2$ ;  $q \infty - 2$ ;  $r \infty - 2$ ;  $f \infty 1$ ). quæ dividi potest  
 per  $y - 2 \infty 0$ , ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ  
 $xx - 1x + 1 \infty 0$ , &  $xx - 1x + 1 \infty 0$ .

$$+ \sqrt{5} \quad - \sqrt{5}$$

Eodem modo si habeatur æquatio  $x^{***} - 12x - 5 \infty 0$ , ob-  
 tinco



$$\text{tineo } y^3 + 20y - 144 \infty 0, \text{ pro } y^3 - qyy - 4fy - spp \infty 0 \\ + pr + 4qf \\ - rr$$

(nam  $p \infty 0, q \infty 0, r \infty - 12, f \infty - 5$ .) quæ divisibilis est per  $y - 4 \infty 0$ , ita ut loco duarum æquationum habeas has duas

$$xx + 2x + 5 \infty 0,$$

$$\& xx - 2x - 1 \infty 0.$$

Similiter si proponatur æquatio literalis

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0, \text{ erit } p \infty - 2a; \\ - cc$$

$$q \infty 2aa - cc; r \infty - 2a^3; f \infty a^4, \text{ ideoque in locum æquationis} \\ y^3 - qyy - 4fy - spp \infty 0, \text{ scribenda } y^3 - 2aayy^* - 4a^4cc \infty 0, \\ + pr + 4qf \\ - rr$$

quæ dividi potest per  $y - 2aa \infty 0$ , ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$xx - ax + x\sqrt{aa + cc}, + aa \infty 0,$$

$$\& xx - ax - x\sqrt{aa + cc}, + aa \infty 0.$$

Si verò hæ æquationes per  $y +$  vel  $-$  aliquo divisors ultimi Termini non fuissent divisibiles, non potuissent etiam æquationes Propositæ ulterius quàm ad 3 dimensiones reduci.

## XXI REGULA.

Hactenus Regulæ, quas tradidi, respexerunt æquationes, in quibus una tantum incognita quantitas, quam  $x$  nominavi, inveniebatur, ut meos conceptus distinctius exprimerem. Jam uno adhuc verbo adjiciam: *Quòd in Proposita æquatione quamlibet cognitam pro incognita & vice versa quamlibet incognitam pro cognita respectu Reductionis considerare liceat; & quòd sæpe compendio sit incognitam tanquam cognitam & unam ex cognitis tanquam incognitam considerare & sic Reductionem inquirere.* Nam primò in omnibus æquationibus, quæ ex duabus rationalibus oriri possunt, æquè per quamlibet cognitam, eam tanquam incognitam considerando, quàm per incognitam reductio inveniri potest, & sæpe etiam brevius, si ex solis irrationalibus produci possunt. Dein quòd hoc sæpe compendio sit, vel

hinc

hinc manifestum fit, quia rarò admodum omnes literæ eundem dimensionum numerum habent, atque adeò, si aliquam ex cognitis pro incognita consideres, sæpe quoque aliqua æquatio exurgit, quæ pauciorum sit dimensionum quàm Proposita; & adhuc pauciorum, si etiam inter ipsas cognitæ, quæ rarò itidem eundem dimensionum numerum habent, delectum instituas; aut saltem reductio hoc vel illo modo facilior evadet.

*Considerando itaque omnes sine discrimine literas ut cognitæ, ejusmodi ex illis eligere & pro incognita supponere integrum erit, quæ ad reductionem facillimè expediendam (per præcedentes Regulas) maximè conducere judicabitur. Et hæc omnium, quas tradidi, Regularum, respectu Reductionum, utilissima est.*

Et per eam non tantum Reductiones ultimarum æquationum, quæ omnes Propositi Problematis conditiones includunt, ope Regularum supra explicatarum sæpe compendiosissimè inveniuntur, sed etiam priusquam ad ultimam deveniatur, quam plurimæ reductiones rescindi & simplicissimæ sæpe æquationes haberi possunt. Et quidem operæ pretium foret, rem hanc aliquot exemplis clariorem reddere, sed ne te atque etiam me diutius remorer, unum tantum & alterum exemplum adjungam.

*Quo modo reducere possis omnem rationalem æquationem, quæ per aliam rationalem, non cognitæ ultimi Termini divisoribus, dividi queat, remanente etiam, si placet, omni Fractione, quæ in illa reperitur; nimirum, si in æquatione illa aliqua litera, sive cognita, sive incognita reperiat, secundum quam æquatio ordinata non plures quàm quatuor dimensiones habeat; seu in qua litera aliqua reperitur non plures habens quàm 1, vel 1 & 2, vel 1, 2, & 3, vel 1, 2, 3 & 4 dimensiones, vel etiam plures, sed quæ ex his derivari possint: Id quod semper ex investigatione valoris hujus literæ, quæ vel incognita est, vel ut incognita consideratur, innotescit, uno tantum casu excepto, quem postea indicabo.*

Rrr

I Exem-



1 *Exemplum*, in quo litera *b* ubique unam tantum dimensionem habet.

$$\text{Esto æquatio Proposita } x^4 - 2ax^3 + aaxx + a^3x - a^4 \infty 0 \\ + b \quad - ab \quad + ba^3$$

$$\text{Ergo } bx^3 - abxx + ba^3x - x^4 + 2ax^3 - aaxx - a^3x + a^4 \\ \text{div. per } x^3 - axx + a^3. \quad \text{fit } b \infty - x + a \\ \& x - a + b \infty 0. \text{ Æquatio, per} \\ \text{quam Proposita dividi potest.}$$

2 *Exemplum*.

$$\text{Esto æquatio Proposita } x^3 - 20bxx + 60aax - 120a^3 \infty 0 \\ - 2a \quad + 70ab \quad - 60aab$$

$$\text{Ergo } -20bxx + 70abx - 60aabx - x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3 \\ \text{div. per } -20xx + 70ax - 60aa. \quad \text{fit } b \infty \frac{-x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3}{-20xx + 70ax - 60aa}. \text{ Hujus}$$

autem maximus communis divisor, per Methodum ante descriptam, est  $x - 2a$ , per quem si fractio abbreviatur,

$$\text{fiet } b \infty \frac{-xx - 60aa}{-20x + 30a}, \text{ vel } \frac{xx + 60aa}{20x - 30a}$$

seu, quod idem est,  $xx - 20bx + 30ab \infty 0$ . Ita ut æquatio

Proposita in hanc, & præcedentem  $x - 2a \infty 0$  divisa sit.

3 *Exemplum*, in quo quantitas *c* tantum 1 & 2 habet dimensiones.

$$\text{Esto æquatio Proposita } x^4 + 8acxx - 4aacx + 12aacc \infty 0 \\ - aa$$

$$\text{Ergo } 12aacc \infty - 8axxc - x^4 \\ + 4aacx + aaxx \\ \text{div. per } 12aa. \quad \text{fit } cc \infty \frac{4ax - 8xx}{12a} \text{ in } c, + \frac{aaxx - x^4}{12aa}$$

Unde extractâ radice invenietur

$$c \infty \frac{ax - xx}{2a}, \text{ hoc est, } xx - ax + 2ac \infty 0$$

$$\text{vel } c \infty \frac{-ax - xx}{6a}, \text{ hoc est, } xx + ax + 6ac \infty 0.$$

Ita ut æquatio Proposita in hasce duas sit divisa. Quoniam autem

tem in ea  $a$  quoque 1 & 2 tantum dimensiones habet, potuisset idem etiam querendo valorem ipsius  $a$  investigari.

Ubi notari potest, quod, ad inveniendas radices alicujus æquationis, in quâ litera, cujus valor queritur, non plures habet dimensiones quàm 1 & 2, vel 2 & 4, vel 3 & 6, &c. feire non sit necesse, cujusnam illa sequentium formularum existat.

$$xx - ax + bc \infty 0$$

$$xx + ax + bc \infty 0$$

$$xx + ax - bc \infty 0$$

$$xx - ax - bc \infty 0.$$

Etenim posita  $xx, px, qx \infty 0$ , si  $p$  statuatur pro 2<sup>do</sup>, &  $q$  pro ultimo termino, erit semper  $x \infty \frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{1}{4} pp - q} \infty 0$ .

#### 4 Exemplum.

Porro quoniam æquationes omnes quatuor dimensionum reduci possunt ad æquationes trium dimensionum, & in omnibus quidem æquationibus secundus terminus tolli potest, ostendendum solummodo restat, quo pacto divisores æquationis inveniri queant, in quâ incognita quantitas, vel alia quævis litera, quæ ut incognita consideratur, tantum 1 & 3 dimensiones habet. In quem itaque finem proponatur æquatio  $x^3 \infty qx + r$ .

In qua  $x$  designet quantitatem, cujus valor queritur;  $q$  &  $r$  autem quantitates cum suis signis, quales illæ in æquatione reperiuntur.

Esto etiam  $x \infty y + z$

Eritque  $x^3 \infty y^3 + 3zy^2 + 3z^2y + z^3 \infty qx + r$ .

Ex hac autem æquatione fiant jam duæ aliæ, ponendo

$$\begin{array}{l} 3zy^2 + 3z^2y \infty qx, \quad \& \quad y^3 + z^3 \infty r \\ \text{div. per } y + z. \quad \text{fit } 3zy \infty q \quad \text{vel } y^3 \infty r - z^3 \end{array}$$

$$y \infty \frac{q}{3z}$$

$$y^3 \infty \frac{q^3}{27z^3} \infty r - z^3$$

$$z^3 \infty \frac{1}{27} r \pm \sqrt{\frac{1}{27} rr - \frac{1}{27} q^3},$$

$$\& y^3 \infty \frac{1}{27} r \pm \sqrt{\frac{1}{27} rr - \frac{1}{27} q^3}, \text{ quia } y^3 \infty r - z^3$$

R r r 2

vel



$$\begin{aligned} & \text{vel } y \propto \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C. \frac{1}{2}r 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}, \text{ quia } y \propto \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{\frac{1}{27}q^3}} \\ & \& x \propto \sqrt{C. \frac{1}{2}r 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, + \sqrt{C. \frac{1}{2}r 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, \\ & \text{quia } x \propto \sqrt{\frac{1}{27}q^3} \\ & \text{vel } x \propto \sqrt{C. \frac{1}{2}r 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C. \frac{1}{2}r 8 \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}. \end{aligned}$$

Quoniam verò in prima parte prioris valoris ipsius  $x$  reperitur signum  $8$ , & in secunda signum contrarium  $8$ , atque quantitates per ea conjunctæ omnino eadem existunt; & quoniam ad obtinendum valorem ipsius  $x$ , duæ illæ partes simul addi debent; poterunt ipsa determinari, ponendo pro uno  $+$ , & pro altero  $-$ , ita ut habeatur

$$\begin{aligned} & x \propto \sqrt{C. \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C. \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, \\ & \text{vel } x \propto \sqrt{C. \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C. \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}. \end{aligned}$$

Quocirca quærendo juxta hanc Regulam valorem quantitatis  $x$ , licebit ipsius beneficio æquationem, si reducibilis sit, in duas rationales dividere: quoniam tunc  $\sqrt{C. \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$  extrahi poterit, excepto tantum, quando quantitate  $q$  signo  $+$  adfectâ,  $\frac{1}{4}rr$  minor est quàm  $\frac{1}{27}q^3$ .

Ubi difficultas aliqua superesse videtur in radicis Cubicæ ex binomiis hisce extractione; sed cum  $\sqrt{C.}$  ex binomio numerali ope Regulæ pag. 389 extrahi queat, poterit etiam ejusdem beneficio radix ex binomio literalis inveniri, cum pro literis numeros ad arbitrium assumere liceat, &c.

Quamquam autem sæpenumero in reducendis æquationibus hujus quarti exempli contingat, ut Quæsitum per aliquam ex aliis Regulis facilius inveniatur, poterit tamen interdum hæc Regula, præsertim in æquationibus numeralibus, ubi divisores ultimi Termini complures existunt aut difficiles sunt inventu, cum fructu usurpari.

Quibus præmissis, poterò generalem Regulam commodiùs exprimere, quæ talis est:

Si in æquatione Proposita, quæ in duas alias rationales est divisibilis, quæratur valor quantitatis incognitæ  
vel

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 501  
 vel alicujus alterius, quæ ut incognita consideratur,  
 poterimus ipsam aut dividere (sicut in 1<sup>mo</sup> exemplo);  
 aut fractionem inde ortam per communem aliquem  
 divisorem abbreviare (sicut in 2<sup>do</sup> exemplo); aut deni-  
 que radicem quadratam (sicut in 3<sup>io</sup> exemplo) aut ra-  
 dicem cubicam extrahere, excepto tantum, ut dixi-  
 mus, uno casu, ubi  $q$  designat quantitatem signo + ad-  
 fectam, existente  $\frac{1}{4}rr$  minore quàm  $\frac{1}{27}q^3$ .

Ubi tandem id advertendum, Regulam hanc in resolvendis æ-  
 quationibus trium & quatuor dimensionum eandem esse cum illa  
 Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferro tribuit; ita ut ex  
 superiori calculo manifestum sit quòd ea Regula, quamvis ille  
 author ex alio fortè fundamento eam eruerit, hoc tamen etiam  
 modo inveniri possit. Hanc verò eandem esse, vel hinc evidens  
 fit, si ex illa sola conficiamus hæc quatuor: quippe ponendo  
 quantitates  $q$  &  $r$  signo + adfectas esse, obtinebimus, existente  
 $x^3 \infty + qx + r$ ,

$$x \infty \sqrt[3]{C. \frac{1}{3}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{3}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}.$$

Si  $q$  designet quantitatem signo +,  $r$  autem quantitatem signo —  
 adfectam, obtinebimus, existente  $x^3 \infty + qx - r$ , (mutando tan-  
 tum in Regula signa, quæ ipsi  $r$  impares dimensiones habenti  
 præfiguntur)

$$x \infty \sqrt[3]{C. -\frac{1}{3}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. -\frac{1}{3}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}.$$

Si  $q$  designet quantitatem signo —, &  $r$  signo + adfectam, obti-  
 nebimus, existente  $x^3 \infty - qx + r$ , (mutando signa, quæ ipsi  $q$   
 impares dimensiones habenti præfiguntur)

$$x \infty \sqrt[3]{C. \frac{1}{3}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. \frac{1}{3}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}.$$

Denique si  $q$  &  $r$  signo — sint adfectæ, obtinebimus, existente  
 $x^3 \infty - qx - r$ , (mutando signa, ut supra)

$$x \infty \sqrt[3]{C. -\frac{1}{3}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt[3]{C. -\frac{1}{3}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}.$$

Et nota, quòd eodem modo operando similes regulæ pro alio-  
 ribus æquationibus inveniri possint.

2. Sed cum Methodus hæc reducendarum æquationum, ubi  
 incognita quantitas, vel quæ ut incognita consideratur, trium vel

R r r 3

qua-



quatuor dimensionum est, aliquando paulò longior sit, præstat  
tum ejus loco vigesimâ Regulâ uti, per quam omnes casus trium  
vel quatuor dimensionum, nullo excepto, reduci possunt; Vel  
etiam regulâ 17, ubi non adstringeris æquationibus quatuor di-  
mensionum, sed omnes rationales, quæ per aliquam rationalem  
æquationem dividi queunt, reducere poteris, atque adeò etiam  
omnem Propositam rationalem æquationem, quæ per aliquam  
rationalem divisibilis est, si modo aliqua litera, quam libuerit,  
tanquam incognita, & reliquæ omnes ut cognitæ considerentur.

3. Sæpe autem satis breviter Reductio æquationum, quæ tan-  
tummodo per irrationales reduci possunt, inveniri potest. exem-  
pli gratiâ, si habeas hanc æquationem,

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0$$

$$- cc$$

$$\text{vel } x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$$

addas utrimque quantitatem aliquam per  $xx$  multiplicatam, (cum  
ab altera parte habeas  $cc$  in  $xx$ ) talem nempe ut  $\sqrt{\quad}$  quadrata ex  
altera parte extrahi possit, quod statim per extractionem reperies  
esse  $+aaxx$ , ideoque utrimque hac  $+aaxx$  addita, & radice  
quadrata extractâ invenies

$$xx - ax + aa \infty x \sqrt{aa + cc}$$

atque ideo Proposita æquatio ex multiplicatione duarum sequen-  
tium æquationum resultare poterit

$$xx - ax + aa \infty 0.$$

$$- \sqrt{aa + cc}$$

$$xx - ax + aa \infty 0.$$

$$+ \sqrt{aa + cc}$$

4. Magnum quoque usum habent aliæ quædam Regulæ, tam  
in reducenda æquatione, quæ per rationales, quàm quæ tantum-  
modo per irrationales reduci possunt. ex. gr. per 11 Regulam,  
omnes æquationes reduci poterunt, quæ non tantum ex duabus  
aliis per multiplicationem produci possunt, in quarum alterutra;  
unus pluresve termini deficiunt, si æquatio consideretur secun-  
dum incognitam quantitatem, sed etiam si tantum quævis alia li-  
tera, sive cognita, sive incognita, reperitur, quæ ut incognita  
consideratur, & æquatio secundum illam in ordinem redacta ta-  
lis sit, ut ex duabus aliis produci possit, in quarum alterutra unus  
plu-

DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM. 503  
 plurēve termini deficiunt. sic quamvis sequens æquatio 6 di-  
 mensionum

$$\begin{array}{r} x^3 - 2axx + 3abx + 6a^2 \infty 0 \\ \quad \quad \quad + 6abb \\ \text{per } x^3 + 2axx + 4ax - 4a^2 \infty 0 \\ \quad \quad \quad + 2ab - 8b^3 \end{array}$$

Product.  $x^6$ , &c.

produci non possit ex duabus aliis, in quarum alterutra unus vel  
 plures termini deficiunt, si scilicet  $x$  ut incognita quantitas con-  
 sideretur, poterit tamen ex duabus talibus produci, si vel  $a$  vel  $b$   
 ut incognita quantitas consideretur, ut ex æquationibus, ex qui-  
 bus producta est, patet; ac proinde æquatio illa Proposita per  
 XI Regulam reduci poterit.

Hic ergo hanc Regulam abrumpam, & celeriori in sequenti-  
 bus gradu ad finem, quem jam dudum desidero, festinabo.

Diversas adhuc alias Regulas in paratu habeo, quas hinc simul  
 adjungerem, si non aliquid in futurum reservare animus esset: Ni-  
 mirum inter cæteras una est, per quam omnes irrationales radi-  
 ces tam numeralium, quàm literalium æquationum invenio; una  
 per quam omnes æquationes numerales, quæ ex duabus rationa-  
 libus produci possunt, ad easdem reduco, non cognitis divisori-  
 bus ultimi termini; item alia, per quam sæpe literales æquatio-  
 nes reduco, quæque in eo consistit, quòd unam aut alteram lite-  
 ram ponam  $\infty 0$ , vel  $\infty$  alii alicui quantitati, quam libuerit, &  
 quòd hanc æquationem inde resultantem prius reducere coner,  
 & postea etiam Propositam per hanc. Exempli loco adjungam  
 hanc

### REGVLA M,

*Qua omnes rationales aquationes, qua nullas fractiones  
 continent & reduci possunt, reducuntur, si ponendo unam aut  
 plures literas  $\infty 0$ , aut  $\infty$  alii quam libuerit quantitati, talis  
 inde æquatio resultet, qua una tantum dimensione minor &  
 irreducibilis sit.*

Ex-gr. habeatur hæc æquatio  $x^3 - 5axx + 6bbx - 18abb \infty 0$ ,  
 $- 9bc - 9a^3$   
 $- 9aa + 27abc$  in



in qua si  $a$  ponatur  $\infty 0$ , exurgit hæc

$$x^3 + 6bbx - 9bcx\infty 0$$

seu  $xx + 6bb - 9bc\infty 0$ , quæ non potest reduci. Regula verò per quam reductionem Propositæ æquationis jam instituo, talis est:

*Dividantur per ultimum terminum exortæ æquationis, si non ex diversis partibus aut Membris constet, (partes aut Membra eas nomino quantitates, quæ in eodem termino signis + vel - cæteris connectuntur) vel aliàs per unum membrum ultimi termini quodcunque libuerit, (quemadmodum hic per +6bb, vel -9bc) omnia Membra ultimi termini Propositæ æquationis, quacunque per illud dividi possunt, atque illud quotiens, sive unum sive plura fuerint, addatur quantitati x, & per hanc summam Propositæ æquatio dividi poterit.*

Ut in hoc exemplo, dividendo - 18abb per + 6bb, exurgit quotiens - 3a, quod additum ipsi x, quia in Propositæ æquatione inter membra ultimi termini nullum aliud habetur, quod per + 6bb sit divisibile, exurgit  $x - 3a$ , quod Propositam æquationem dividere poterit. Vel si alterum exortæ æquationis Membrum assumptum fuisset, nimirum -9bc, similiter prodiiisset - 3a, quia solum + 27abc inter Membra ultimi termini in Propositæ æquatione reperitur, quod per - 3a dividi potest.

Nota, quòd per hanc methodum, dum literam unam aut plures pono  $\infty 0$ , vel  $\infty$  alii alicui quantitati, quam libuerit, non tantum rationales literalium æquationum radices, sed etiam irrationales tam literalium quàm numeralium æquationum inveniri possint. Nam etiam Regulæ, quarum ope quarundam Cubicarum æquationum radices investigantur, quas Cardanus Authori Scipioni Ferreo ascribit, hac etiam methodo inveniri possunt, quæ alia est, quàm quæ in 21 Regula ostensa fuit.

*Hactenus æquationes absolute tantum consideravi, nunc superest, ut eas etiam relative, quatenus referuntur ad Problema, ex quo educuntur, considerem.*

Sed priusquàm hoc aggrediar pauca quædam de iis Regulis, quas hucusque tradidi, dicenda restant. Illæ verò sunt duorum generum, quædam enim aliquibus in casibus docent Propositam æqua-

æquationem *vel non esse reducibilem, vel in quantum, vel per quales non sit reducibilis*, ut Regula 1 & 2, & 13, 14, & 15. quædam etiam docent, *quo pacto æquationes reduci debeant, quas scimus reducibiles esse, vel per aliquam in qua aliquis terminus datus, aut  $\infty$  est*, quales sunt 9 & 11, *vel per aliquam rationalem*, ut sunt 16 & 17, *vel deniq; per alias*. Sed quia sæpe latet, utrum Proposita æquatio, vel quæ ex Problemate quodameducta est, reducibilis sit, nec ne, ad hoc inquirendum aliquis ordo observandus est. Et quem harum Regularum respectu optimum judico, talis est: Inquirerem primò ope priorum Regularum anne æquatio sit irreducibilis; quod in æquationibus irreducibilibus primo plerumque intuitu apparet, aut saltem magna ex parte; ad eò, ut multi labores tali in casu præscindantur. At si hoc non ita appareret, transirem ad Regulam XI, (imprimis si Ultimus æquationis terminus multos divisores, vel qui inventu difficiles sint, admittat, vel si æquatio surdas quasdam aut fractas quantitates contineat) per quam omnes æquationes reduci possunt, quæ divisibiles sunt ope alterius in qua una aut plures quantitates desunt, sive æquationem in ordinem redigas respectu incognitæ, sive respectu alicujus cognitæ, quæ ut incognita consideratur.

Et sic omnes pæne literales & reducibiles æquationes, ut & quàm plurimæ numerales reduci possunt. Si verò nec hoc pacto succedat Reductio, eam per cæteras Regulas inquirerem.

Possunt etiam hic quædam adjungi de signis, ex quibus cognoscitur sitne aliquæ æquatio reducibilis nec ne; Verùm cum hoc unum sit ex primariis rei capitibus, plus otii & patientiæ, quam quidem in præsentiarum mihi suppetit, ad id requiritur.

*Quod igitur alteram partem Reductionum concernit, quæ refertur ad Problema, ex quo æquatio est deducta, multa adhuc dici possent, tam de ultimæ æquationis (in qua omnes Problematis conditiones includuntur) Inventionem, quæ omnes aut saltem multæ Reductiones rescindi queunt; quàm de aliis Reductionibus, quæ sæpe illis supra descriptis breviores existunt.* Nam quod primum attinet, experientia docet in omnibus ferè Problematis multos esse, eosque diversos modos ultimam æquationem inveniendi, & ad pauciorum dimensionum æquationem, si hunc, quàm

S s s

si alium



si alium modum sequaris, perveniendi. Imò non tantum diversâ, sed etiam eâdem methodo utendo, tandem in æquationem plurimum aut pauciorum dimensionum pervenies. Atque ita breviori ac faciliori viâ non tantum multum laboris inveniundo postremam æquationem præteribis, sed etiam reductiones valde inventu difficiles, quæ alioqui, si ad altiores æquationes delabaris, quærendæ essent, rescindes.

*Vide Sectionem XXI  
tuarum  
Exercitationum Mathematicarum.*

Quod alterum spectat, ejus à me specimen habes, ubi nempe æquationes omnium figurarum ordinarum circulo inscriptarum inveniuntur, in eo nempe consistens, quòd cum ultimam æquationem, quæ omnes Problematis conditiones includit, habeas, præterea adhuc aliam, sed aliâ methodo, investiges, quæ itidem omnes conditiones comprehendat, adeò ut, cum duas æquationes eandem incognitam quantitatem includentes obtinueris, ipsas à se invicem tam diu, quàm fieri possit, subtrahas, vel quod eodem redit, earum communem divisorem invenias, quemadmodum tunc in inveniendis illis æquationibus satis fusè ostendi.

Et hujus Methodi utilitas se longè lateque diffundit, præsertim ad Problemata difficiliora, quorum æquationes ad plures dimensiones excurrunt. Nam sæpe numero, si earum reductionem per præcedentes Regulas investigares, ætatem consumeres, quod alioquin, si hanc viam sequaris, breviter, & ut ita dicam, uno momento absolvere posses.

Cum igitur utrumque & Reductiones in principio in totum vel ex parte rescindendi, & eas in multis casibus adhuc compendiosius quàm per præscriptas Regulas inveniendi, majoris momenti sit, quàm ut hîc dignè pertractari possit; atque ego etiam scribendo, tu verò legendo, defessi sumus: præstat, ut hîc subsistamus atque aliquantulum respiremus, reliquaquæ opportuniore tempore reservemus.

Interim vale & me ama.

*Datum Amsteladami Pridie  
Iduum Iulii A° 1657.*

J O.

JOHANNIS HUDDENII  
EPISTOLA SECVNDA,  
DE  
MAXIMIS ET  
MINIMIS.

Clarissime Vir,



*Q*uod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hic describere conabor; & in antecessum demonstrabo hoc

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices sint æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum Progressionis, & sic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

In hunc finem assumatur æquatio quælibet, in qua  $x$  designet quantitatem incognitam, ut, verbi gratiâ, hæc æquatio

$$x^2 + pxx + qx + r = 0$$

ipsa que multiplicetur per  $xx - 2yx + yy = 0$ , id est, per æquationem, in qua duæ radices sunt æquales, & habebitur hæc æquatio

$$\left. \begin{array}{l} xx - 2yx + yy \text{ in } x^2 \\ xx - 2yx + yy \text{ in } pxx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } qx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } r \end{array} \right\} = 0.$$

S s s 2

In



In qua etiam duæ radices æquales comprehenduntur, videlicet  $x \infty y$ , ac denuo  $x \infty y$ . Vel si illam multiplicassemus per  $xx + 2yx + yy \infty 0$ , obtinuissimus duas falsas radices æquales: ut-  
cunque autem hæc multiplicatio fiat, si pro  $y$  ponatur ejus valor,  
habebitur

$$\left. \begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array} \right\} \infty 0.$$

Si jam unumquodque horum quatuor productorum, seu, quod  
eodem redit,  $+1, -2, +1$  (quoniam dividi potest per  $xx$ ,  
& multiplicatores  $x^3, pxx, qx$ , &  $r$  nullam mutationem effi-  
ciunt) multiplicetur per Arithmetica Progressionem: erit pro-  
ductum hujus multiplicationis  $\infty 0$ .

Nam

<p>Mult. <math>+1, -2, +1</math> per <math>a, a+b, a+b^2</math> fit <math>a, -^2a - ^2b, +a + ^2b</math> seu <math>+^2a - ^2a, +^2b - ^2b \infty 0</math>.</p>	<p>Mult. <math>+1, -2, +1</math> per <math>a, a-b, a-b^2</math> fit <math>a, -^2a + ^2b, a - ^2b</math> seu <math>2a - ^2a, +^2b - ^2b \infty 0</math>.</p>
--	---

Huc usque universaliter consideravi omnes æquationes, duas  
æquales radices habentes, quomodocunque ipsæ proponantur,  
hoc est, sive in iis termini quidam desint sive non, ut & quomo-  
docunque signa  $+$  &  $-$  sese habuerint. Quod manifestum erit  
consideranti nobis solummodo rem esse cum hisce numeris  $+1,$   
 $-2, +1$ , non autem cum multiplicatoribus  $x^3, pxx, qx$ , &  $r$ .

Similiter respectu Arithmetica Progressionis res etiam ge-  
neralis manet, quandoquidem duo priores termini  $a, a+b$ , &  
 $a, a-b$  indeterminati sunt. Quod restat, ex sola inspectione  
præcedentis exempli, conferendo duas sequentes multiplicatio-  
nes, perspicuum fiet.

$\begin{array}{r} x^3 + pxx + qx + r \infty 0 \\ xx - ^2xx + xx \infty 0 \\ \hline xx - ^2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - ^2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - ^2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - ^2xx + xx \text{ in } r \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} x^3 + pxx + qx + r \infty 0 \\ xx - ^2xx + xx \infty 0 \\ \hline xx - ^2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - ^2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - ^2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - ^2xx + xx \text{ in } r \end{array}} \right\} \infty 0.$	$\begin{array}{r} x^3 + pxx + qx + r \infty 0 \\ xx - ^2yx + yy \infty 0 \\ \hline x^3 - ^2yx^2 + yyx^3 \\ + px^4 - ^2pyx^2 + ppyxx \\ + qx^3 - ^2qyxx + qyyx \\ + rxx - ^2ryx + ryy \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} x^3 + pxx + qx + r \infty 0 \\ xx - ^2yx + yy \infty 0 \\ \hline x^3 - ^2yx^2 + yyx^3 \\ + px^4 - ^2pyx^2 + ppyxx \\ + qx^3 - ^2qyxx + qyyx \\ + rxx - ^2ryx + ryy \end{array}} \right\} \infty 0.$
<p>Mult. per <math>a. a \ 8 \ b. a \ 8 \ 2 \ b. a \ 8 \ 3 \ b. a \ 8 \ 4 \ b. a \ 8 \ 5 \ b.</math></p>	

Nam

Nam quoniam hæc producta  $x^3 - 2yx^2 + yyx^2$ , &  $xx - 2xx + xx$  in  $x^3$  eadem existunt, erit etiam  $x^3 - 2yx^2 + yyx^2$  multiplicatum per  $a, a, b, a, b, a, b$  æquale  $c$ ; sic &, quoniam  $+px^2 - 2pyx^2 + ppyxx$  idem est quod  $xx - 2xx + xx$  in  $pxx$ , erit quoque  $px^2 - 2pyx^2 + ppyxx$  multiplicatum per  $a, b, a, b, a, b, a, b$  (liquidem, ut ex præcedentibus liquet, primus terminus Progressionis ad libitum sumi potest) æquale  $0$ ; atque sic deinceps. Unde fit, ut etiam Productum totius æquationis per hanc seriem proportionalium sit  $\infty 0$ , nec non ut unus valor ipsius  $x \infty y$ , quæ una duarum radicum æqualium est, necessariò includatur. Et cum hic rursus nulla habeatur ratio multitudinis aut paucitatis aut etiam qualitatis multiplicatorum: erit Propositum Theorema universaliter demonstratum de quibuscunque æquationibus, duas radices æquales habentibus.

Hinc emanat

Si in æquatione aliqua 3 sint radices æquales, & ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit, eo modo quo jam dictum est, remanebunt in Producto duæ adhuc æquales radices istarum trium; ac proinde Productum hoc denuo per Arithmeticam Progressionem multiplicari poterit. Quod si autem in Proposita æquatione quatuor radices æquales fuerint, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, relinquentur in hoc Producto adhuc 3 æquales radices istarum 4, & sic porro, quotcunque æquales radices æquatio habuerit, semper per singulas ejusmodi multiplicationes una tantum istarum æqualium radicum tolletur.

Hoc itaque demonstrato, transeo ad meam Methodum de Maximis & Minimis, quæ sic se habet.

Positis quocunque quantitatibus Algebraicis, maximum aut minimum designantibus, ponantur ipsæ  $\infty \infty$ ; & ordinatâ æquatione multiplicetur ea per Progressionem Arithmeticam, eo modo, quo dictum est: & Pro-

Sss 3

ductum



ductum erit æquatio, quæ communem cum præcedenti radicem habebit.

Ita ut ad hujus Methodi demonstrationem tantummodo probandum restet, æquationem illam primam duas æquales radices comprehendere. Quod equidem demonstratu adeo facile est, ut huic rei ulterius insilire nihil aliud sit, quam operam & oleum perdere.

Et hæc quidem generalis mea Methodus est. Particulares vērò, quas antehac in aliquibus exemplis vidisti, hinc resultant. quemadmodum ex subjunctis operationibus, utroque modo factis, perspicere licebit.

1. Cum Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, non nisi unam incognitam quantitatem continent, & nullas habent fractiones, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur, multiplico tantum unumquemque terminum per numerum dimensionum incognitæ quantitatis, neglectis quantitatibus omnibus, in quibus incognita non reperitur, & suppono Productum  $\infty 0$ .

Ex. gr. sit  $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab \infty$  alicui maximo.

mult. per  $\begin{matrix} 3 & 3 & 1 \end{matrix}$

fit  $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x \infty 0$ , vel  $9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \infty 0$ .

Juxta generalem Methodum erit

$3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x + aab \infty 0$ .

mult. per Arithm. Progr.  $\begin{matrix} 3. & 3. 2. & 1. & 0. \end{matrix}$

& fit, ut ante,  $9ax^3 - 3bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x \infty 0$ , seu

$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \infty 0$ .

2. Si Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, unam tantum incognitam quantitatem comprehendunt, atque aliquot fractiones admittunt, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur, operatio institui poterit, hoc pacto:

Primò deleo omnes quantitates cognitæ. Deinde si reliquæ quan-

DE MAXIMIS ET MINIMIS. 511

quantitates non ejusdem denominationis fuerint, ipsas sub eundem denominatorem reduco. Quo peracto, considero hujus fractionis integrum Numeratorem cum unoquoque Membro seu parte separata Denominatoris (si ex diversis partibus constet) tanquam unam quantitatem, Maximum aut Minimum designantem, ac unumquodque membrum seu partem separatam Numeratoris multiplico per dimensionum numerum quantitatis incognitæ istius Membri, postquam ab eodem numero est ablatas dimensionum numerus incognitæ quantitatis, qui in hoc Membro Denominatoris reperitur; productoque per hoc Membra Denominatoris multiplicato, erunt omnia ejusmodi producta simul  $\infty 0$ , ut ex sequentibus exemplis clariùs patebit.

1 Exemplum.

Est  $\frac{4aab^3 + 5a^2x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab \infty$  alicui maximo.

Deletâ quantitate cognitâ  $ab$ , reliquisque terminis sub communi Denominatore reductis, obtinebitur

$$\frac{4aab^3 + 5a^2x + x^5 - ax^4 + bx^4}{x^3}$$

Mult. num. per  $-3, -2, +2, +1, +1$ :

fit  $-12aab^3 - 10a^2x + 2x^5 - ax^4 + bx^4$  mult. per  $x^3 \infty 0$ .

&c, dividendo per  $x^3$ ,

$$-12aab^3 - 10a^2x + 2x^5 - ax^4 + bx^4 \infty 0.$$

Juxta generalem Methodum

$$\text{est } \frac{4aab^3 + 5a^2x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab \infty 0,$$

$$\text{id est, } \frac{4aab^3 + 5a^2x + x^5 - ax^4 + bx^4 + abx^3 \infty 0}{-z}$$

$$\text{Seu, ordinatâ æquatione, } x^5 - ax^4 + abx^3 + 5a^2x + 4aab^3 \infty 0.$$

$$\begin{array}{r} +b \quad -z \\ +2, +1, \quad 0, -1, -2, -3 \\ 2x^5 - ax^4 \quad * \quad * \quad -10a^2x - 12aab^3 \infty 0. \\ +b \end{array}$$

2 Exemplum.

$$\text{Est } \frac{baax + aaxx - bx^2 - x^4}{baa + x^2} - a + x \infty \text{ alicui maximo.}$$

De-



512 IOHANNIS HUDDENII EPIST. II.

Deletâ quantitate cognitâ  $a$ , & reliquis sub communi divifore  
reductis, habebitur  $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3}$ .

Porro pro  $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa}$ , scribo  $^2baax + ^2aaxx - ^3bx^3$  in  $baa$   
 $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{x^3}$ , scribo  $^4baax - ^4aaxx$  in  $x^3$  }  $\infty 0$

Divifis per  $aax$ , habebitur  $\frac{2baa + ^2aax - ^3bxx}{^4bx - xx}$  in  $xx$  }  $\infty 0$   
 adeoque  $-x^4 - ^4bx^3 - ^3bbxx + ^2aabx + ^2bbaa \infty 0$ .

Sic & si fuerit  $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3 + 2bxx - 3aax - c^3} \infty$  alicui maximo,

Pro  $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3}$ , scribo  $^4baax - ^4aaxx - ^3a^4$  in  $4x^3$  }  
 pro  $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{2bxx}$ , scribo  $^2baax - bx^3 - ^2a^4$  in  $2bxx$  }  $\infty 0$   
 pro  $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{-3aax}$ , scribo  $+aaxx - ^2bx^3 - a^4$  in  $-3aax$  }  
 pro  $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{-c^3}$ , scribo  $+^2baax + ^2aaxx - ^3bx^3$  in  $-c^3$  }

Juxta generalem Methodum

est  $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \infty \zeta$

vel  $\frac{2baax + aaxx - bx^3 \infty baa \zeta + x^3 \zeta}{\text{seu } -bx^3 + aaxx + 2baax - baa \zeta \infty 0}$

$- \zeta$

Arith. Prog. 3 2 1 0  
 $-3bx^3 + 2aaxx + 2baax \infty 0$ , hoc est,  
 $-3 \zeta$

$\frac{-3bx^3 + 2aaxx + 2baax}{3x^3} \infty \zeta$

ac proinde  $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \infty \frac{+2baax + 2aaxx - 3bx^3}{3x^3}$

&, ut fupra,  $x^4 + 4bx^3 + 3bbxx - 2aabx - 2bbaa \infty 0$ .  
 Patet

Patet itaque, duas has speciales Regulas in generali illa Methodo esse fundatas respectu hujus Progressionis 0, 1, 2, 3, 4, &c. multiplicando scilicet terminum, in quo incognita quantitas  $x$  non reperitur per 0; ubi  $x$  unam habet dimensionem per 1; & sic porro. Sed in genere notandum, quod, dum operando juxta generalem Methodum Progressionem illam Arithmeticam ad libitum sumere licet, semper is terminus æquationis, quem libuerit, tolli possit, multiplicando illum tantum per 0. Atque ita valor ipsius  $\zeta$  per unam Progressionem simplicius obtineri poterit, quam per aliam: ut, si in præcedenti exemplo, ubi multiplicavimus per 3, 2, 1, 0, multiplicassemus per 0, 1, 2, 3, obtinuissimus  $aaxx + 4baax - 3baa\zeta \propto 0$ , seu  $\frac{xx + 4bx}{3b} \propto \zeta$ .

Unde apparet, ipsam quantitatem  $\zeta$  (sive maximum vel minimum), si  $x$  cognita supponatur, inveniri atque exprimi posse multis diversis modis, e quibus faciliores pro Constructione eligere licebit: Aut si  $\zeta$  cognita supponatur, poterit  $x$  totidem diversis modis inveniri. Porro considerando  $\zeta$  &  $x$ , ut incognitas, poterimus ad alterutram tollendam æquationem instituere inter duos ex simplicissimis valores: ut, in superiori exemplo, inter  $\zeta \propto \frac{-3bx + 2aax + 2baa}{3xx}$  &  $\zeta \propto \frac{xx + 4bx}{3b}$ .

3. Si termini Algebraici, Maximum aut Minimum designantes, plures unâ quantitate incognitâ includunt, suppono ipsos  $\propto \zeta$ ; & per hanc æquationem & per cæteras datas, seu quæ ex natura Problematis manant, (quæque semper simul, si omnes Problematis conditiones includunt, tot numero existunt, quot incognitæ quantitates, unâ exceptâ, habentur, nimirum si unum tantum Maximum aut Minimum inter infinitas magnitudines quaeritur, non autem inter infinita Maxima;) reduco æquationes omnes ad unam, in qua necessario duæ quantitates incognitæ continebuntur, & inter eas  $\zeta$ . Cum quæ tunc sola  $\zeta$  ad Maximum vel Minimum inventionem nota esse debeat, manifestum est in eum finem duntaxat concipiendum esse, alteram quantitatem incognitam duas æquales radices habere.

Sumamus, exempli gratiâ, tres æquationes, quibus maximam latitudinem curvæ determinavi, quales illæ pag. 498 Exercitationum tuarum Mathematicarum reperiuntur; excepto tantum

T t

quod



514 IOHANNIS HUDDENII EPIST. II.

quod Maximum hic appellem  $\zeta$ , & quod ibi  $\zeta$  nominatum est, hic appellem  $v$ .

$$1^{ma} \text{ Eq. } y^3 - n y x + x^3 \infty 0$$

$$2^{da} \text{ Eq. } v - x \infty y$$

$$3^{tia} \text{ Eq. } \frac{1}{2} v - y \infty \zeta \text{ maximo.}$$

Substituto valore ipsius  $y$  2<sup>da</sup> æquationis in locum ipsius  $y$  1<sup>ma</sup> & 3<sup>tia</sup>, habebitur

$$\text{pro } 1^{ma} \text{ Eq. } v^3 - 3 v v x + 3 v x x \infty v n x - n x x$$

$$\text{\& pro } 3^{tia} \text{ Eq. } x \infty \zeta + \frac{1}{2} v.$$

Subrogato autem valore ipsius  $x$  3<sup>tia</sup> æquationis in ejusdem locum in 1<sup>ma</sup>, fiet pro

$$1^{ma} \text{ Eq. } \frac{1}{4} v^3 + 3 v \zeta \zeta \infty \frac{1}{4} n v v - n \zeta \zeta$$

$$\text{vel } \frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + 3 \zeta \zeta v + n \zeta \zeta \infty 0.$$

Atque hæc quidem æquatio jam sola relicta est, in qua igitur ut ultimæ conditioni Problematis satisfiat, hoc est, ut ea ita determinetur, ut  $\zeta$  fiat Maximum, multiplico (quemadmodum ibi factum fuit) eandem æquationem

$$\frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + 3 \zeta \zeta v + n \zeta \zeta \infty 0$$

per Arith. Progr. 3, 2, 1, 0:

$$\text{obtinẽoq̃ue } \frac{3}{4} v^3 - \frac{1}{2} n v v + 3 \zeta \zeta v * \infty 0$$

$$\text{vel } 3 \zeta \zeta \infty \frac{1}{2} n v - \frac{3}{4} v v.$$

Hinc subrogato valore ipsius  $\zeta \zeta$ , per hanc æquationem invento,

in ejus locum in præcedenti  $\frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + 3 \zeta \zeta v + n \zeta \zeta \infty 0$ ,

obtinẽbitur  $\frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + \frac{1}{2} n v v - \frac{3}{4} v^3 + \frac{1}{8} n n v - \frac{1}{2} n v v \infty 0$

$$\text{hoc est, } -\frac{1}{2} v^3 + \frac{1}{8} n n v \infty 0$$

$$\text{vel } v v \infty \frac{1}{3} n n.$$

Si Arithmetica Progressio fuisset 0, 1, 2, 3, invenissemus

$$3 \zeta \zeta \infty \frac{n v v}{8 v + 4 n}; \text{ si } 2, 1, 0, -1, \text{ habuissẽmus } 3 \zeta \zeta \infty \frac{\frac{3}{2} v^3 - \frac{3}{4} v v n}{n}.$$

Et si ve valor ipsius  $\zeta \zeta$ , per utramlibet harum æquationum in-

ventus, in præcedenti subrogetur æquatione  $\frac{1}{4} v^3 - \frac{1}{4} n v v + 3 \zeta \zeta v$

+  $n \zeta \zeta \infty 0$ , si ve alter alteri adæquetur, ponendo  $\frac{1}{2} n v - \frac{3}{4} v v$

$$\infty \frac{n v v}{8 v + 4 n}, \text{ vel } \infty \frac{\frac{3}{2} v^3 - \frac{3}{4} v v n}{n}, \text{ obtinẽbitur semper } v v \infty \frac{1}{3} n n.$$

Quamvis autem operationes uno aut alio modo factæ hic parum inter

inter se differant, potest tamen sæpe numero, ut supra monui, contingere, ut una multo prolixior ac difficilior sit quàm alia, quo quidem casu commodiorem viam, quæ faciliè perspicitur, eligere satius erit.

Cæterùm notandum, ultimam hanc æquationem  $\frac{1}{2}v^3 + 3vz = \infty$   $\frac{1}{2}nvv - nz =$  determinari etiam posse per secundum modum præcedentem. Etenim existente  $z = \infty$   $\frac{\frac{1}{2}nvv - \frac{1}{2}v^3}{3v + n}$  &  $z = \infty$  maximo: erit etiam hic valor ipsius  $z$  omnium maximus, ideoque

$$\text{div. per } vv. \left. \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2}nvv - \frac{1}{2}v^3}{\frac{1}{2}nvv - \frac{1}{2}v^3} \text{ in } 3v \\ \frac{\frac{1}{2}nvv - \frac{1}{2}v^3}{\frac{1}{2}nvv - \frac{1}{2}v^3} \text{ in } n \end{array} \right\} \infty 0$$

$$\text{vel } \left. \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}v} \text{ in } 3v \\ \frac{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}v} \text{ in } n \end{array} \right\} \infty 0, \text{ id est, } \left. \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2}nv - \frac{1}{2}vv}{\frac{1}{2}nn - \frac{1}{2}nv} \\ \frac{\frac{1}{2}nv - \frac{1}{2}vv}{\frac{1}{2}nn - \frac{1}{2}nv} \end{array} \right\} \infty 0$$

$$\text{vel } \frac{\frac{1}{2}nn - \frac{1}{2}vv}{\frac{1}{2}nn - \frac{1}{2}vv} \infty 0$$

$$\text{seu } \frac{1}{2}nn \infty vv.$$

Quoniam verò in multis casibus æquatio ultimò relicta non finit ut valor ipsius  $z$  vel  $z$ , aut  $z^2$ , &c. in ejusmodi terminis, in quibus ipse  $z$  non invenitur, exprimi possit, visum fuit in exempli hujus operatione generalem Methodum indicare.

Atque hîc, Vir Amicissime, multa adhuc dicenda restarent, sed ne rursus epistola mea voluminis instar se extendat, scriptio-  
nis meæ filum abruptam; præsertim cum id, quod hîc desidera-  
tur, non difficile sit ex præcedentibus colligere. At verò ne te  
lateat, quid hîc desiderari putem, adjungam argumentum tracta-  
tus, quem de hac materia ante 2 aut 3 annos in proprios usus  
adornavi, quemque nuper obiter & quasi per transennam inspe-  
xisti. In eo autem pertractantur



I. *Methodus de Maximis & Minimis.* Termini verò Algebraïci, Maximum vel Minimum designantes, considerantur

1. *Vel respectu cognitionis nostræ, sic ut certi simus in iis Maximum esse comprehensum, si aliquod detur Maximum; aut Minimum, si aliquod Minimum detur.*

Termini autem hi Algebraïci in se continent

*Vel unam duntaxat incognitam quantitatem, habentem*

1. *Vel fractionem nullam, in cuius Denominatore incognita reperitur quantitas.*
2. *Vel fractiones, in quarum Denominatore ipsa reperitur.*

*Vel plures unâ incognitâ quantitate, quæ duplices sunt*

1. *Vel tot simul cum iis æquationes dantur, seu in natura Problematis includuntur; quot sunt incognitæ quantitates unâ exceptâ;*
2. *Vel non totidem, aut etiam nulle.*
2. *Vel respectu nostræ inscientiæ; id est, cùm incerti sumus, utrum in iis aliquod Maximum aut Minimum, aut utrumque, aut etiam neutrum contineatur: ipsos autem rursus confidero vel absolute, vel relative ad aliquod Problema.*
2. *Ejusdem usus atque utilitas, quæ quidem se longè lateque extendit, ac præsertim ad ea Problemata, quæ aliàs difficulter ad æquationem revocari possunt. Cujus exemplum illustre est Determinatio omnium æquationum, quæ res adeò generalis atque utilis, hujus Methodi tantùm corollarium existit.*

*Vale, Vir Amicissime, & me amare perge*

Tui

Dabam Amstelædami  
6 Cal. Februar.  
A<sup>o</sup> 1658.

Observantissimum

IOHANNEM HUDDÉ.

FINIS.

517

HENRICI van HEURAET  
EPISTOLA  
DE  
TRANSMUTATIONE  
CURVARUM LINEARUM  
IN RECTAS.

*Clarissimo Viro*  
D. FRANCISCO à SCHOOTEN  
HENRICUS van HEURAET  
S. D.

**C**um nuperrimè ex tuis ad me datis, Vir Clarissime, intellexerim, desiderio te teneri videndi Methodum à me inventem, cujus beneficio complures curva linea (ut tibi indicavit D. Huddenius) in rectas possunt transmutari: non omittendum duxi, quin eandem tibi ocius transmitterem, tuoque in primis iudicio exponerem. Verum pramonere te volui, eam à me tunc temporis excogitatam esse, cum iter in Galliam meditarer, quo nec omnia, quae ea de re dici queunt, perpendere, nec quae ante discessum inveneram, chartis committere valui. In Gallia verò nunquam rebus Mathematicis vacare, sed me totum aliis studiis applicare constitui, adeo ut vix quicquam praealo dignum me scribere posse confidam. Attamen ut petitioni tuae utcumque satisfaciam, habitâ ratione temporis, quod mihi valde earum est: visum fuit in memoriam revocare, ac breviter conscribere, quae ante circa hanc rem meditatus sum, eaq. paucis hic subijcere. Quae, si Mathematicis non displicitura iudices, Commentariis tuis adungere poteris.

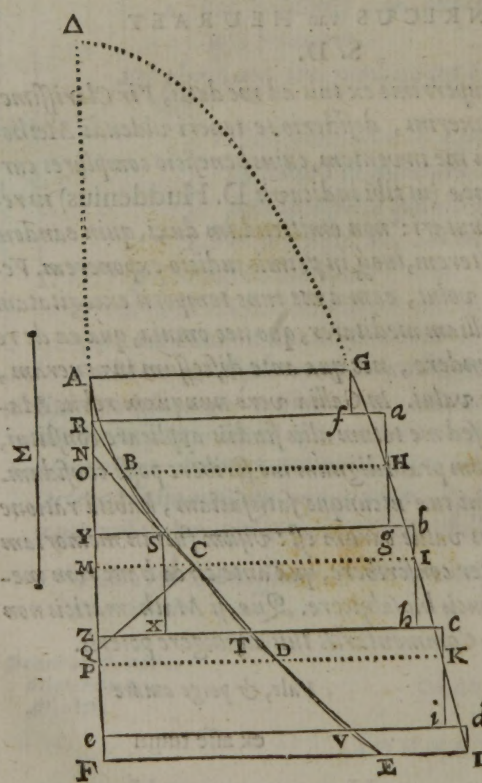
Det. Salmuth, die 13  
Januarii. A° 1699.

Huddenius noster te  
salutat diligenter.

Vale, & perge amare  
ex asse tuum  
HENRICUM van HEURAET.  
Ttt 3 Si



Si dentur duæ lineæ curvæ, exempli gratiâ,  $ABCDE$ ,  $GHIKL$ , & recta  $AF$ , ejus naturæ, ut, (ductâ ex puncto  $M$ , in linea  $AF$  pro libitu assumpto, perpendiculari  $MI$ , secante datas curvas in  $C$  &  $I$ , uti &  $CQ$  perpendiculari ad curvam  $ABCDE$ ,)  $MC$  sit ad  $CQ$ , sicut linea aliqua data  $\Sigma$  ad  $MI$ : erit superficies  $AGHIKL$  æqualis rectangulo comprehenso sub data linea  $\Sigma$  & alia recta æquali curvæ  $ABCDE$ .



Dividatur linea  $AF$  in partes quotcunque, verbi gratiâ, in punctis  $O$ ,  $M$ , &  $P$ , ducanturque perpendiculares  $OH$ ,  $MI$ ,  $PK$ , secantes curvam  $ABCDE$  in punctis  $B$ ,  $C$ , &  $D$ , at curvam  $GHIKL$  in punctis  $H$ ,  $I$ , &  $K$ ; & per puncta  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , &  $E$  agantur tangentes, quæ sibi mutuo occurrant in  $R$ ,  $S$ ,  $T$ , &  $V$ ; & per hæc puncta ducantur lineæ  $Ra$ ,  $Yb$ ,  $Zc$ , &  $d$  perpendiculares ipsi  $AF$ ; & per puncta  $G$ ,  $H$ ,  $I$ ,  $K$ , &  $L$  agantur lineæ ipsi  $AF$  parallelæ, secantes  $Ra$  in  $f$  &  $a$ ,  $Yb$  in  $g$  &  $b$ ,  $Zc$  in



DE TRANSMUT. CURVAR. LIN. IN RECT. 519  
in  $b \& c$ ,  $ed$  in  $i \& d$ ; denique ex  $S$  ducatur  $SX$  parallela lineæ  
 $AF$ , producaturque tangens  $TS$  usque in  $N$ .

Propter rectum angulum  $NCQ$ , erit  $CM$  ad  $CQ$ , ut  $MN$   
ad  $NC$ . Atqui  $MN$  est ad  $NC$ , ut  $SX$  ad  $ST$ . Quare erit  $SX$   
ad  $ST$ , ut  $CM$  ad  $CQ$ . Et quia  $CM$  est ad  $CQ$ , ut  $\Sigma$  ad  $MI$ ,  
erit  $\& SX$  ad  $ST$ , ut  $\Sigma$  ad  $MI$ , ac proinde rectangulum sub  
 $SX$  five  $YZ$   $\& MI$  five  $Yb$  æquale rectangulo sub  $ST \& \Sigma$ . Eo-  
dem modo demonstrabitur, rectangulum  $ce$  esse æquale  $\square^{lo}$  sub  
 $TV \& \Sigma$ ,  $\& \square dF \propto \square VE, \Sigma$ ,  $\& \square aY \propto \square^{lo}$  sub  $RS \& \Sigma$ .  
Quapropter omnia hæc rectangula simul sumpta æqualia erunt  
rectangulo sub  $\Sigma$   $\&$  alia recta æquali omnibus tangentibus simul  
sumptis. Unde cum illud verum sit, quotcunque rectangula at-  
que tangentes extiterint,  $\&$  figura ex parallelogrammis con-  
stans, si eorum numerus in infinitum augeatur, desinat in super-  
ficiem  $AGHIKLF$ , ac tangentes similiter in lineam curvam  
 $ABCDE$ , liquet superficiem  $AGHIKLF$  æqualem esse re-  
ctangulo sub  $\Sigma$   $\&$  recta æquali curvæ  $ABCDE$ . Quod erat  
demonstrandum.

Quomodo autem hinc longitudo datæ curvæ lineæ investigari  
possit, sequentibus exemplis patebit.

Sit primò curva  $ABCDE$  ejus naturæ, ut, sumpto in linea  
 $AF$  pro libitu puncto  $M$ , ductâque perpendiculari  $MC$ , si  $AM$   
vocetur  $x$ ,  $\& MC$  vocetur  $y$ , semper  $yy$  sit  $\propto \frac{x^3}{a}$ . Deinde posi-  
tis  $AQ \propto f$ ,  $CQ \propto v$ ,  $\& MI \propto \gamma$ : erit  $QM \propto f - x$ ,  $\&$  ejus  
quadratum  $\propto ff - 2fx + xx$ . Cui si addatur quadratum ex  $MC$ ,  
hoc est,  $yy$  five  $\frac{x^3}{a}$ , invenietur  $ff - 2fx + xx + \frac{x^3}{a} \propto vv$ .

Propter duas æquales radices  
mult. juxta meth. Huddenii per

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 0, \\ & & & & \frac{3x^3}{a} \\ \& \text{ invenietur } & -2fx + 2xx + & & \propto 0. \end{array}$$

Unde  $AQ$  five  $f \propto x + \frac{3xx}{2a}$ . à qua si subtrahatur  $AM \propto x$ , re-  
manebit  $MQ \propto \frac{3xx}{2a}$ , cujus quadratum est  $\frac{9x^4}{4a^2}$ . cui adde  $\square CM$   
seu  $\frac{x^3}{a}$ ,  $\&$  proveniet  $\square CQ \propto \frac{9x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{a}$ . Erit jam ut  $CM \sqrt{\frac{x^3}{a}}$   
ad  $CQ \sqrt{\frac{9x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{a}}$ , ita cognita aliqua linea, puta  $\frac{1}{2}a$ , (licet  
enim



enim eam pro libitu assumere) ad  $MI \propto x$ , eritque  $x \propto \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{2}aa}$ . Id quod arguit, lineam  $GHIKL$  esse Parabolam, cujus vertex est in  $\Delta$ , existente  $A\Delta \propto \frac{1}{2}a$ , & latere recto  $\propto \frac{1}{4}a$ . ac proinde longitudo lineæ curvæ  $ABCDE$  est  $\sqrt{\frac{v^3}{a} - \frac{8}{27}a}$ , existente  $\Delta F \propto v$ .

Similiter si loco  $y y \propto \frac{x^3}{a}$  ponatur hæc æquatio  $y^4 \propto \frac{x^5}{a}$ , aut  $y^6 \propto \frac{x^7}{a}$ , aut  $y^8 \propto \frac{x^9}{a}$ , atque sic porro in infinitum: invenietur semper superficies  $AGHIKLF$  ejus naturæ ut quadrari possit, ac proinde omnes hæ curvæ in rectam sunt permutabiles.

Si verò  $ABCDE$  sit Parabola, cujus axis  $AG$ , & latus rectum  $\propto a$ : invenietur  $MQ \propto \frac{2x^3}{aa}$ , & ejus quadratum  $\propto \frac{4x^6}{aa}$ . cui

adde quadratum  $CM$ , & habebitur  $\frac{4x^6}{aa} + \frac{x^4}{aa}$  pro  $\square CQ$ . Hinc

ut  $CM \propto \frac{x^4}{a}$  ad  $CQ \propto \sqrt{\frac{4x^6}{aa} + \frac{x^4}{aa}}$ , sic cognita aliqua linea, puta  $a$ , ad  $MI \propto x$ : eritque  $x \propto \sqrt{4xx + aa}$ , & linea  $GHIKL$  Hyperbola, cujus axis linea  $AG$ , centrum punctum  $A$ , latus rectum  $\propto \frac{1}{2}a$ , & transversum  $\propto 2a$ .

Quod ipsum docet, longitudinem curvæ Parabolicæ inveniri non posse, quin simul inveniat quadratura Hyperbolæ, & vice versâ.

F I N I S.

005267224



